

# **Grundlagenveranstaltung „Systemtheorie“ WS 2006/07**

(H.S. Stiehl, AB Kognitive Systeme, FB Informatik der Universität Hamburg)

## **4. Übung für Übungsgruppen**

### **Musterlösung**

(N. Stein, Institut für Angewandte Physik, Universität Hamburg)

- a) Führen Sie eine harmonische Analyse eines ungeraden Sägezahn-Signals mit einer beliebigen Periode  $T$  durch. Verwenden Sie dazu die klassische Definition der Fourier-Reihenentwicklung.

Als periodisch fortgesetzt gedachtes ungerades Sägezahn-Signal der Periode  $T$  dient

$$s(t) = \begin{cases} s_0 \frac{2t}{T} & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & t = \pm T/2 \\ s(t - kT) & (k \in \mathbb{N}) \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{Dirichlet-Bedingung an Sprungstellen})$$

wobei die Amplitude  $s_0$  im Folgenden als 1 angenommen wird.

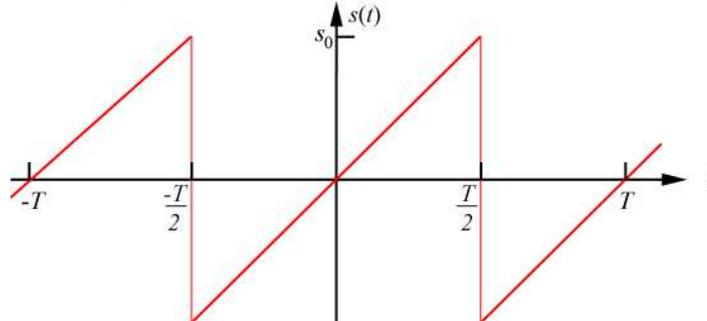


Abbildung 1: ungerades Sägezahnsignal mit beliebiger Periode  $T$  und Amplitude  $s_0$ .

Vor der eigentlichen Berechnung können generelle Überlegungen angestrengt werden, wie die Reihenentwicklung aussehen wird. Da es sich um ein ungerades (Ursprungs-symmetrisches) Signal handelt, werden in der Reihenentwicklung keine Cosinus-Terme auftreten. Weitere Überlegungen hinsichtlich der Überlagerung von Sinus-Funktionen an den Unstetigkeitsstellen weisen darauf hin, dass nur alternierende Sinus-Terme auftreten werden.

Die Fourier-Reihenentwicklung lautet:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

Die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  berechnen sich aus

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt.$$

Damit bestimmen sich die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  zu

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cdot \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{4}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{4}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt.$$

Um diese Integrale zu lösen, wird die partielle Integration verwendet.

reminder:

$$\text{partielle Integration: } \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Zunächst folgt die Lösung des Integralterms für die Berechnung der  $a_k$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt &= \left[ t \cdot \left(\frac{T}{2k\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \left(\frac{T}{2k\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\ &= \frac{T^2}{4k\pi} \left[ \sin\left(\frac{2k\pi T}{2T}\right) + \sin\left(\frac{-2k\pi T}{2T}\right) \right] - \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \left[ -\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{T^2}{4k\pi} \underbrace{\left[ \sin(k\pi) + \sin(-k\pi) \right]}_{=0} + \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \left[ \cos\left(\frac{2k\pi T}{2T}\right) - \cos\left(\frac{-2k\pi T}{2T}\right) \right] \\ &= \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \underbrace{\left[ \cos(k\pi) - \cos(-k\pi) \right]}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da der bei der Berechnung der Koeffizienten  $a_k$  auftretende Integralterme für alle  $k$  verschwindet, verschwinden auch alle  $a_k$ . Das heißt, es treten – wie erwartet – keine Cosinus-Terme in der Fourier-Reihenentwicklung auf.

Nun folgt die Lösung des Integralterms für die Berechnung der  $b_k$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt &= \left[ t \cdot \left(\frac{T}{2k\pi}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \left(\frac{T}{2k\pi}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right) dt \\
 &= \frac{-T^2}{4k\pi} \left[ \cos\left(\frac{2k\pi T}{2T}\right) + \cos\left(\frac{-2k\pi T}{2T}\right) \right] - \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{-T^2}{4k\pi} \left[ \cos(k\pi) + \cos(-k\pi) \right] + \left(\frac{T}{2k\pi}\right)^2 \underbrace{\left[ \sin(k\pi) - \sin(-k\pi) \right]}_{= 0, \text{ da } \sin(k\pi) = 0} \\
 &= -\frac{T^2}{4k\pi} \cdot 2 \cdot \cos(k\pi) \\
 &= -\frac{T^2}{2k\pi} \cdot (-1)^k = \frac{T^2}{2k\pi} \cdot (-1)^{k+1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{4}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2k\pi} (-1)^{k+1} = \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1}$$

Somit ergibt die Fourier-Reihenentwicklung

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k\pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k\pi} \cdot \sin(k\omega_0 t).$$

Wie erwartet treten ausschließlich alternierende Sinus-Terme auf.

b) Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch (Frequenzspektrum) dar.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_k$	0	0	0	0	0	0	0	0
$b_k$	---	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$-\frac{1}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$

Tabelle 1: Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  für ein ungerades Sägezahnsignal der Periode  $T$  und der Amplitude  $s_0 = 1$ .

