

Bericht Nr. 90

Symbolische Beschreibung von Bildfolgen I:
Relationengebilde und Morphismen

B. Radig

IfI-HH-B-90/82

Juni 1982

Fachbereich Informatik
Universität Hamburg
Schlüterstraße 70
D-2000 Hamburg 13

Kurzfassung

Kurzfassung

Relationengebilde sind ein formales Mittel, um vielfältige Beziehungen zwischen Objekten auszudrücken. Bei der automatischen Analyse von Folgen digitisierter Bilder durch eine Datenverarbeitungsanlage werden Objekte als symbolische Beschreibung der Bilder erzeugt. Relationen spezifizieren diese Bildsymbole, drücken ihre geometrischen oder hierarchischen Beziehungen aus, zeigen ihre Verbindung zu prototypischen Modellen an und verknüpfen korrespondierende Symbole von Bild zu Bild. Eine zentrale Rolle bei der Analyse spielen Abbildungen zwischen Modell- und Bildstrukturen sowie zwischen Strukturen aus verschiedenen Bildern einer Folge. Diese Arbeit untersucht einige Möglichkeiten der Repräsentation von visueller Information durch Relationengebilde und der Berechnung der benötigten Abbildungen zwischen solchen Gebilden.

Abstract

Relational structures are an appropriate formalism to express relationships between objects which are generated as symbolic descriptors of digitized images in course of the automatic analysis of image sequences. Relations specify the image symbols, express their geometrical or hierarchical relationships, connect them with prototype models, and establish their correspondence between different images of a sequence. Mappings between image and model structures as well as image and image structures are essential for the analysis of sequences. Some variations of representing visual information by relational structures and of computing mappings between relational structures are discussed.

1. Einführung

2. Repräsentation der Bildfolgen-Information
 - 2.1 Merkmale von Bildsymbolen
 - 2.1.1 Merkmalsvektoren
 - 2.1.2 Strukturierung der Trägermenge
 - 2.1.3 Strukturierung der Relationen
 - 2.1.4 Uniforme Darstellung
 - 2.1.5 Merkmalsfunktionen
 - 2.1.6 Umwandlung der Merkmalsrelative
 - 2.1.7 Verallgemeinerung
 - 2.1.8 Inverse Merkmalsrelationen

 - 2.2 Beziehungen zwischen Symbolen eines Bildes
 - 2.2.1 Zusammenhangs-Beziehungen
 - 2.2.2 Redundante Relationen
 - 2.2.3 Isomorphe Relative
 - 2.2.4 Andere Zusammenhangs-Beziehungen und Symbolarten
 - 2.2.5 Vereinheitlichung der Relationen
 - 2.2.6 Vielstellige Zusammenhangs-Relationen
 - 2.2.7 Lagebeziehungen
 - 2.2.8 Bewertete Beziehungen

 - 2.3 Hierarchie, Inkarnation und Korrespondenz
 - 2.3.1 Hierarchie
 - 2.3.2 Inkarnationen
 - 2.3.3 Korrespondenz
 - 2.3.4 Korrespondenz zwischen Bildsymbolen
 - 2.3.5 Korrespondenz zwischen Inkarnationen
 - 2.3.6 Korrespondenz zwischen Modellen

 - 2.4 Interpretations-Strategien

3. Vergleich von Strukturen

3.1 Taxonomie der R-Morphismen

3.1.1 Bewertete und maximale R-Morphismen

3.1.2 Allgemeiner R-Morphismus

3.1.3 R-Homomorphismus und R-Monomorphismus

3.1.4 R-Isomorphismus, R-Automorphismus und R-Komorphismus

3.2 Erzeugen der R-Morphismen

3.2.1 Kombinatorische Erzeugung

3.2.2 Cliquenalgorithmus

3.2.3 Erzeugen ausgewählter R-Morphismen

3.2.4 Erzeugen der besten R-Morphismen

3.2.5 Parallele Erzeugung der R-Morphismen

3.3 Hierarchische Synthese

4. Resumee

5. Definitionen

6. Literaturverzeichnis

Kapitel 1

EINFÜHRUNG

Bildsymbole sind abstrakte Einheiten, die mit Merkmalen versehen sind und die mit anderen Bildsymbolen in Beziehung treten können. Sie repräsentieren in der Weise ein Bild, daß ihre Merkmale und Beziehungen aus der Bildfunktion - etwa der Verteilung der Lichtintensität auf einer Projektionsfläche - abgeleitet sind. Zu Bildsymbolen, die mehrere Bilder einer Folge repräsentieren, tragen mehrere Bildfunktionen bei. Solche Bildsymbole können mit ihren Merkmalen und Beziehungen die zeitliche Entwicklung in aufeinanderfolgenden Momentaufnahmen, Volumenelemente in einer räumlichen Folge von Schnittbildern oder sogar die Veränderung dieser Volumenelemente mit der Zeit beschreiben. Die automatische Berechnung von numerischen Attributen für Merkmale und Beziehungen auf einer Datenverarbeitungsanlage setzt eine Digitisierung der Bildfunktion voraus. Semantische Bilddeutung oder Bildverstehen ('semantic picture recognition', 'image understanding') sind Aufgaben, zu deren Bewältigung eine symbolische Bildbeschreibung unerläßlich ist. Die dazu notwendigen Repräsentationsstrukturen und die notwendigen Operationen wurden zuerst nur informell angegeben [GUZMAN71], [BAIRD+KELLY74]. Formalere Vorstellungen und Anwendungen für sichtgesteuerte Manipulatoren entwickelte eine Gruppe der Universität Edinburgh [BARROW+POPPELSTONE71], [BARROW+72], [AMBLER+75].

