

Grundlagenveranstaltung „Systemtheorie“ WS 2006/07

(H.S. Stiehl, AB Kognitive Systeme, FB Informatik der Universität Hamburg)

3. Übung für Übungsgruppen

Musterlösung

(N. Stein, Institut für Angewandte Physik, Universität Hamburg)

- a) Werfen Sie einen Blick auf einen ausrangierten 10 DM-Schein (oder z.B. in das auf Bronstein zurückgehende „Taschenbuch der Mathematik“) und notieren Sie die Normalverteilung für den eindimensionalen (1-D, mit $d = 1$), den 2-D und den höherdimensionalen Fall (auch unter Berücksichtigung der Kovarianzmatrix im Exponenten für den Fall $d > 1$). Zeigen Sie, dass die multidimensionale Gauß-Funktion aus 1-D Gauß-Funktionen komponiert werden kann.

$$1\text{-D: } G(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x, \sigma, \mu \in \mathbb{R}$$

μ bezeichnet hierbei den Mittelwert und σ die Standardabweichung der Normalverteilung. Der Mittelwert ist der Abzissenwert, für den die Normalverteilung maximal wird. Die Standardabweichung gibt an, bei welcher Abweichung vom Mittelwert die Verteilung auf das $\frac{1}{\sqrt{e}}$ -fache (etwa 60,65%) ihres Maximalwertes abgefallen ist.

$$2\text{-D: } G(x, y, \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_y^2(x - \mu_x)^2 + \sigma_x^2(y - \mu_y)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)$$

Für $\mu_x = \mu_y = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y =: \sigma$ wird dieser Ausdruck zu $\frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$.

$$d\text{-D: } G(\vec{x}, \vec{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right)$$

$$\vec{x}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^d, \quad \Sigma = (\sigma_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq d, \\ 1 \leq j \leq d}}, \quad \sigma_{ij} \in \mathbb{R}$$

Σ heißt Kovarianzmatrix und enthält die Standardabweichungen als Diagonalelemente.

$\det(\Sigma)$ bezeichnet die Determinante von Σ . Σ^{-1} ist die zu Σ inverse Matrix gemäß

$\Sigma^{-1}\Sigma = E_d$ (d -dimensionale Einheitsmatrix).

Weist die Normalverteilung Abweichungen auf, die nicht entlang der Koordinatenachsen liegen, so treten Kovarianzen σ_{ij} , $i \neq j$ auf. Σ ist positiv-semidefinit und symmetrisch. Daher lassen sich Koordinatentransformationen derart durchführen (s. Fischer, Lineare Algebra), dass Σ diagonal wird (vgl. Hauptmomentenanalyse in Physik, Statistik, etc.). Das heißt beispielsweise im 2-D-Fall, dass eine Rotation der Koordinatenachsen vorgenommen wird, so dass die daraus resultierenden Koordinatenachsen entlang der Standardabweichungen liegen.

Komposition der multidimensionalen aus der eindimensionalen Gaußfunktion:

Die Komposition erfolgt hier am Beispiel der zweidimensionalen Gaußfunktion. Höherdimensionale Fälle können o.B.d.A. durch polygene Anwendung des Verfahrens erreicht werden.

Ausgangsfunktionen:
$$G(x, \mu_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$G(y, \mu_y, \sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

Produktansatz:

$$\begin{aligned} G(x, \mu_x, \sigma_x, y, \mu_y, \sigma_y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{\sigma_y^2(x - \mu_x)^2 + \sigma_x^2(y - \mu_y)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) \end{aligned}$$

- b) Diskutieren Sie die Bedeutung des konstanten Faktors vor der Normalverteilung (alternativ: Leiten Sie den korrekten konstanten Faktor zum Zwecke der Normalisierung der Funktion her!) und die der Standardabweichung σ für den 1-D Fall. Für Fortgeschrittene: Stellen Sie (auch für die nachfolgenden Teilaufgaben) die Ergebnisse in grafischer Form dar.

Der konstante Faktor sorgt – wie die Aufgabenstellung indiziert – für die Normalisierung der Gauß-Funktion, d.h. dass das Integral über den gesamten Definitionsbereich, also die Menge der reellen Zahlen, den Wert 1 ergibt:

$$1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx,$$

N bezeichnet hierbei den Wert des Integrals über die nicht-normierte Gauß-Funktion.

Dieses Integral ist nicht trivial zu lösen. Deshalb bedienen sich weniger Ambitionierte des „Taschenbuch der Mathematik“ (Bronstein):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Durch einen Produktansatz lässt sich dieses Integral jedoch auch analytisch lösen. Man geht hierbei von zwei nicht-normalisierten, jedoch gleich parametrisierten Gauß-Funktionen aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = N \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dx = N$$

Der Produktansatz liefert

$$N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

Da die Integrale über unterschiedliche Variablen gebildet werden, können diese kaskadiert werden, so dass ein Doppelintegral über das Produkt der beiden Integranden zu lösen ist.

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dy dx \end{aligned}$$

Nun folgt eine Koordinatentransformation der kartesischen Koordinaten x und y in Polarkoordinaten r und φ . Es gilt:

$$x^2 + y^2 \rightarrow r^2, \quad dx dy \rightarrow r dr d\varphi \quad (\text{Für näheres zur Koordinatentransformation sei auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen})$$

Damit wird

$$N^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot r dr d\varphi$$

Das innere Integral ist mithilfe der Substitution zu lösen

reminder:

$$\text{Substitutionsregel: } \int_a^b f(z(r)) \cdot z'(r) dr = \int_{z(a)}^{z(b)} f(z) dz$$

mit $z(r) = -\frac{r^2}{2\sigma^2} \Rightarrow z'(r) = -\frac{r}{\sigma^2}$ wird

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{2\pi} (-\sigma^2) \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(-\frac{r}{\sigma^2}\right) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} (-\sigma^2) \cdot \int_{z(0)}^{z(\infty)} \exp(z) dz d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sigma^2) \cdot [\exp(z)]_{z(0)}^{z(\infty)} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sigma^2) \cdot (-1) d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

¹ Die Integrationsgrenze $z(\infty)$ ist durch Grenzwertbildung $\lim_{x \rightarrow \infty} z(x)$ zu bestimmen.