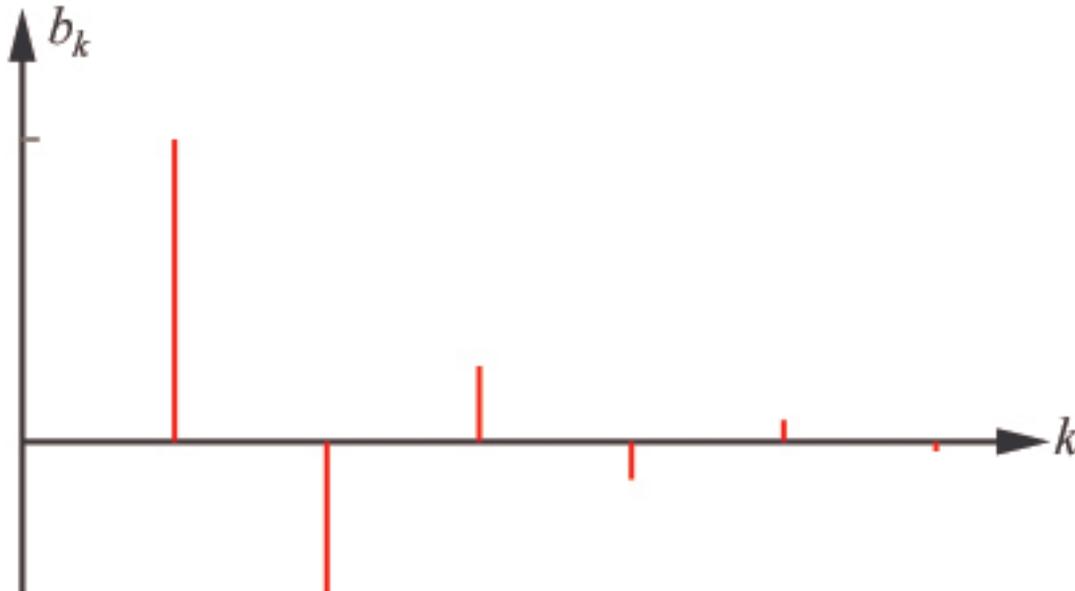


Abbildung 2: Graphische Darstellung der Fourier-Koeffizienten  $b_k$  in Abhängigkeit von  $k$ .

- c) Diskretisieren Sie das Sägezahn-Signal (mit 2 verschiedenen Abtastraten) und führen Sie eine harmonische Analyse des diskreten periodischen Signals durch. Berücksichtigen Sie bei der Diskretisierung der Unstetigkeitsstellen die Dirichletschen Bedingungen.

Zunächst wird eine Abtastung des Signals mit der Abtastrate  $4\omega_0$ , d.h. mit einem Abtastschritt

$\Delta t = \frac{T}{4}$  vorgenommen. Hierfür erhält man  $N=4$  Meßwerte in einem Entwicklungsintervall,

welches über  $r = \{r \in \mathbb{Z} \mid -n \leq r \leq n-1\}$ ,  $n = \frac{N}{2}$  läuft.

$\frac{t}{T}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$r$	-2	-1	0	1
$s_r$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Tabelle 2: Diskretisierung des Sägezahn-Signals in  $N=4$  Abtastschritten.



Die formale Notation für die diskrete Fourier-Reihenentwicklung lautet:

$$\tilde{s}(t = k \cdot \Delta t) := s_k = \sum_{m=0}^n \left[ a_m \cos\left(\frac{2k\pi m}{N}\right) + b_m \sin\left(\frac{2k\pi m}{N}\right) \right]$$

Die Koeffizienten  $a_m$  und  $b_m$  bestimmen sich hierbei zu

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_r s_r \cos\left(\frac{2m\pi r}{N}\right) \quad \text{und}$$

$$b_m = \frac{2}{N} \sum_r s_r \sin\left(\frac{2m\pi r}{N}\right)$$

Mit  $N = 4$  werden diese Ausdrücke zu

$$a_m = \frac{1}{2} \sum_{r=-2}^1 s_r \cos\left(\frac{m\pi r}{2}\right) \quad \text{und}$$

$$b_m = \frac{1}{2} \sum_{r=-2}^1 s_r \sin\left(\frac{m\pi r}{2}\right)$$

Daraus folgt für den Koeffizienten  $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{r=-2}^1 s_r \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{0 \cdot \pi \cdot r}{2}\right)}_{=1} = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Durch analoge Rechnung gelangt man zu

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 0.$$

Somit ergibt sich für die diskrete Fourier-Reihenentwicklung

$$s_k = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Mit  $t = k \cdot \Delta t$  und  $\Delta = \frac{T}{4}$  folgt  $k = \frac{4t}{T}$  und somit

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Nun erfolgt eine weitere Abtastung des Sägezahn-Signals, jedoch diesmal mit der Abtastrate

$8\omega_0$ , d.h. mit einem Abtastschritt  $\Delta t = \frac{T}{8}$ . Hierfür erhalten  $N=8$  Meßwerte in einem

Entwicklungsintervall, welches über  $r = \{r \in \mathbb{Z} \mid -n \leq r \leq n-1\}$ ,  $n = \frac{N}{2}$  läuft.

$\frac{t}{T}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$r$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$s_r$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Tabelle 3: Diskretisierung des Sägezahn-Signals in  $N=8$  Abtastschritten.