Der Wunsch, das gut ausgearbeitete Instrumentarium der Beschreibung von Sprache durch Grammatiken benutzen zu können, führte zur Entwicklung der syntaktischen Analyse von Bildern, wobei die Terminale der Sprache wiederum Bildsymbole sind ([FU81] und die dort zitierte Literatur).

Eine andere Entwicklung ging in Richtung von Expertensystemen für die Bildauswertung, die interne Modelle ihrer sensorisch erfaßten Außenwelt aufbauen [HANSON+RISEMAN78c], [BAUMANN81], [BINFORD81]. Eine Analyse von Bildfolgen ist ohne den Vergleich von Bildsymbolen nur für einen eingeschränkten Anwendungsbereich möglich; Nagel gibt eine Übersicht, die mit mehr als 500 Literaturhinweisen ausgestattet ist [NAGEL81]. Beispielsweise ist die dreidimensionale Rekonstruktion von Gegenständen aus Projektionen mehrerer Ansichten nicht möglich ohne Bildsymbole, die als Merkmale Koordinaten von ausgewählten Punkten der zweidimensionalen Projektionen tragen ([NEUMANN81] und die dort zitierte Literatur). Diese Aufgabenstellung enthält typische Teilprobleme der symbolischen Auswertung von Bildfolgen. Aus den einzelnen Bildern werden Symbole berechnet, von Bild zu Bild muß die Korrespondenz zwischen den Symbolen hergestellt werden und es müssen Symbole erzeugt werden, die die dreidimensionale Gestalt der beobachteten Objekte repräsentieren. In [RADIG81c] sind die Symbole, die Informationen über eine Bildfolge enthalten, Sequenzen von automatisch bestimmten Bildausschnitten, die Projektionen von sich bewegenden Objekten enthalten.

In der vorliegenden Arbeit wird vorgeschlagen, Symbole mit ihren Merkmalen und Beziehungen durch Relationengebilde formal zu beschreiben. (Die Definitionen für die wichtigsten mathematischen Begriffe sind in Kapitel 5 zusammengestellt.) In Kapitel 2 werden ausgehend von der Symbolbeschreibung durch Merkmalsvektoren Relationengebilde entwickelt, die sowohl die Beziehung zwischen Symbolen ausdrücken als auch die Symbole hierarchisch gruppieren und weiterhin prototypische Objekte sowie deren Inkarnationen repräsentieren können. Hierbei wird die Variationsbreite einer solchen relationalen Beschreibung dargestellt, die über bisher verwendete, eingeschränkte Relationalstrukturen hinausgeht (siehe hierzu die kurze Übersicht in [CHENG+HUANG80]).

Das dritte Kapitel beantwortet die Frage, ob es trotz der formal sehr allgemeinen Repräsentation bildbeschreibender Symbole möglich ist, Symbole aus verschiedenen Bildern oder Symbole aus Bildern und solchen, die Prototypen konstituieren, einander effizient zuzuordnen. Solch eine Zuordnung ist ein Werkzeug zur Bilddeutung und zur Lösung des Korrespondenzproblems. Es wird ein Verfahren angegeben, daß die beste Übereinstimmung zweier Relationengebilde, die typischerweise zwei Bilder oder ein Bild und Prototypen von Gegenständen oder Szenen repräsentieren, findet, ohne die Variationsbreite der verwendeten Relationengebilde wieder einschränken zu müssen. Das Verfahren orientiert sich an Methoden der Graph-Isomorphie und erweitert dabei die Anwendbarkeit solcher Methoden auf allgemeine Morphismen zwischen Relationengebilden (R-Morphismen). Dabei wird der Begriff des R-Komorphismus eingeführt, der die Abbildung zwischen gemeinsamen, übereinstimmenden Teilstrukturen zweier Relationengebilde definiert. Bei der Entwicklung des Verfahrens wurden Lösungen für Teilprobleme berücksichtigt (aus experimentellen Systemen von [AMBLER+73], [FISCHLER+ELSCHLAGER73], [TURNER74], [BOLLES79], [JACOBUS+80], [CHENG+HUANG80] und theoretische Untersuchungen von [JOHNSTON76], [HARALICK78], [HARALICK+SHAPIRO79,80], [CHENG+HUANG81], [SHAPIRO+HARALICK81]).