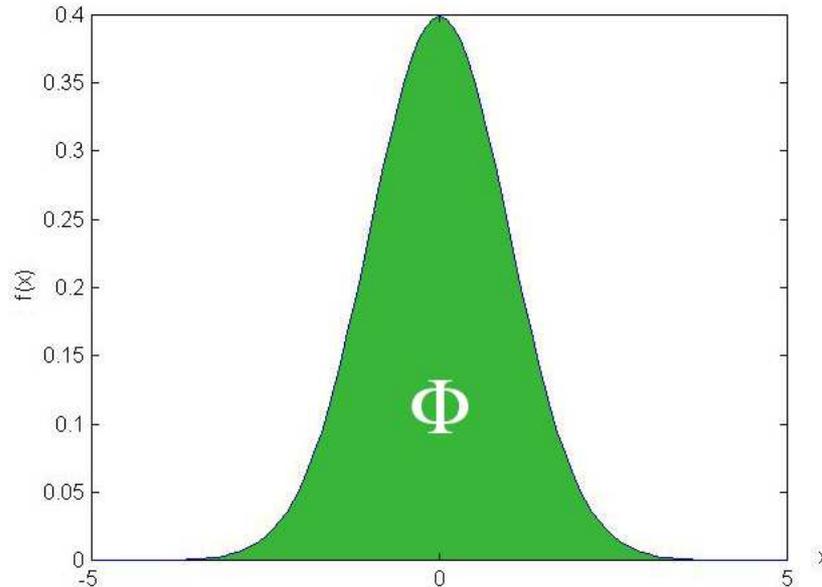


Abbildung 1: Normalisierte Gauß-Funktion $G(x, \mu = 0, \sigma = 1)$. Die Fläche unterhalb des Graphen wurde mit Φ bezeichnet in Anlehnung an die Verteilungsfunktion der Normalverteilung (s.u.)

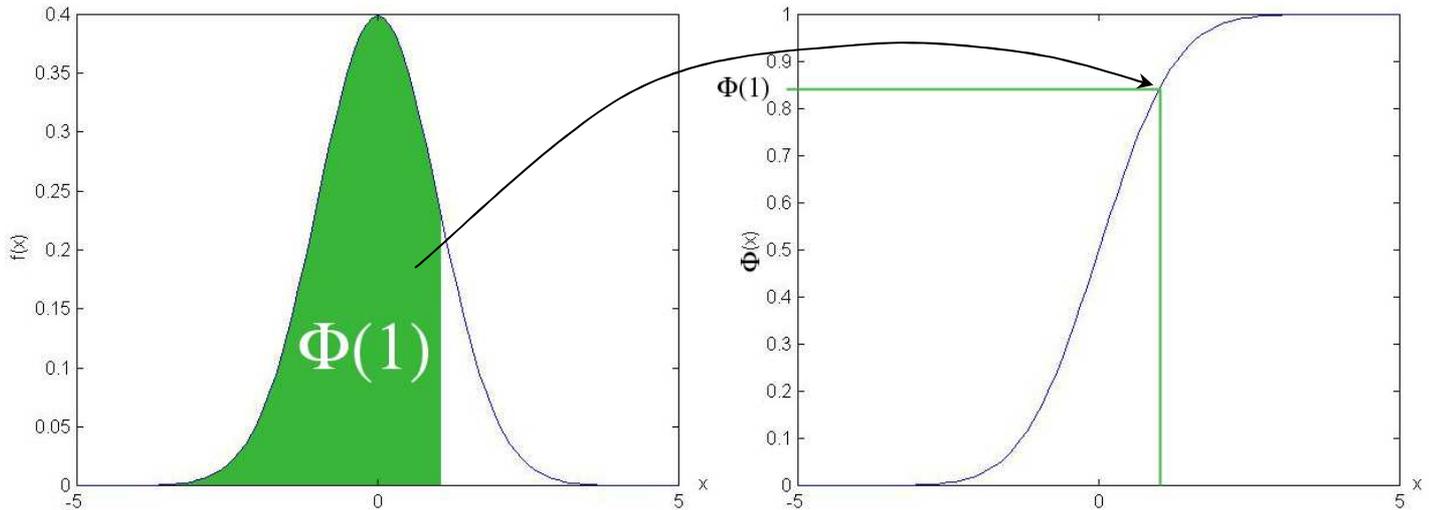


Abbildung 2: Gegenüberstellung der normalisierten Gauß-Funktion und ihrer Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi . \text{ Die Verteilungsfunktion (auch: Fehlerfunktion,}$$

error-function, $\text{erf}(x)$, etc.) stellt die Fläche zwischen dem Graphen der Gauß-Funktion und der Abszisse linksseitig des jeweiligen x -Wertes dar.

Der Grenzwert der Fehlerfunktion für $x \rightarrow \infty$ ist 1.

- c) Überlegen Sie, welche Gestalt bzw. mathematische Form die 1-D Normalverteilung für den Grenzwert $\lim \sigma \rightarrow 0$ annimmt. Für Fortgeschrittene: Stellen Sie die Beziehung zu einer elementaren Funktion aus der Distributionentheorie her.

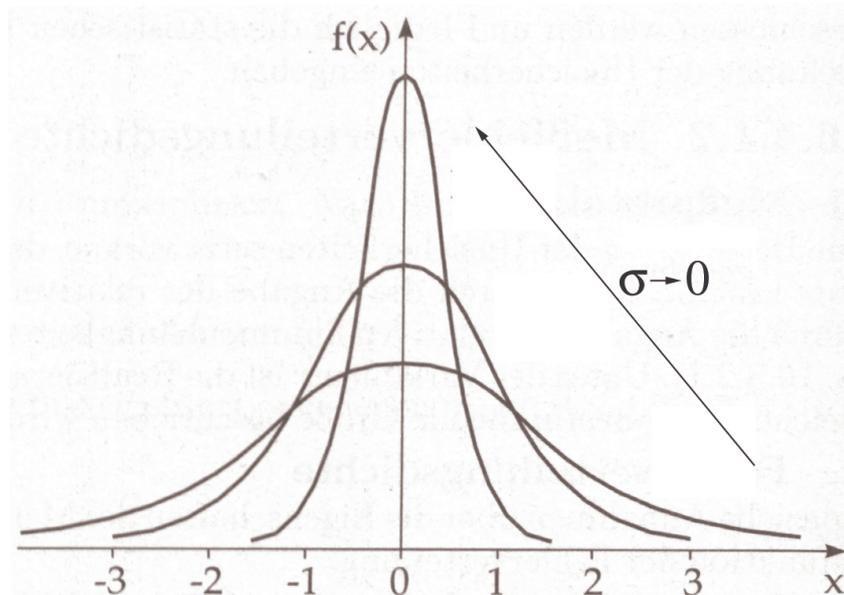


Abbildung 3: Gaußfunktionen mit unterschiedlicher Standardabweichung. Je geringer die Standardabweichung ist, desto schmaler wird die Normalverteilung. Da das Integral über die Funktion jedoch normiert ist, steigt die Amplitude, um die Fläche unter dem Graphen konstant zu halten.