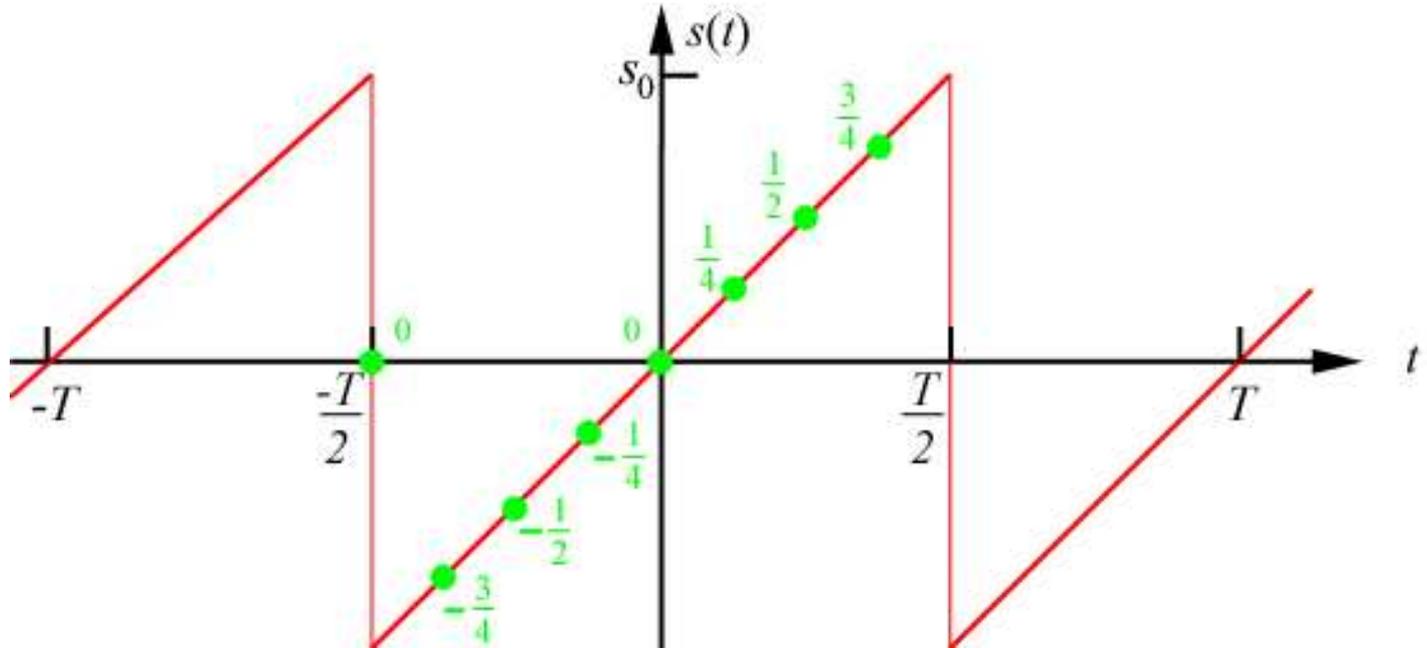


Abbildung 3: Diskretisierung des ungeraden Sägezahn-Signals mit der Abtastrate  $8\omega_0$ , d.h. mit einem Abtastschritt  $\Delta t = \frac{T}{8}$ .

Analog zu den vorherigen Rechnungen ergeben sich die Fourier-Koeffizienten zu

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad \text{und}$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}, \quad b_2 = -\frac{1}{4}, \quad b_3 = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}, \quad b_4 = 0,$$

Somit ergibt sich für die diskrete Fourier-Reihenentwicklung

$$s_k = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \cdot \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right).$$

Mit  $t = k \cdot \Delta t$  und  $\Delta = \frac{T}{8}$  folgt  $k = \frac{8t}{T}$  und somit

$$\tilde{s}(t) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \cdot \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right).$$

- d) Stellen Sie die Ergebnisse in tabellarischer Form dar und stellen Sie zusätzlich die Fundamental- und Oberschwingungen sowie ihre additive Überlagerung grafisch dar. Berechnen Sie für beide Abtastungen den mittleren quadratischen Fehler.

$m$	0	1	2
$a_m$	0	0	0
$b_m$	0	$\frac{1}{2}$	0

Tabelle 4: Fourierkoeffizienten des in  $N=4$  Abtastschritten diskretisierten Sägezahn-Signals.

$m$	0	1	2	3	4
$a_m$	0	0	0	0	0
$b_m$	0	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$	0

Tabelle 5: Fourierkoeffizienten des in  $N=8$  Abtastschritten diskretisierten Sägezahn-Signals.