Der hier vorgestellte Ansatz rundet eine konzeptionelle und experimentelle Entwicklung ab, die der Autor seit 1977 in verschiedenen Publikationen dokumentiert hat. Die erfolgreiche Entkopplung der Repräsentation von Bildinhalten von dem Vergleich der Bilder durch die Suche nach gemeinsamen Teilstrukturen könnte das hier ausgebreitete Instrumentarium zu einem geeigneten Werkzeug für die Analyse von Bildfolgen machen.

Kapitel 2

REPRÄSENTATION DER BILDFOLGEN-INFORMATION

Relationen verknüpfen Elemente aus Mengen miteinander. Die über Relationen getroffene Zuordnung von Elementen zueinander ist, wie im folgenden gezeigt wird, als Ausdrucksmittel genügend mächtig, um Bildsymbole zu kennzeichnen und deren Beziehungen untereinander darzustellen. Die spezielle Einschränkung auf Relationen mit bestimmten mathematischen Eigenschaften und ihre Zusammenstellung zu Relationengebilden (siehe Definition 1) machen die Unterschiede zwischen verschiedenen Repräsentationsweisen aus. Mit Hilfe eines Relationengebildes lassen sich mehrere Relationen zu einer Struktur zusammenfassen und somit verschiedene Aspekte von Bildsymbolen ausdrücken.

2.1 MERKMALE VON BILDSYMBOLEN

Ein Aspekt ist die Beschreibung der Merkmale eines Bildsymbols. Als Beispiel sei eine "Region" als typisches Bildsymbol gewählt. Eine Region stellt einen zusammenhängenden Ausschnitt der Bildmatrix dar. Sie wird üblicherweise durch solche Merkmale wie

- Regionsnummer n
- Fläche f
- Koordinaten des umschreibenden Rechtecks u_1, u_2, u_3, u_4
- Schwerpunktskoordinaten s_1, s_2
- mittlerer Intensitätswert i

und ähnliche beschrieben [BARTELS+81].

2.1.1 Merkmalsvektoren

Vereinbaren wir als Trägermenge M eine geeignete, zum Beispiel durch ihre Kodierbarkeit in einer Datenverarbeitungsanlage ausgewählte Teilmenge der ganzen oder reellen Zahlen, so können wir die Menge der Regionen in einem Bild durch das Relativ (siehe Definition 1)

$$(1) \quad G = [M, \{r = (n, f, u_1, u_2, u_3, u_4, s_1, s_2, i)\}]$$

ausdrücken. Die Komponenten der 9-Tupel sind Elemente von M und haben die oben angegebene Bedeutung. Die Menge der Regionen $R = \{r\}$ ist durch die Aufzählung der zu den Regionen gehörenden Merkmals-Tupel definiert. Ziehen wir zur Bildbeschreibung noch weitere Symbole hinzu wie etwa 'Kanten' als Berandung von Regionen und 'Örter' als Punkte, in denen sich Kanten treffen, so erweitert sich das Relativ nach geeigneter Definition der Relationen $K \subseteq M^k$ und $O \subseteq M^0$ zu

$$(2) \quad G = [M, (R, K, O)].$$

Hier sind die Symbole durch r -, k - beziehungsweise o -stellige Merkmalsvektoren charakterisiert ($r=9$ in diesem Beispiel). Diese Form ist etwa für die Weiterverarbeitung mit Hilfe eines Klassifikationsverfahrens geeignet ([TOU+GONZALES74] und andere Lehrbücher). Ein Beispiel ist die Auswertung von LANDSAT-Bildern in [GOOD+LANGHAM77].

2.1.2 Strukturierung der Trägermenge

Um die Gruppierung zusammengehörender Merkmale auszudrücken, läßt sich die Trägermenge M stärker strukturieren. Wählen wir $M_1 = M$, $M_2 = M \times M$ und $M_4 = M \times M \times M \times M$ sowie $M' = M_1 \cup M_2 \cup M_4$, so erhalten wir

$$(3) \quad G' = [M', (R', K', O')].$$

Die Relationstupel von R' können nun formuliert werden als $r' = (n, f, u', s', i)$, wobei n , f und i Elemente aus M_1 , $u' \in M_4$ sowie $s' \in M_2$ sind. Ausgeschrieben hat ein Element r' das Aussehen

$$(4) \quad r' = (n, f, (u_1, u_2, u_3, u_4), (s_1, s_2), i).$$

Hatte in (2) die Relationenstruktur die Stellenverteilung (r, k, o) mit $r=9$, so ist die Stellenverteilung in (3) nun (r', k', o') mit $r'=5$. Hier sind die einzelnen Projektionen der Merkmalsrelation für Regionen nicht mehr einfache Mengen wie in (2), sondern die dritte Projektion ist eine vierstellige und die vierte Projektion eine zweistellige Relation. Komplexere Bildsymbole könnten eine noch tiefere Schachtelung in hierarchisch angeordnete Unter-Relationen nahelegen. Solch eine Konzeption unterstützt die Implementation der Relative durch Programmiersprachen wie LISP und darauf basierende Repräsentationssysteme, die geschachtelte Listenstrukturen als elementare Datenstrukturen enthalten und zu deren Manipulation vielfältige Operatoren bereitstellen.