Je geringer die Standardabweichung, desto schmaler und höher ist die Normalverteilung ausgeprägt. Für den Grenzwert der Standardabweichung gegen Null geht die Funktion in die sog. Delta-Distribution über:

“**Diracsche Deltadistribution.** Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ² setzt man

$$\delta_a[\varphi] := \varphi(a).$$

Dadurch wird eine Distribution $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ³ definiert, die Diracsche Deltadistribution zum

Punkt a . Sie kann nicht durch eine Funktion wie in Beispiel (17.1) oder (17.2) dargestellt werden. Man kann jedoch die Deltadistribution als Limes von Funktionen darstellen.“

(aus: Forster, Analysis 3, §17)

Eigenschaften der 1-D-Deltadistribution:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \delta(x - a) = 0 \quad \forall x \neq a,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

(Vgl.a. Forster, Analysis 3, §17)

² $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger

³ $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: Menge aller Distributionen

d) Bestimmen Sie die Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die 1-D und 2-D Gauß-Funktion.

$$1\text{-D: } G'(x, \mu, \sigma) = -\frac{(x - \mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

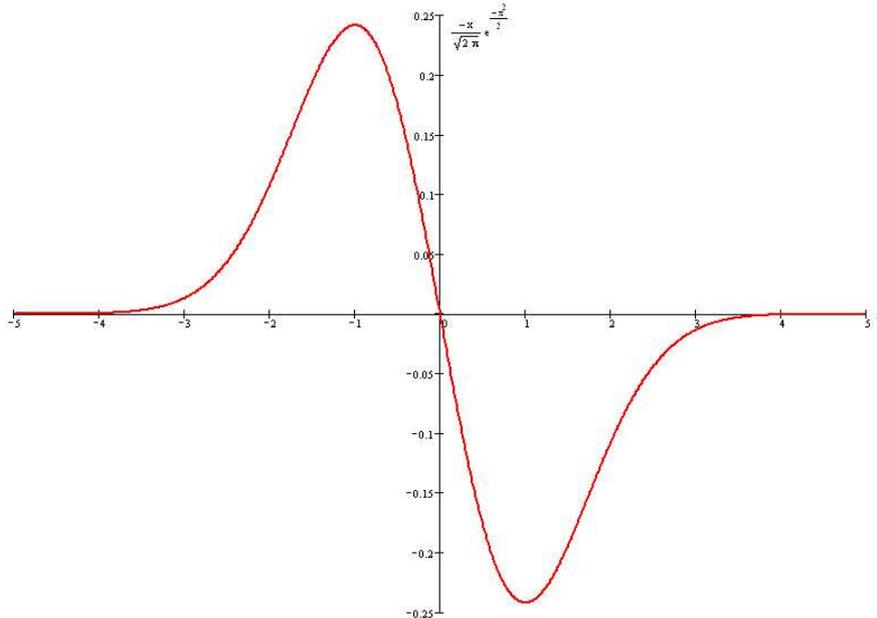


Abbildung 4: Graphische Darstellung der ersten Ableitung der normalisierten Gauß-Funktion mit dem Mittelwert $\mu = 1$ und der Standardabweichung $\sigma = 1$.

$$G''(x, \mu, \sigma) = \left(\frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} \right) \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

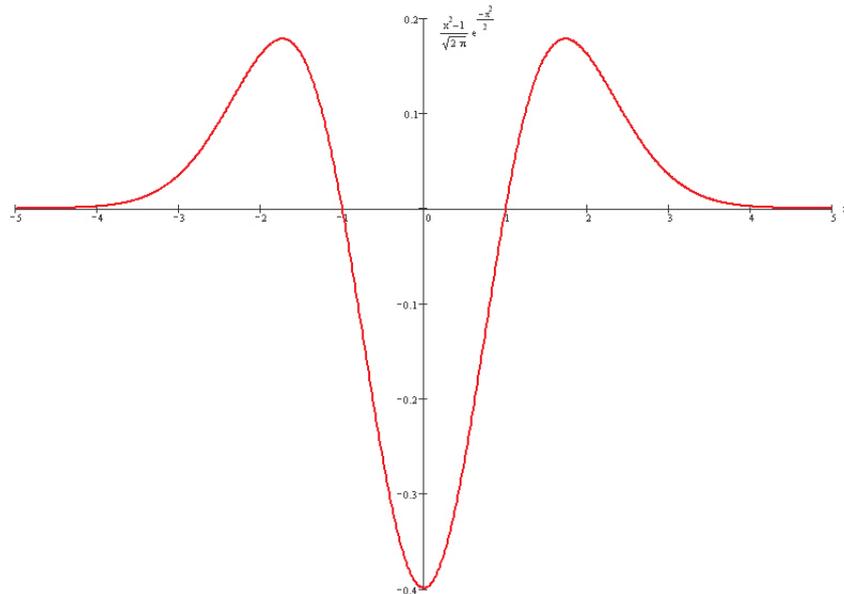


Abbildung 5: Graphische Darstellung der zweiten Ableitung der normalisierten Gauß-Funktion mit dem Mittelwert $\mu = 1$ und der Standardabweichung $\sigma = 1$.