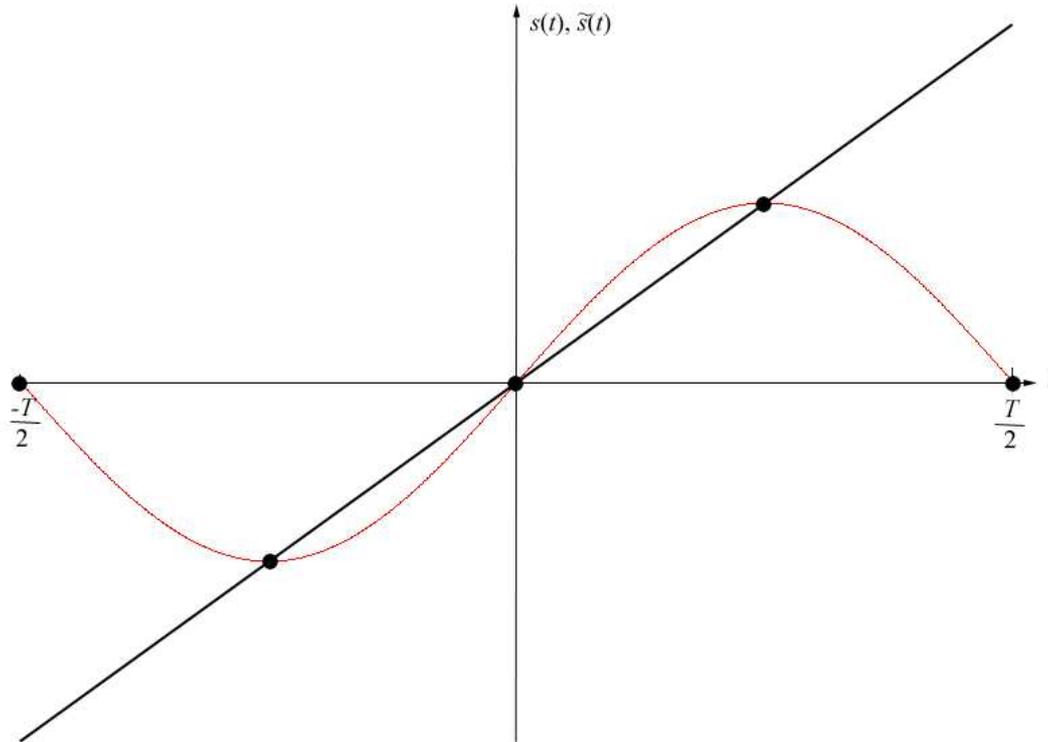


Abbildung 4: Ursprüngliches stetiges Sägezahn-Signal (schwarz) und Fourier-Reihenentwicklung (rot) für das mit 4 Abtastpunkten diskretisierte Sägezahn-Signal.

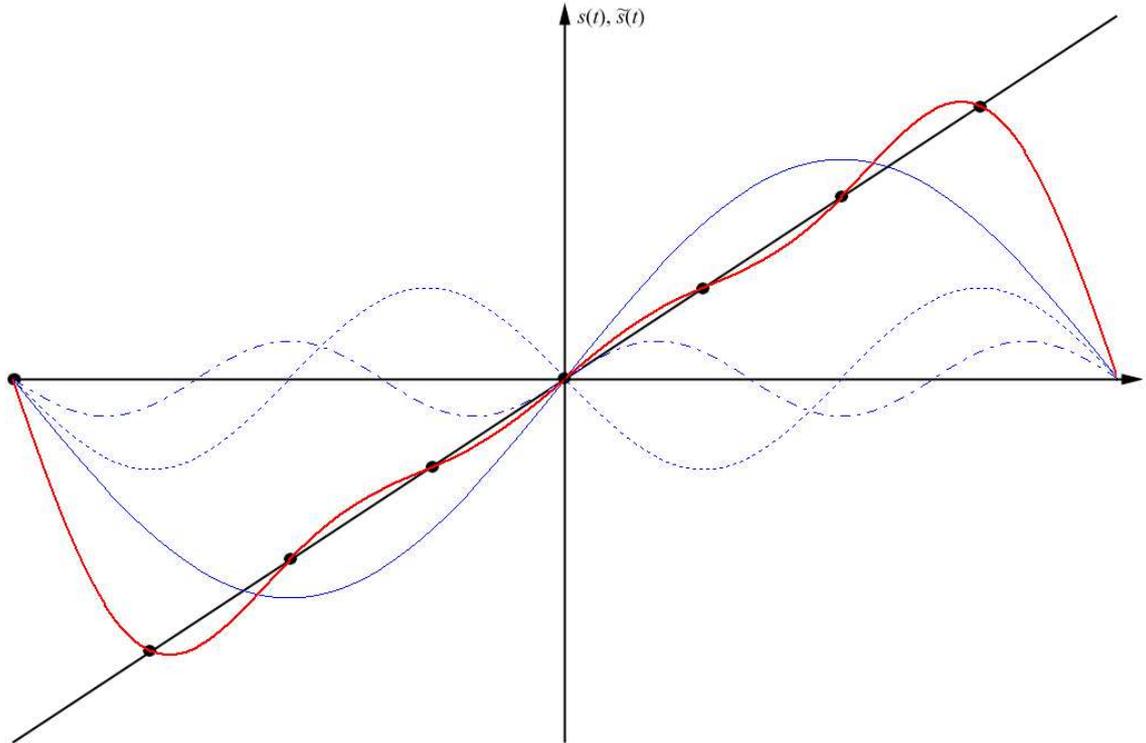


Abbildung 5: Ursprüngliches stetiges Sägezahn-Signal (schwarz), Fourier-Reihenentwicklung (rot) für das mit 8 Abtastpunkten diskretisierte Sägezahn-Signal sowie Fundamental- (blau durchgezogen) und Oberschwingungen (blau gepunktet bzw. gestrichelt).

Wie die Abbildungen 4 und 5 zeigen, verläuft das aus den diskreten Messwerten Fourier-entwickelte und daraus synthetisierte Signal durch jeden aufgenommenen Messwert. Die gewählte Abtastrate stellt die höchste in der diskreten Fourier-Reihenentwicklung vorkommende Frequenz der Oberschwingungen dar. Somit liefert die Fourier-Synthese das einfachste aus trigonometrischen Polynomen kumulierte Signal, das mit dem ursprünglichen Signal an den Abtaststellen exakt übereinstimmt.