2.1.3 Strukturierung der Relationen

Ein Symmetrieargument führt zu einer anderen Ansicht des Gruppierungsvorganges. Anstatt eine Strukturierung der Trägermenge M des Relativs $G = (M, R)$ vorzunehmen, läßt sich die jeweilige Relation für eine Bildsymbolart in mehrere Relationen unterteilen. Definieren wir die Relationen $N \subseteq M$, $F \subseteq M$, $I \subseteq M$, $S \subseteq M \times M$ und $U \subseteq M \times M \times M \times M$, so beschreibt das Relativ $G = [M, (N, F, U, S, I)]$ die Menge der Regionen. Die Stellenverteilung dieses Relationengebildes ist $(1, 1, 4, 2, 1)$. Bei dem Übergang von der vorigen Form haben wir jedoch die hierarchische Beziehung der Relationen verloren; diese Information muß nun durch eine Zusatzvereinbarung in die neue Struktur eingebracht werden.

Wenn über die Mengen N , F , U , S und I nichts weiter ausgesagt wird, läßt sich aus der angegebenen Schreibweise nicht erkennen, welche Elemente der verschiedenen Mengen zusammengehören, um eine individuelle Region zu beschreiben. Dieser Mangel kann behoben werden, indem wir aus den Relationen F , U , S und I Familien (siehe Definition 2) über einer gemeinsamen Indexmenge machen und vereinbaren, daß gleich indizierte Relationselemente dieselbe Region beschreiben. Es liegt nahe, als Indexmenge die Menge N der Regionsnummern zu wählen, die ja gerade zur Unterscheidung der einzelnen Regionen herangezogen worden war. Die

Indizierung ist vorerst als surjektive Abbildung angenommen (siehe Definition 3 bis Definition 10). Die Merkmalsrelationen enthalten die und nur die Elemente, die zur Spezifikation der vorhandenen Regionen notwendig sind. Wir können den Familiencharakter der Merkmalsrelationen explizit im Relationengebilde angeben, denn die Familie ist als Abbildung eine zweistellige Relation zwischen der Indexmenge und der Merkmalsrelation.

$$(5) \quad G' = [M', (F', U', S', I')],$$

mit $F' \subseteq N \times F \subseteq N \times M$, $I' \subseteq N \times I \subseteq N \times M$, $S' \subseteq N \times S \subseteq N \times M^2$ und $U' \subseteq N \times U \subseteq N \times M^4$.

2.1.4 Uniforme Darstellung

Eine uniforme Darstellung von Merkmalen, die unter Umständen Vorteile bei der Implementation und beim Vergleich von Relativen (siehe Kapitel 3) bietet, kann erreicht werden, indem nur Relationen mit der geringstmöglichen Stellenverteilung von zwei verwendet werden. Binäre Relationen lassen sich außerdem grafisch einfacher darstellen als solche mit mehr als zwei Stellen.

$$(6) \quad G = [M, (F, U1, U2, U3, U4, S1, S2, I)],$$

wobei alle Relationen Teilmengen von $N \times M$ sind; der Typ von G ist also $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Die Relationen $S1$ und $S2$ ordnen jeder Region ihre Schwerpunktskoordinaten zu. $U1$ bis $U4$ geben die linke und rechte sowie die obere und untere Seite des umschreibenden Rechtecks an. F und I enthalten die Maßzahlen für Fläche und Intensität. Eine solche uniforme Darstellung der Merkmale einer Region findet sich zum Beispiel in [BERTELSMEIER+RADIG77a]. Dort werden Merkmale für noch weitere Bildsymbole ebenfalls durch zweistellige Relationen angegeben. Von dem verwendeten Segmentationsprogramm [KRAASCH+ZACH78] werden neben den Regionen - dort Fleck genannt - noch Kanten und Örter erzeugt. Das entsprechende Relationengebilde ist von der Form

$$(7) \quad G = [M, (RM1, RM2, \dots, KM1, KM2, \dots, OM1, OM2, \dots)],$$

wobei die RM_i , KM_i und OM_i zweistellige Relationen sind, die den Regionen,

Kanten und Örtern ihre individuellen Merkmale zuordnen. Ein Beispiel für weitere Merkmale dieser Symbole findet sich in [HANSON+RISEMAN78b], eine Implementationsmöglichkeit als LISP-Listenstruktur in [BAJCSY+JOSHI78].

2.1.5 Merkmalsfunktionen

In [BERTELSMEIER+RADIG77a] wird eine Schreibweise benutzt, die den Funktionscharakter der Merkmalsrelationen verdeutlicht. Zumindest für die bisher eingeführten Bildsymbole und ihre Merkmale gilt, daß jedem individuellen Symbol für jedes Merkmal genau eine Maßzahl zukommt. Damit sind diese Merkmalsrelationen alle rechtseindeutig und lassen sich als Abbildung

(8) RM, KM sowie $OM: N \rightarrow M$

notieren. Der Funktionscharakter zusammen mit der uniformen Darstellung hat Auswirkungen auf die Implementation eines Relationengebildes, das die Merkmale der Bildsymbole spezifiziert. Wenn bekannt ist, wieviele Symbole einer jeden Art erzeugt worden sind und wieviele Merkmale jede Art beschreiben, so läßt sich sofort eine obere Schranke für den benötigten Speicherplatz des Relativs angeben.