2-D: allg.: $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right),$

$$\text{Hess } f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

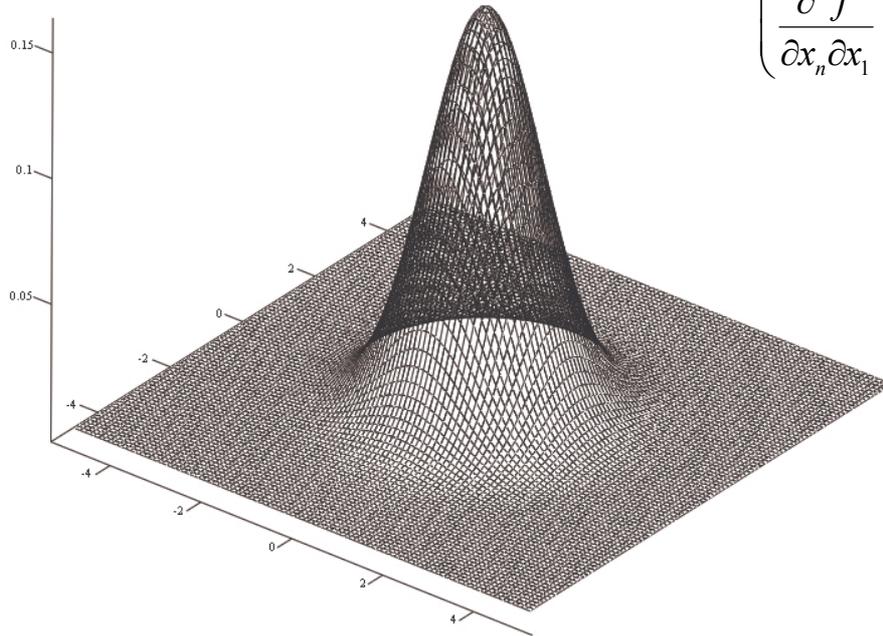


Abbildung 6: Zweidimensionale Gauß-Funktion mit $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Der Gradient (1.Ableitung) und die Hesse-Matrix (2. Ableitung) ergeben sich zu

$$\vec{\nabla} G_{2-D}(\vec{x}) = \frac{-\vec{x}}{2\pi\sigma^4} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{und}$$

$$\text{Hess } G_{2-D}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^6} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2x_1 & x_2^2 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Der Gradient ist ein Vektor, der jedem Punkt eines Skalarfeldes (hier: zweidimensionale Gauß-Funktion) die Richtung und den Betrag seines stärksten Anstiegs zuordnet.

e) Wenden Sie den Laplace-Operator Δ auf die Gauß-Funktion an.

$$\text{Gauß-Funktion in 3-D: } G(\vec{x}, \vec{\mu} = \vec{0}, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta f = \text{div grad } f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\text{Daraus folgt: } \Delta G(\vec{x}, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\sigma^2}{\sigma^4} \right) \cdot G(\vec{x}, \sigma)$$

- f) Überlegen Sie, mit wie vielen Stützstellen die 1-D Gauß-Funktion im einfachsten Fall diskretisiert werden kann. NB: Bedenken Sie dabei den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung.

Zunächst wird die Gauß-Funktion mit ihrer Standardabweichung als Schrittweite abgetastet.

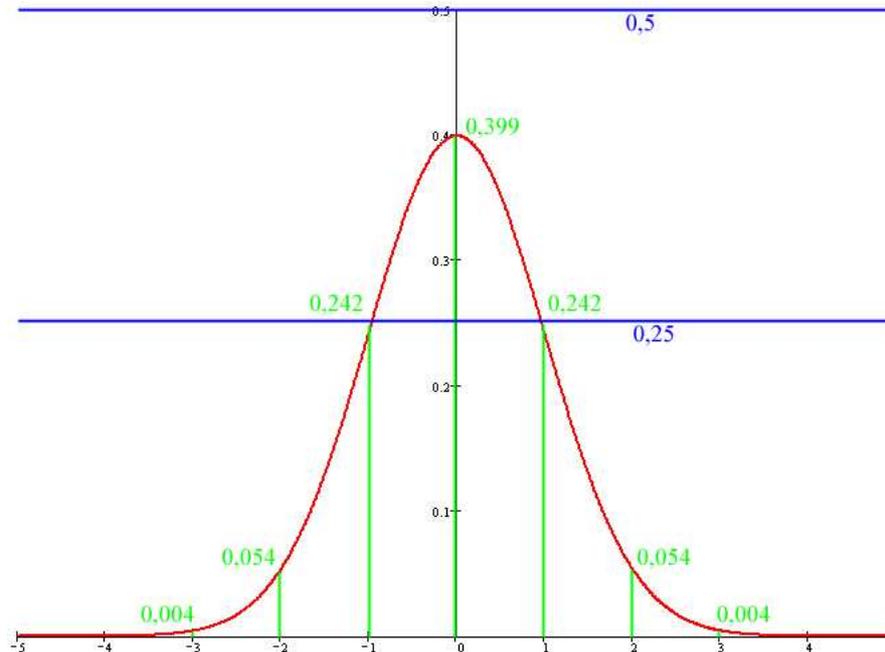


Abbildung 7: Schematische Darstellung der Diskretisierung der Gauß-Funktion mit $\mu=0$ und $\sigma=1$.

Hierbei ergeben sich folgende Werte:

| | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x_i)$ | 0,004 | 0,054 | 0,242 | 0,399 | 0,242 | 0,054 | 0,004 |

Tabelle 1: Abtastwerte der Gauß-Funktion mit $\mu=0$ und $\sigma=1$.

Um die Charakteristika der Gauß-Funktion (Maximum mit dazu symmetrischem raschem Abfall) wiedergeben zu können, müssen die (quasi-kontinuierlichen) Abtastwerte in mindestens drei Quantisierungswerte kategorisiert werden.

Hier wurden die äquidistanten Quantisierungswerte 0, 0,25 und 0,5 gewählt:

| | | | | | | | |
|------------|----|----|------|-----|------|---|---|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f_D(x_i)$ | 0 | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0 | 0 |

Tabelle 2: Diskretisierung der Gauß-Funktion mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Hierbei bleibt die Normierungseigenschaft erhalten: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_D(x_i) = 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$

Das normalerweise zur Normierung gebildete Integral konnte aufgrund der Diskretisierung als eine Summation dargestellt werden.