Treten innerhalb der Periode des Signals Unstetigkeitsstellen auf, müssen die Dirichletschen Bedingungen Anwendung finden, um eine korrekte Fourier-Reihenentwicklung des Signals zu gewährleisten. Auch diese Messwerte stimmen bei dem synthetisierten Signal mit dem ursprünglichen Signal überein.

Da das ursprüngliche und das synthetisierte Signal bei abzählbar vielen Abtastwerten bis auf einer Nullmenge von Abzissenwerten (nämlich genau diesen Abtastwerten) nirgendwo exakt übereinstimmen, ist es sinnvoll, den auftretenden Fehler zu quantitativ zu erfassen. Zu erwarten ist, dass dieser mit steigender Abtastrate abnimmt.

Als Fehlermaß dient hier das Integral über das Quadrat der Differenz der zu vergleichenden Signale im betrachteten Intervall (mittleres Fehlerquadrat):

$$\delta^2(T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (s(t) - \tilde{s}(t))^2 dt .$$

Anschaulich bedeutet dies in etwa die Summation der Flächen zwischen den Funktionen. Im folgenden werden für beide Abtastraten der mittlere quadratische Fehler berechnet.

Bei einer Abtastrate von  $N = 4$  ergibt sich dieser zu

$$\begin{aligned} \delta^2(T) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \frac{2t}{T} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right)^2 dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{2t}{T}\right)^2 dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt \\ &= \frac{T}{3} - \frac{T}{\pi} + \frac{T}{8} \\ &= \frac{11\pi - 24}{24\pi} \cdot T \quad (\cong 0,14 \cdot T) \end{aligned}$$

Bei einer Abtastrate von  $N = 8$  beträgt der mittlere quadratische Fehler

$$\begin{aligned} \delta^2(T) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \frac{2t}{T} - \frac{1}{4} \left( (\sqrt{2} + 1) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + (\sqrt{2} - 1) \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) \right) \right)^2 dt \\ &= \frac{47\pi + 6\pi\sqrt{2} - 48\sqrt{2} - 88}{96\pi} \cdot T \quad (\cong 0,06 \cdot T) \end{aligned}$$

(Auf die ausführliche Lösung des Integrals wurde hier aus Platzgründen verzichtet...)

Da beide Ergebnisse von der Periodendauer  $T$  abhängig sind, ist eine Normierung auf die Energie des Signals bezogen auf die betrachtete Periode sinnvoll.

$$E_s = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{4}{T^2} \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{3} \cdot T$$

Dividiert man für die jeweilige Abtastung den mittleren quadratischen Fehler durch die Energie, so ergibt sich für

$$N = 4: \quad \frac{\delta^2}{E_s} \cong 0,4201 = 42,01\% \quad \text{und für}$$

$$N = 8: \quad \frac{\delta^2}{E_s} \cong 0,1833 = 18,33\%$$

Das heißt, dass sich der bei der Abtastung auftretende Fehler bei Verdopplung der Abtastrate mehr als halbiert hat.

- e) Führen Sie die harmonische Analyse einer geraden und um die Abzisse oszillierende Dreiecksfunktion durch. Stellen Sie die Ergebnisse in der Amplituden- und Phasenrepräsentation (Amplituden- und Phasenspektrum) und wie in d) in grafischer Form dar.

$$s(t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = s_0 \cdot \left( 1 - \frac{4 \cdot |t|}{T} \right), \quad s_0 \in \mathbb{R}$$

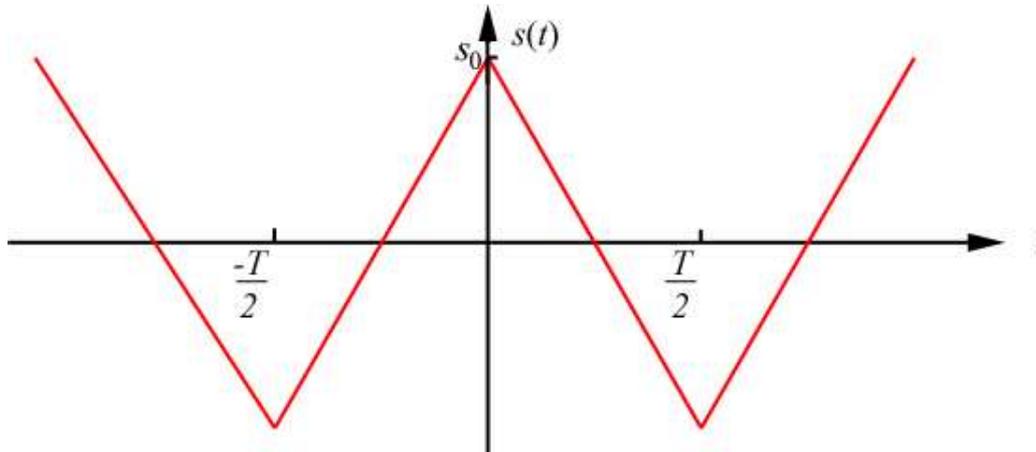


Abbildung 6: Um die Abzisse oszillierendes gerades Dreiecks-Signal mit der Amplitude  $s_0$  und der Periodendauer  $T$ .

Im folgenden wird wieder die Amplitude  $s_0 = 1$  angenommen.