Darüberhinaus kann die Datenstruktur, die zur Repräsentation des Relativs benutzt wird, daraufhin konzipiert werden, daß zu jedem Bildsymbol und zu jedem Merkmal genau eine Maßzahl gehört. Eine denkbare Struktur ist sicherlich wieder die Form der Merkmalsvektoren, in der sich zu jedem Merkmal genau eine Maßzahl speichern läßt. Im nächsten Abschnitt zeigt eine einfache Umwandlungsvorschrift die Äquivalenz der Merkmalsvektoren und der Merkmalsfunktionen. Im darauffolgenden Abschnitt wird argumentiert, daß die zweite Form leichter zu verallgemeinern ist.

2.1.6 Umwandlung der Merkmalsrelative

Die Funktionseigenschaft zusammen mit der Annahme, daß zwei Bildsymbole identisch sind, wenn sie in allen ihren Merkmalen übereinstimmen, führt zu der Aussage, daß die Formulierungen (1) und (6) bzw. (2) und (7) äquivalent sind in dem Sinne, daß sie sich eindeutig ineinander überführen lassen. Wir geben dazu zwei Konstruktionsvorschriften an. Gegeben sei das Relativ

$$(2) \quad G = [M, (R, K, O)]$$

als Beschreibung der Bildsymbole. Seine Relationenstruktur hat die Stellenverteilung (r, k, o) mit den Relationen $R \subseteq M^r$, $K \subseteq M^k$ und $O \subseteq M^o$. Wir indizieren die Relationen R , K sowie O und erhalten somit drei Familien der Art $R = \{(r_1, r_2, \dots, r_r)_n \mid n=1, \dots, \|R\|\}$. Durch Übertragen der Indizierung eines Elementes $(r_1, r_2, \dots, r_r)_n$ der Relation auf seine Komponenten $(r_{1n}, r_{2n}, \dots, r_{rn})$ und die komponentenweise Projektion erhalten wir zweistellige Relationen RM_1 bis RM_r zwischen der Indexmenge und den Merkmalswerten. Nach Vereinigung der Trägermenge M mit den benutzten Indexmengen für die verschiedenen Symbolarten können dann die Bildsymbole durch das Relationengebilde

$$(7) \quad G = [M, (RM_1, \dots, RM_r, KM_1, \dots, KM_k, OM_1, \dots, OM_o)]$$

beschrieben werden.

Die Umwandlung von (7) nach (2) läßt sich kurz skizzieren. Aus den Relationen RM_1 bis RM_r bilden wir eine Familie

$$(9) \quad R' = \{(rm_1, \dots, rm_r)_n \mid (n, rm_1) \in RM_1, \dots, (n, rm_r) \in RM_r\}.$$

Durch Fortlassen der Indizierung und entsprechende Umformungen für die anderen Symbolarten erhalten wir die Relationen R , K sowie O und damit das Relativ von (2).

2.1.7 Verallgemeinerung

Da nun beide Formen von Relationengebilden gleichwertig sind, ist die Wahl unerheblich. Jedoch läßt sich die Form (7) besser verallgemeinern. Zwei Eigenschaften der Merkmalsfunktionen können wir aufgeben. Die eine betrifft die gleichartige Indizierbarkeit aller zu einer Symbolart gehörenden Merkmalsrelationen. Fordert man nicht mehr dieselbe Kardinalität aller solcher Relationen, so ist es möglich, einige für eine Symbolart definierte Merkmale bei der Beschreibung einzelner Bildsymbole fortzulassen. So mag es nicht sinnvoll sein, eine länglich ausgedehnte Region, die diagonal über ein Bild läuft, durch ein achsparalleles, umschreibendes Rechteck zu charakterisieren. Das Fehlen dieses Merkmals ist als Aussage wichtiger als die Angabe bedeutungsarmer Maßzahlen für die Rechteckgrenzen. Diese Verallgemeinerung läßt sich auch noch in einem Relativ der Form (2) beschreiben, wenn wir die Trägermenge M um ein Element mit der Bedeutung 'bedeutungslos' erweitern und dieses Element an die gewünschten Stellen der Relationstupel einsetzen.