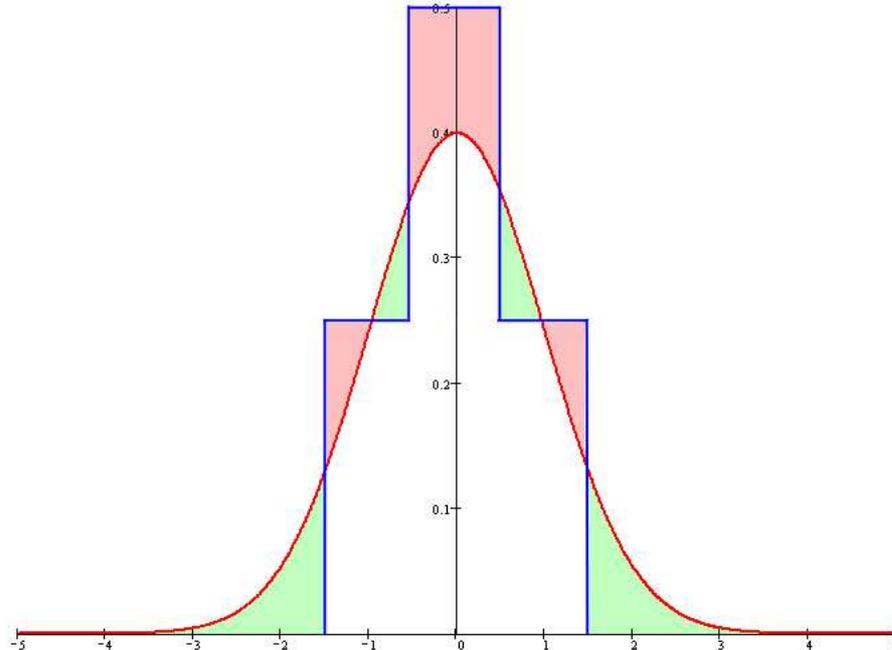


Abbildung 8: Ursprüngliche (rot) und diskretisierte (blau) Gauß-Funktion. Die Bereiche, in denen die diskretisierte Funktion zu große Werte hat, sind rötlich, diejenigen, in denen die diskretisierte Funktion zu kleine Werte hat, sind grünlich eingefärbt. Die rötlichen und grünlichen Bereiche kompensieren sich gegenseitig, so dass die Normierungseigenschaft erhalten bleibt (ohne Beweis).

- g) Wenden Sie die Differenzenoperatoren 1. und 2. Ordnung auf die von Ihnen diskretisierte Gauß-Funktion an. NB: Ein Blick in die Grundlagen der numerischen Mathematik sind dabei hilfreich.

Differenzenoperator 1. Ordnung:
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differenzenoperator 2. Ordnung:
$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} &= \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{(f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Bei den hier aufgeführten Differenzenoperatoren handelt es sich um sog. Rückwärts-Operatoren, da sie eine Links-Verschiebung hervorrufen. Die Vorwärts-Operatoren 1. und 2. Ordnung würden wie folgt aussehen:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} = \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Die folgenden Berechnungen werden unter Verwendung der Rückwärts-Operatoren durchgeführt.

| | | | | | | | |
|--|------|------|------|-------|-------|---|---|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f_D(x_i)$ | 0 | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0 | 0 |
| $\frac{\Delta f_D(x_i)}{\Delta x}$ | 0 | 0,25 | 0,25 | -0,25 | -0,25 | 0 | 0 |
| $\frac{\Delta^2 f_D(x_i)}{\Delta x^2}$ | 0,25 | 0 | -0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 0 |

Tabelle 3: Diskretisierte Gauß-Funktion $f_D(x_i)$ sowie die Funktionswerte der darauf angewandten Differenzenoperatoren 1. und 2. Ordnung. Hierbei zeigt sich die Links-Verschiebung des Symmetriepunktes aufgrund der Anwendung von Rückwärts-Operatoren.

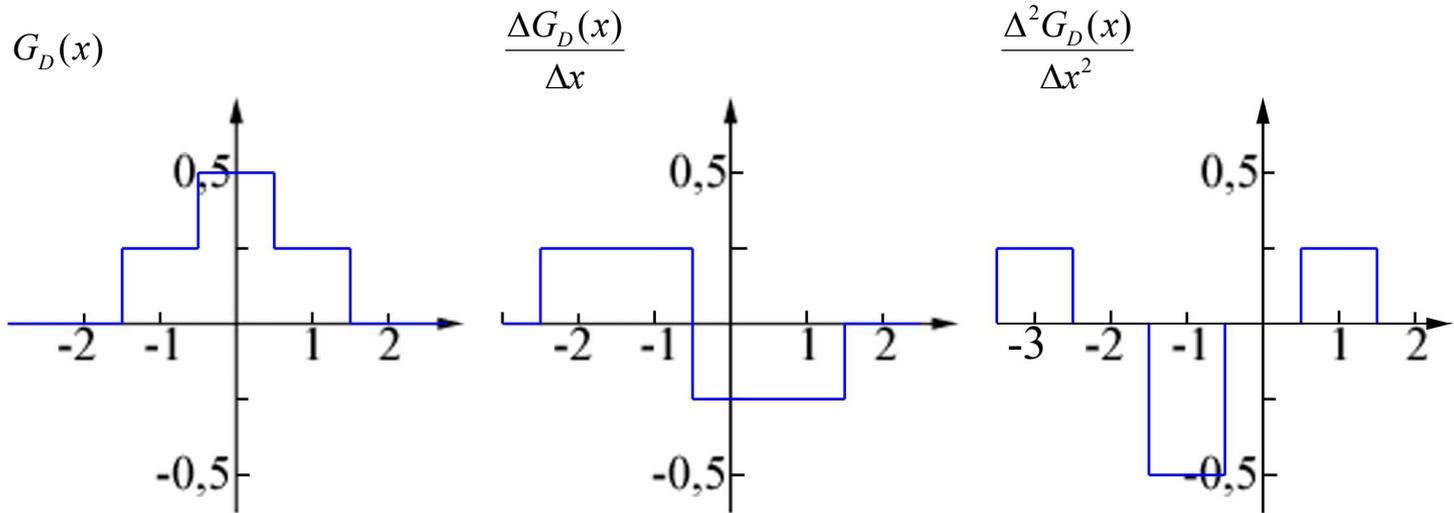


Abbildung 9: Diskretisierte Gaußfunktion (links), nach Anwendung des Differenzenoperators 1. Ordnung (Mitte) sowie nach Anwendung des Differenzenoperators 2. Ordnung (rechts). Die Linksverschiebung findet ihre Ursache in der Anwendung von Rückwärts-Operatoren.