Da es sich um ein gerades Signal handelt, werden in der Fourier-Reihenentwicklung keine Sinus-Terme erwartet. Da das Signal keine Unstetigkeitsstellen aufweist, kann man von einer schnellen Konvergenz der Reihenentwicklung an das eigentliche Signal ausgehen.

Die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4|t|}{T}\right) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt - 2 \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4t}{T} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[ 0 - \frac{2 \cdot (\cos(k\pi) - 1)}{k^2 \pi^2} \cdot T \right] \\
 &= \frac{4(1 - \cos(k\pi))}{k^2 \pi^2} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{8}{k^2 \pi^2}, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4|t|}{T}\right) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4|t|}{T} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} [0 - 0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_k$	0	$\frac{8}{\pi^2}$	0	$\frac{8}{9\pi^2}$	0	$\frac{8}{25\pi^2}$	0	$\frac{8}{49\pi^2}$
$b_k$	---	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 6: Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  für ein gerades Dreieck-Signal der Periode  $T$  und der Amplitude  $s_0 = 1$ .

Um die Fourier-Reihenentwicklung in der Amplituden- und Phasenrepräsentation darzustellen, werden ausgehend von der Koeffizienten-Darstellung die Amplituden  $R_k$  und die Phasen  $\Phi_k$  wie folgt berechnet:

$$R_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \Phi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$R_k$	0	$\frac{8}{\pi^2}$	0	$\frac{8}{9\pi^2}$	0	$\frac{8}{25\pi^2}$	0	$\frac{8}{49\pi^2}$
$\Phi_k$	---	0	---	0	---	0	---	0

Tabelle 7: Amplituden- und Phasenrepräsentation  $R_k$  und  $\Phi_k$  für ein gerades Dreieck-Signal der Periode  $T$  und der Amplitude  $s_0 = 1$ .

Da in der Fourier-Reihenentwicklung nur Cosinus-Terme auftreten, gibt es keine Phasenverschiebung und die Amplituden- und Phasenrepräsentation ist der Koeffizientendarstellung sehr ähnlich.

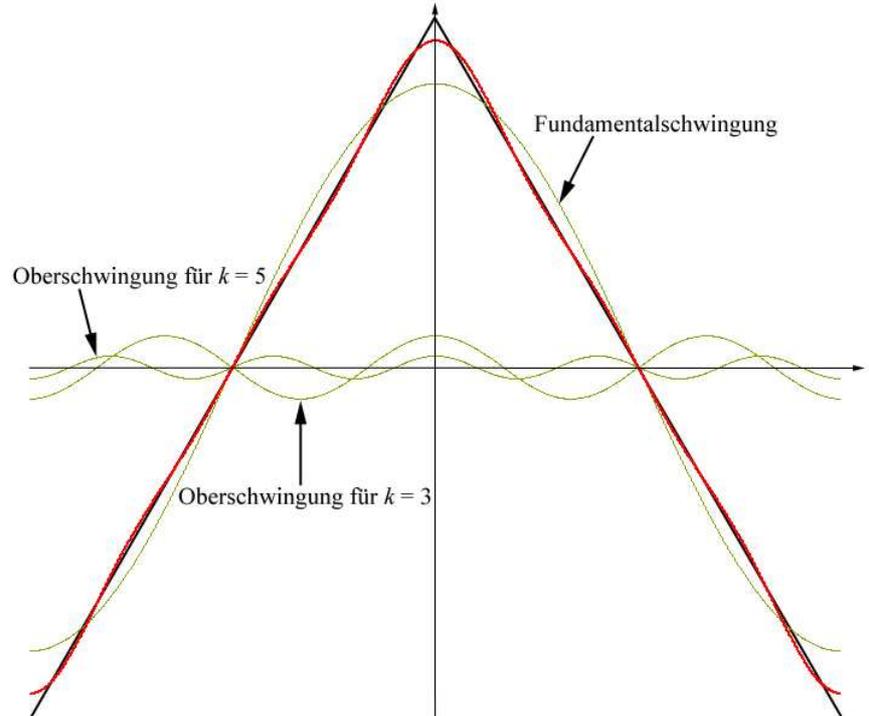


Abbildung 7: Ursprüngliches gerades Dreieck-Signal (schwarz), Fundamental- und Oberschwingungen (grün) der dazugehörigen Fourier-Analyse bis  $k = 5$  und daraus resultierende additive Überlagerung (rot).

Wie in Abbildung 7 zu erkennen, ist bereits die Fundamentalschwingung in guter Näherung zur Ausgangsfunktion. Überlagert man Korrekturterme 1. und 2. Ordnung (für  $k=3$  und  $k=5$ ) additiv, so weicht die resultierende Funktion nur noch unmerklich vom Dreieck-Signal ab. Lediglich für eine bessere Näherung an den Indifferenzierbarkeitsstellen sind Korrekturterme höherer Ordnung erforderlich.

Qualitativ lässt sich das Konvergenzverhalten der endlichen Fourier-Synthese in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Koeffizienten daran festmachen, dass die Koeffizienten proportional zu  $\frac{1}{k^2}$  abfallen. Betrachtet man die Stellen konstruktiver Interferenz der Grund- und

Oberschwingungen (diese liegen bei  $t = n \cdot \frac{T}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), und vergleicht den Betrag der

überlagerten Amplituden mit der Amplitude des analysierten Signals  $s_0 = 1$ , so zeigt sich relativ einsichtig, dass ein schnelles Konvergenzverhalten vorliegt.