Die zweite Verallgemeinerung betrifft den Funktionscharakter der Merkmalsrelation. Unter Umständen ist es sinnvoll, für ein Merkmal eines individuellen Symbols mehrere Werte vorzusehen, insbesondere wenn man den Bereich der numerisch quantifizierten Maße verläßt. Wählt man zum Beispiel eine Einteilung von Regionsflächen in 'klein', 'mittel' und 'groß', die aufgrund vorgegebener Schwellenwerte geschieht, so kann die gleichzeitige Angabe von 'klein' und 'mittel' aussagen, daß die Größe der so charakterisierten Fläche nahe an der Entscheidungsgrenze liegt. Bisher sind wir davon ausgegangen, daß die Merkmale eines Bildsymbols durch die Anwendung eines Segmentationsverfahrens auf die Bildmatrix berechnet werden. Wird darüberhinaus in einem anschließenden Analyseprozeß den Symbolen Bedeutung zugewiesen, so können Bedeutungsbelegungen als neue Merkmale der Symbole aufgefaßt und im gewählten Relationengebilde dargestellt werden. Manche Analyseverfahren - wie etwa [ZUCKER78], [TENENBAUM+BARROW77], verallgemeinert in [BARROW+TENENBAUM76] - beginnen mit einer vielfältigen Bedeutungsbelegung der Symbole und reduzieren die Vielfalt durch iteratives Anwenden von einschränkendem Vorwissen. Es wird etwa solches benutzt, daß eine Region mit der Bedeutung Türknopf innerhalb einer Region liegen muß, deren Belegung unter anderem die Bedeutung Tür enthält [TENENBAUM+BARROW77]. Die Darstellung einer solchen Erweiterung der Symbolmerkmale ist sicherlich

einfacher in einem Relationengebilde nach (7).

2.1.8 Inverse Merkmalsrelationen

Neben dem Wunsch, nicht rechtseindeutige Merkmalsrelationen zuzulassen oder einen variablen Satz von Merkmalen für eine Symbolart vorzusehen, spielt bei der Strukturierung eines Relationengebildes eine Rolle, ob inverse Merkmalsrelationen zur Verfügung stehen müssen. Das wird dann der Fall sein, wenn ein Analyseprozeß Suchvorgänge nach Symbolen mit bestimmten Merkmalswerten durchführt. Solche Suchvorgänge können in Verfahren eingebettet sein, die als zuverlässig eingeschätzte Hypothesen über das Vorhandensein von Objekten versuchen zu verifizieren. Dabei ist es zunächst gleichgültig, ob die Verifikation durch Vergleich von Bildsymbolen mit generierten oder selektierten Prototypen erfolgt oder ob ein regelgesteuertes System von einem Ziel rückwärts schließend Bildsymbole mit bestimmten Merkmalswerten als Terminale benötigt. Dazu gilt es, neben der formalen Existenz der inversen Relationen effiziente Zugriffspfade aufzubauen. Dieses Problem ist bei der Einzelbildverarbeitung nicht so dringlich wie bei der Analyse von Bildfolgen, weil dort die Anzahl der erzeugten Bildsymbole wächst. In [MÜHLE+RADIG81] wird ein Datenbankkonzept zur Unterstützung der Analyse von Bildfolgen in Angriff genommen, das unter anderem große Mengen von Bildsymbolen, die als Relationengebilde formuliert sind, schnell zugreifbar speichern soll.

Obwohl der effiziente Zugriff auf Bildsymbole über inverse Relationen eine prinzipiell vernünftige Forderung ist, gibt es viele Analysesysteme, die ohne diesen Zugriffspfad auskommen. Das sind zum Beispiel solche, die einer Aufwärtsstrategie ("bottom-up") folgen, indem sie ausgehend von den vorhandenen Bildsymbolen und ihren Merkmalen neue Symbole berechnen und zu (hypothetischen) Interpretationen gruppieren. In [BERTELSMEIER+RADIG77b] war diese Arbeitsweise als Grundstrategie vorgesehen. In anderen Systemen werden Beziehungen zwischen Symbolen und aus Vorwissen oder Interpretationshypothesen abgeleiteten Bedingungen benutzt, um den Suchraum nach bestimmten Bildsymbolen einzuschränken. Um das schon zitierte Beispiel noch einmal zu bemühen: Die Suche nach einer Region, die ein Türknauf sein könnte, kann man auf kleine, der Erwartung entsprechend gelegene Bereiche