- h) Überlegen Sie, wie die Anwendung der Differenzenoperatoren in eine einfache Summenformel gebracht werden kann. Notieren Sie dazu einen Algorithmus.

Zu berücksichtigen sind hierbei zum einen die Koeffizienten, die durch eine Binomial-Verteilung dargestellt werden können, sowie die alternierenden Vorzeichen der Summanden. Dies führt zum

Vorwärts-Operator $\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n} = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x - i \cdot \Delta x)}{\Delta x^n}$ und zum

Rückwärts-Operator $\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n} = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x + (n - i) \cdot \Delta x)}{\Delta x^n}$.

Von der Richtigkeit der angegebenen Summenformeln überzeugt man sich leicht durch Einsetzen von $n = 1$ bzw. $n = 2$ und Vergleich mit den unter g) angegebenen Operatoren oder durch vollständige Induktion.

- i) Wenden Sie die Differenzenoperatoren auf eine diskretisierte Heaviside-Funktion an und diskutieren Sie die Ergebnisse. NB: Beachten Sie die Dirichletschen Randbedingungen für die Unstetigkeitsstelle.

Die Ergebnisse lassen sich am übersichtlichsten tabellarisch darstellen:

| | | | | | | | |
|--|----|-----|-----|------|---|---|---|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $H_D(x_i)$ | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{\Delta f_D(x_i)}{\Delta x}$ | 0 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\Delta^2 f_D(x_i)}{\Delta x^2}$ | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 0 | 0 | 0 |

Tabelle 3: Diskretisierte Heaviside-Funktion $H_D(x_i)$ sowie die Funktionswerte der darauf angewandten Differenzenoperatoren 1. und 2. Ordnung. Auch hier zeigt sich die Links-Verschiebung aufgrund der Anwendung von Rückwärts-Operatoren.

Das Ergebnis entspricht (im Rahmen der Abtastung) der Erwartung. Bei stetiger Betrachtung würde die Differentiation der Heaviside-Funktion einen Dirac-Stoß an der Sprungstelle ergeben. Da hier jedoch keine instantane Unstetigkeit vorliegt, sondern sich der „Sprung“ über zwei Einheiten erstreckt, liefert auch der Differenzenoperator ein „Stoßsignal“ mit einer Pulslänge von zwei Einheiten. Man beachte: die Integrabilitätsbedingung des Dirac-Stoßes $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$ ist auch im diskretisierten Fall gültig ($0,5 + 0,5 = 1$).

Auch die zweite Ableitung entspricht dem bei stetiger Betrachtung erwarteten ungeraden Dirac-Doppelstoß.

Bei Abtastung mit geringerer Schrittweite (also höherer Abtastfrequenz) rücken die sich ergebenden Werte dichter aneinander heran. Im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ ergeben sich die oben angegebenen Funktionen aus stetiger Betrachtung (sinnvollerweise...).

- j) Wenden Sie die diskretisierte Gauß-Funktion sowie die Differenzenoperatoren auf eine durch Amplitudenschwankungen gestörte diskretisierte Heaviside-Funktion an und diskutieren Sie die Ergebnisse

| x_i | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|------|
| $H_D(x_i)$ | 0,02 | -0,1 | 0,06 | -0,01 | 0,03 | 0,04 | -0,03 | 0,52 | 1,02 | 0,97 | 1,01 | 0,98 | 1,00 | 1,02 | 0,97 |
| $\frac{\Delta H}{\Delta x}$ | -0,12 | 0,16 | -0,07 | 0,04 | 0,01 | -0,07 | 0,55 | 0,5 | -0,05 | 0,04 | -0,03 | 0,02 | 0,02 | -0,05 | --- |
| $\frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2}$ | 0,28 | 0,01 | 0,11 | -0,03 | -0,08 | 0,62 | -0,05 | -0,55 | 0,09 | -0,07 | 0,05 | 0 | -0,07 | --- | --- |
| $G_D \otimes H$ | --- | -0,03 | 0,0025 | 0,0175 | 0,0225 | 0,0200 | 0,1250 | 0,5075 | 0,8825 | 0,9925 | 0,9925 | 0,9925 | 1,000 | 1,0025 | --- |

Tabelle 4: Durch Amplitudenschwankungen gestörte diskretisierte Heaviside-Funktion, Anwendung der Differenzenoperatoren 1. und 2. Ordnung sowie der diskretisierten Gauß-Funktion auf dieselbige.

Die Amplitude des Rauschens in der diskreten Heaviside-Funktion ist relativ schwach ausgeprägt ($\sigma = 3,7\%$). Dennoch macht sich das Rauschen in der ersten ($\sigma = 13,4\%$) und zweiten ($\sigma = 20,6\%$) Ableitung stark bemerkbar (s. Abbildung 10 und 11).

Dies liegt in der Eigenschaft der ersten Ableitung, die Steigung von einem Punkt zum nächsten, bzw. der zweiten Ableitung, das Krümmungsverhalten zu beschreiben, begründet.

Die Anwendung der diskretisierten Gauß-Funktion auf die gestörte Heaviside-Funktion hat hingegen eine glättende Wirkung (vgl. Abbildung 12). Hier spiegelt sich der Tiefpaß-Charakter der Gauß-Funktion wider, demzufolge hohe Frequenzanteile (wie z.B. Rauschen) herausgefiltert werden.

NB: Die Datenpunkte in den Abbildungen 10 bis 13 wurden aus Anschaulichkeitsgründen durch Linien verbunden. Dies soll jedoch **nicht** implizieren, es handele sich um stetige Funktionen.