$n$	1	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{\sum_{k=0}^n a_k}{s_0}$	81,06 %	90,06%	93,31%	94,96%	95,96%	96,63%	97,11%	97,47%

Tabelle 8: Annäherung der Amplitude der Fourier-Synthese an die Amplitude des Ausgangssignals.

Eine quantitative Beschreibung des Konvergenzverhaltens folgt aus der Betrachtung des mittleren quadratischen Fehlerintegrals. Die jeweiligen Werte bezüglich einer endlichen Fourier-Synthese unter Berücksichtigung der Koeffizienten mit der Indizierung  $k \leq n$  an sich, sowie die auf die Energie des Signals ( $E_s = \frac{1}{3}T$ ) in der betrachteten Periode normierten Werte finden sich in Tabelle 9.

$n$	1	3	5	7
$\delta_n^2$	$\frac{\pi^4 - 95}{6\pi^4} \cdot T$	$\frac{27\pi^4 - 2624}{162\pi^4} \cdot T$	$\frac{16875\pi^4 - 1642592}{101250\pi^4} \cdot T$	$\frac{40516875\pi^4 - 3945483392}{243101250\pi^4} \cdot T$
$\frac{\delta_n^2}{E_s}$	0,72%	0,11%	0,04%	0,02%

Tabelle 9: Mittleres Fehlerquadrat für das durch abbrechende Fourier-Synthese approximiertes Dreieck-Signal

Deutlich ist zu erkennen, dass der mittlere quadratische Fehler bereits unter Berücksichtigung lediglich des ersten von Null verschiedenen Fourier-Koeffizienten unterhalb von 1% liegt.

- f) Führen Sie für das Sägezahn-Signal eine harmonische Analyse mittels der komplexen Fourierreihe durch und stellen Sie das Betrags- und Phasenspektrum dar.

$$s(t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{2 \cdot t}{T}$$

Die komplexe Fourier-Reihenentwicklung lautet

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cdot \exp\left(j \frac{2\pi m t}{T}\right),$$

$$\text{mit } c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi m t}{T}\right) dt$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten  $c_m$  :

$$\begin{aligned}
 c_m &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi mt}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi mt}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T^2} \left[ \left[ t \cdot \frac{j \cdot T}{2\pi m} \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi mt}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \frac{j \cdot T}{2\pi m} \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi mt}{T}\right) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T^2} \left[ \left[ \frac{j \cdot T^2}{4\pi m} \cdot \exp(-jm\pi) + \frac{j \cdot T^2}{4\pi m} \cdot \exp(jm\pi) \right] - \left[ \left( \frac{j \cdot T}{2\pi m} \right)^2 \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi mt}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right] \\
 &= \frac{2}{T^2} \left[ \left[ \frac{j \cdot T^2}{4\pi m} \cdot (\exp(-jm\pi) + \exp(jm\pi)) \right] - \left[ \frac{-T^2}{4\pi^2 m^2} \cdot (\exp(-jm\pi) - \exp(jm\pi)) \right] \right] \\
 &= \frac{j}{2\pi m} \left( (-1)^{-m} + (-1)^m \right) + \frac{1}{2\pi^2 m^2} \underbrace{\left( (-1)^{-m} - (-1)^m \right)}_{= 0}
 \end{aligned}$$

$$c_m = \frac{j}{m\pi}(-1)^m, \quad m \neq 0$$

Für den Fall  $m = 0$  ist eine gesonderte Betrachtung notwendig:

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{j \cdot 0 \cdot 2\pi t}{T}\right)}_{=1} dt = \frac{4}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt = \frac{4}{T^2} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T^2} \left[ \frac{T^2}{8} - \frac{T^2}{8} \right] = 0.$$

Somit ergibt sich für die komplexe Fourier-Reihenentwicklung

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j}{m\pi}(-1)^m \cdot \exp(jm\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Für die Darstellung in Amplituden- und Phasenrepräsentation werden nun die Amplituden  $R_m$  und die Phasen  $\Phi_m$  berechnet. Die Amplituden berechnen sich hierbei aus dem Betrag der komplexen Fourier-Koeffizienten. Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Daraus folgt für

$$R_m = |c_m| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{m\pi}(-1)^m\right)^2} = \frac{1}{m\pi}.$$

Die Phasen  $\Phi_m$  entsprechen dem jeweiligen Winkel  $\varphi$  der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_m$  in Polardarstellung (vgl. Exkurs: komplexe Zahlen). Der Winkel einer komplexen Zahl in Polardarstellung ergibt sich aus

$$\varphi(z) = -\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right).$$

Da der Realteil der komplexen Fourier-Koeffizienten gleich Null ist, muss für die Berechnung der Phasen eine Grenzwert-Betrachtung durchgeführt werden. Dann ist

$$\Phi_m = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\arctan\left(\frac{(-1)^m}{m\pi x}\right) \right) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \left( (-1)^{m+1} \arctan(x') \right) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{für } m \text{ ungerade} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases}$$

Somit wird die Fourier-Reihe in der Amplituden- und Phasenrepräsentation zu

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \cdot \exp\left(j \cdot (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(jm\omega_0 t), \quad m \neq 0.$$

Für  $m = 0$  ergab sich der Koeffizient  $c_m = 0$ , so dass dieser in der Summation nicht berücksichtigt werden muss.