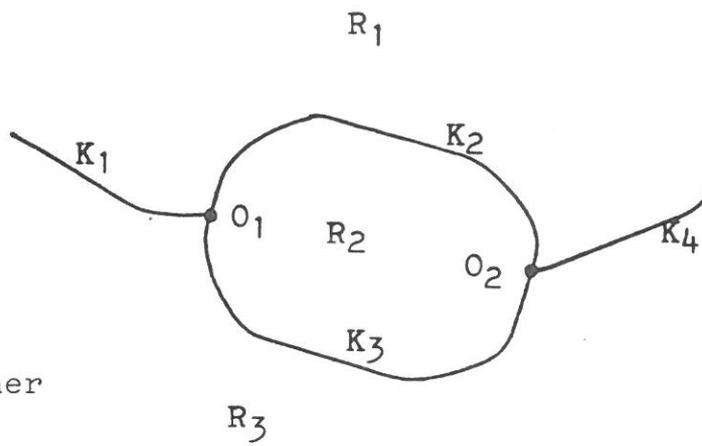


Abb. 2.1
Ausschnitte aus einer
Bildsegmentation

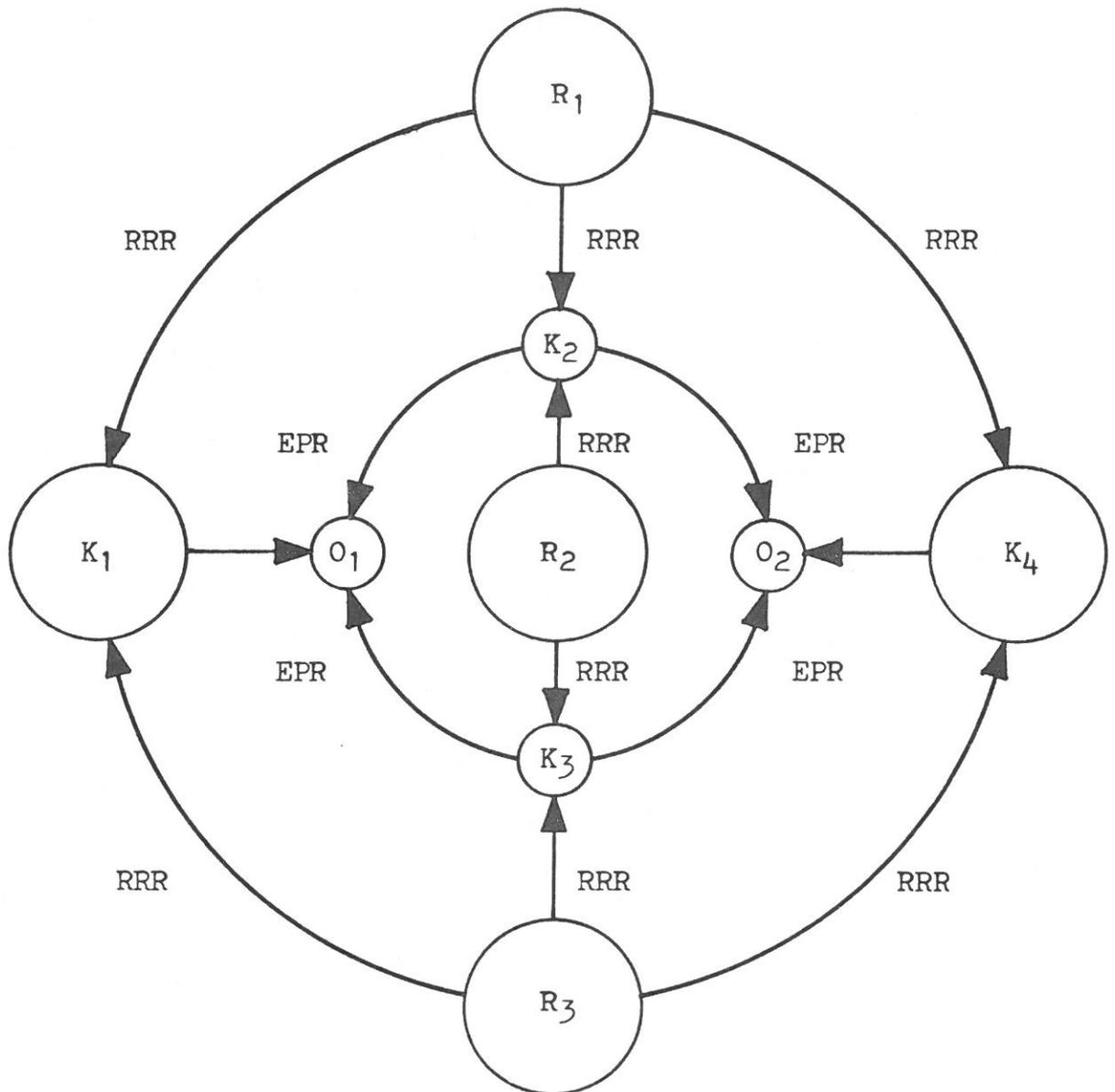


Abb. 2.2
Zusammenhangs-Struktur der Bildsymbole

innerhalb von Regionen beschränken, die aufgrund ihrer Merkmale und nach ihren (Nachbarschafts-) Beziehungen zu anderen Regionen Türen sein können. In [RADIG81b] werden in einer bestimmten räumlichen Lage relativ zu vorhandenen Bildsymbolen vermutete Regionen in einem Bildausschnitt gesucht, dessen Größe und Position durch Ausdehnung und Lage der vorhandenen Bildsymbole automatisch bestimmt wird.

Schon bei der Erzeugung von Bildsymbolen und umso mehr bei der Interpretation der Bilder können die Beziehungen zwischen Bildsymbolen eine wichtige Rolle spielen. Der nächste Abschnitt geht auf die Darstellung von Relationen zwischen Bildsymbolen ein.

2.2 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN SYMBOLEN EINES BILDES

Wir gehen nochmals von den Bildsymbolen Region, Kante und Ort aus, die nicht untypisch sind ('Fleck', 'Kontur' und 'Ort' in [BERTELSMEIER+RADIG77a], 'region', 'boundary segments' und 'vertices' in [HANSON+RISEMAN78a] oder 'surface', 'string' und 'vertex' in [JACOBUS+80]). Zwei Arten von Beziehungen zwischen diesen Symbolen liegen nahe. Die eine beschreibt den Zusammenhang zwischen verschiedenartigen Symbolen, die andere die flächige Anordnung der Symbole.