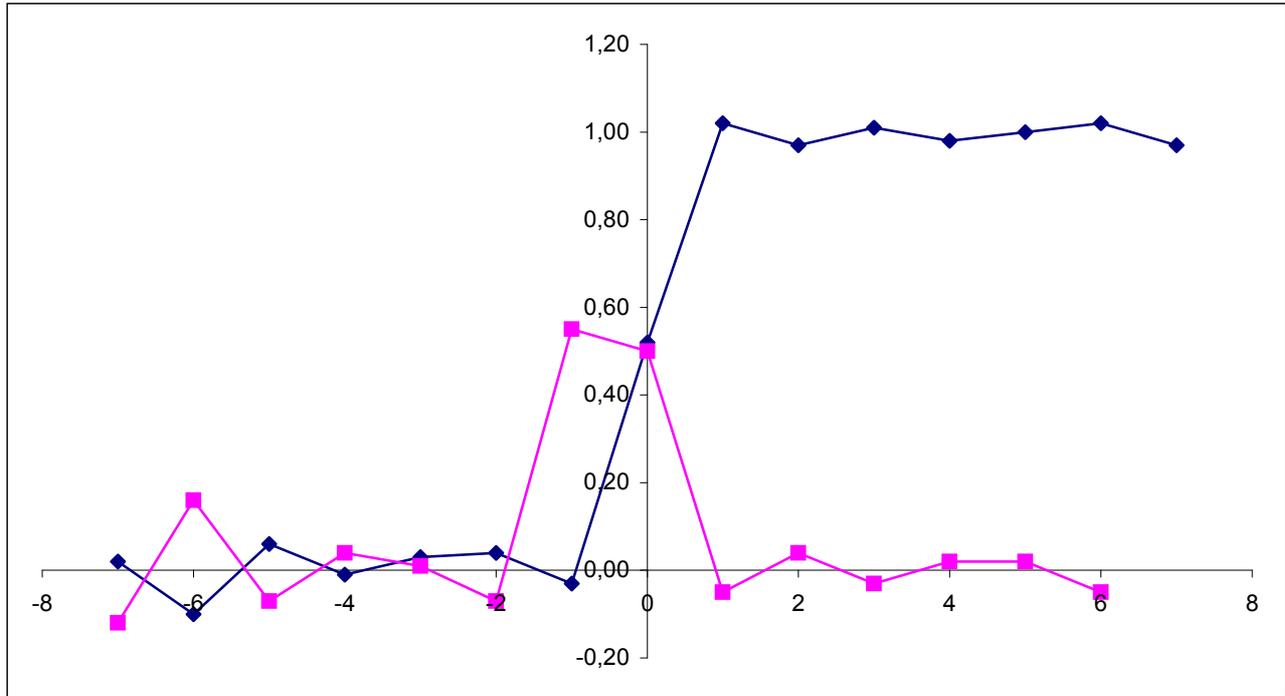


Abbildung 10: Gegenüberstellung der gestörten Heaviside-Funktion und ihrer ersten diskreten Ableitung. Das Rauschen macht sich in der Ableitung stark bemerkbar.

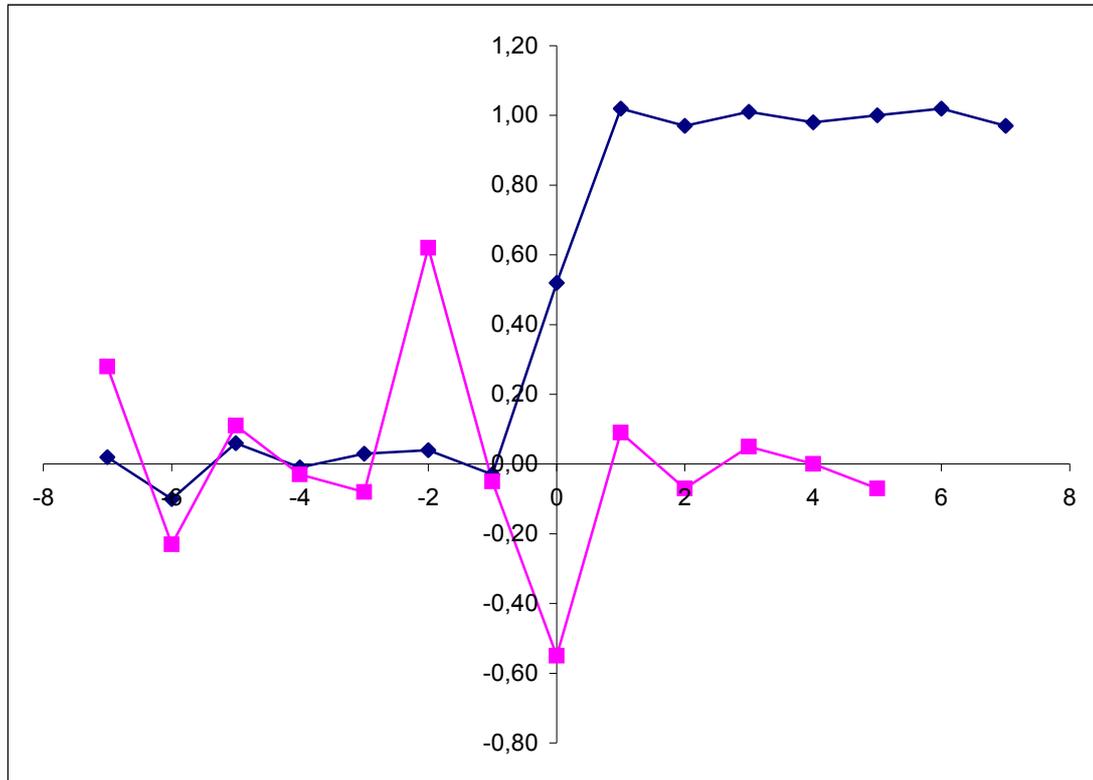


Abbildung 11: Gestörte Heaviside-Funktion und ihre zweite diskrete Ableitung. Auch in dieser verursacht die Amplitudenschwankung starke Störungen.