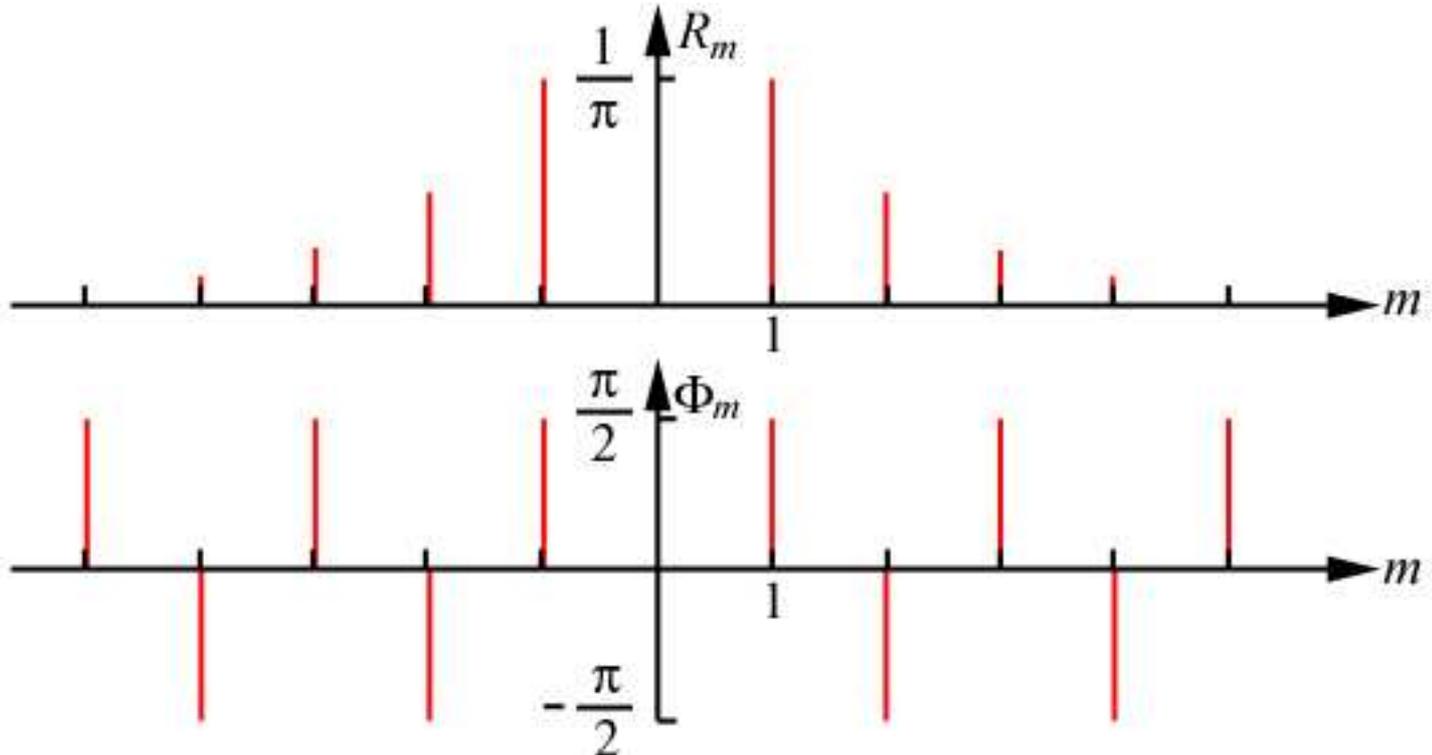


Abbildung 8: Amplituden- (oben) und Phasen- (unten) Repräsentation des ungeraden Sägezahn-Signals. Das alternierende Vorzeichen im Phasendiagramm stellt die unter a) berechneten alternierenden Sinussignale dar.

Anschaulich zeigt sich an der Amplituden- und Phasenrepräsentation (s. Abbildung 8) die Äquivalenz des Resultates der klassischen (s. a)) und der komplexen Fourier-Reihenentwicklung. Die alternierenden Sinus-Terme sind im Phasendiagramm dargestellt. Der Unterschied der Amplituden um den Faktor 2 wird einsichtig, wenn man bedenkt, dass bei der klassischen Reihenentwicklung von 1 bis  $\infty$ , bei der komplexen jedoch von  $-\infty$  bis  $\infty$ . Somit treten hier doppelt so viele Koeffizienten auf, die jedoch den jeweils halbierten Betrag aufweisen. Rechnerisch lässt sich die Äquivalenz ausgehend von den komplexen Koeffizienten wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j}{m\pi} \underbrace{(-1)^m}_{=j^2} \cdot \exp(jm\omega_0 t) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^{2m+1}}{m\pi} \cdot (\cos(m\omega_0 t) + j \sin(m\omega_0 t)) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^{2m+1}}{m\pi} \cdot \cos(m\omega_0 t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^{2m+2}}{m\pi} \cdot \sin(m\omega_0 t) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{j^{2m+1}}{m\pi} + \frac{j^{-2m+1}}{-m\pi} \right) \cdot \cos(m\omega_0 t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} \cdot \sin(m\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(j^{2m+1} + j^{-2m-1})}_{=0} \cdot \frac{\cos(m\omega_0 t)}{m\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} \cdot \sin(m\omega_0 t) + \frac{(-1)^{-m+1}}{-m\pi} \cdot \sin(-m\omega_0 t) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{2}{m\pi} \cdot \sin(m\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem unter a) errechneten Ergebnis bestätigt (unter Umbenennung der Variablen  $k := m$ ) die Äquivalenz:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k\pi} \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

q.e.d.