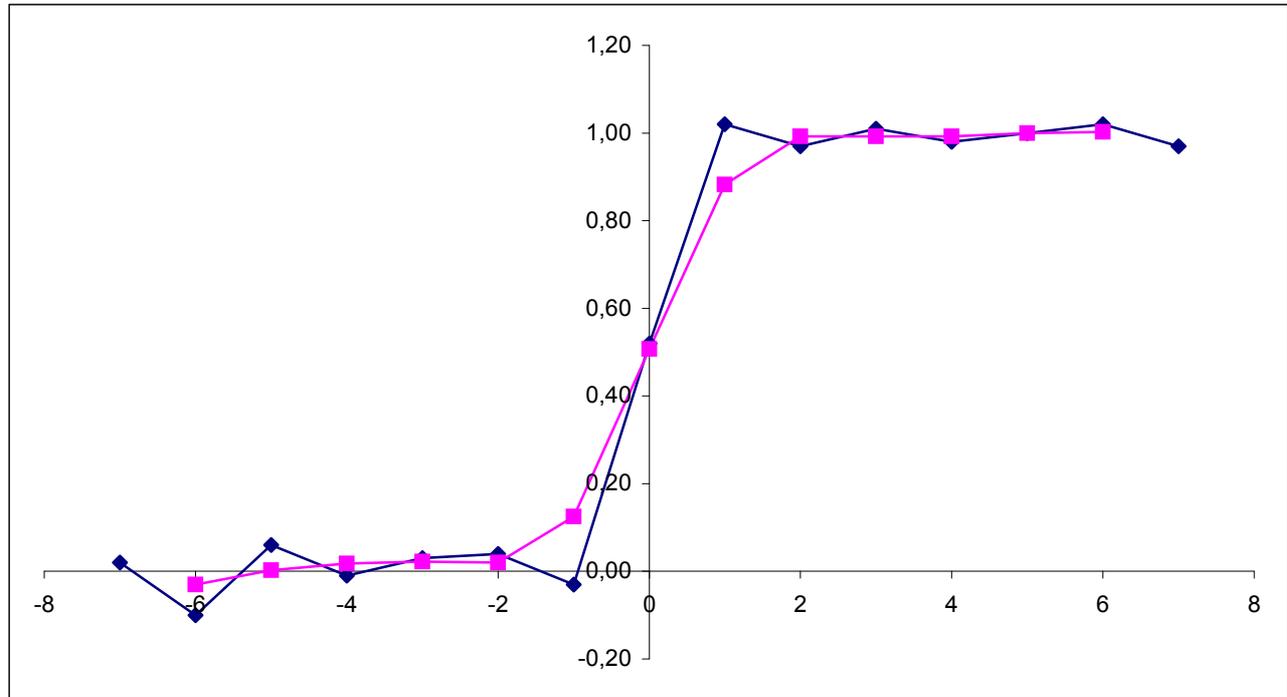


Abbildung 12: Gestörte Heaviside-Funktion (blau) und die durch Anwendung der diskretisierten Gauß-Funktion geglättete Heaviside-Funktion.

Die Anwendung der Differenzen-Operatoren 1. und 2. Ordnung kann auch auf die durch den Gauß-Operator geglättete gestörte Heaviside-Funktion vollzogen werden. Die hieraus resultierenden Ergebnisse sind in Tabelle 5 aufgeführt.

| x_i | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|
| $G_D \otimes H$ | -0,03 | 0,0025 | 0,0175 | 0,0225 | 0,0200 | 0,1250 | 0,5075 | 0,8825 | 0,9925 | 0,9925 | 0,9925 | 1,000 | 1,0025 |
| $\frac{\Delta G_D \otimes H}{\Delta x}$ | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,00 | 0,11 | 0,38 | 0,38 | 0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | --- |
| $\frac{\Delta^2 G_D \otimes H}{\Delta x^2}$ | -0,02 | -0,01 | -0,01 | 0,11 | 0,28 | -0,01 | -0,27 | -0,11 | 0,00 | 0,01 | -0,01 | --- | --- |

Tabelle 5: Durch diskreten Gauß-Operator geglättete Heaviside-Funktion sowie die Anwendung der Differenzen-Operatoren 1. und 2. Ordnung auf selbige.

Es zeigt sich (s.a. Abbildung 13), dass die Anwendung des Gauß-Operators auf die Heaviside-Funktion auch auf die diskreten Ableitungen der Funktion eine Rauschfilterung verursacht. Abweichungen vom d-Profil der 1. Ableitung bzw. dem Dirac-Doppelstoß in der zweiten Ableitung liegen in der Breite des Gauß-Operators (und damit in der Abstrakte) begründet.

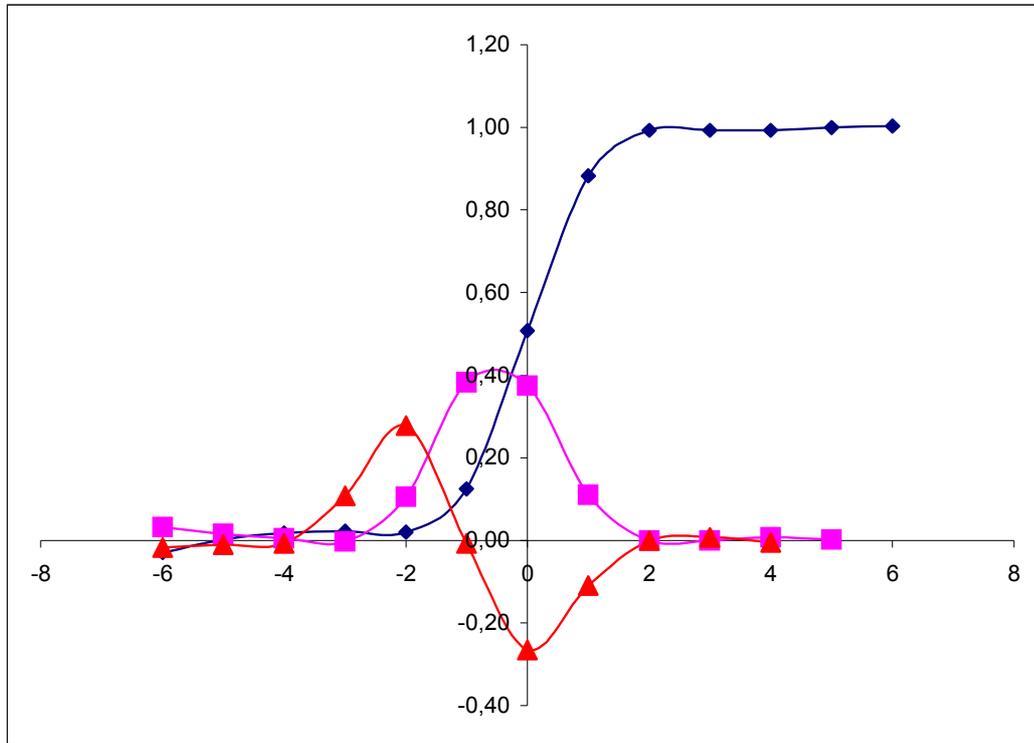


Abbildung 13: Durch diskreten Gauß-Operator geglättete Heaviside-Funktion (blau) sowie die darauf angewandten Differenzen-Operatoren 1. (violett) und 2. (rot) Ordnung. Zur Veranschaulichung sind Trendlinien hinzugefügt worden.