2.2.1 Zusammenhangs-Beziehungen

Zwei Beziehungen genügen, um den Zusammenhang zwischen den drei Symbolarten herzustellen (bei n Arten genügen $n-1$ Beziehungen). Die eine verknüpft die Kanten mit ihren Endpunkten; wir nennen sie Endpunkt-Relation (EPR). Die andere umgibt die Regionen mit ihren berandenden Kanten; wir nennen sie Regionsrand-Relation (RRR). Ein Segmentationsergebnis wie in Abb. 2.1 ergibt die Zusammenhangs-Struktur von Abb. 2.2.

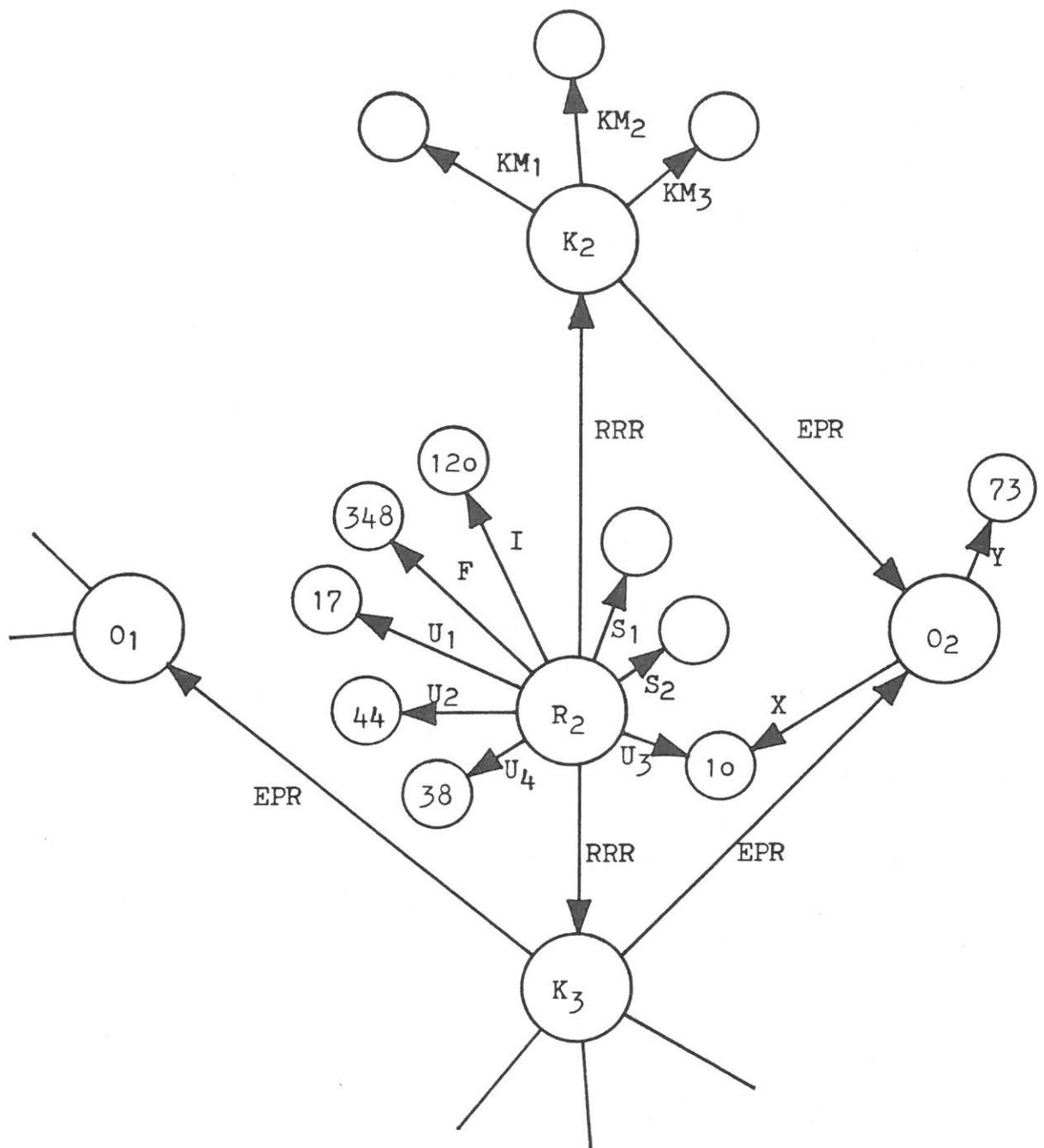


Abb. 2.3
 Darstellung eines Relativs mit Symbolen, Merkmalen und Beziehungen

Abb. 2.2 Zusammenhangs-Struktur der Bildsymbole

Schon ein solch kleiner Ausschnitt wird durch 9 Bildsymbole und 14 Relationselemente beschrieben. Anhand der beiden Grundformen

$$(2) \quad G = [M, (R, K, O)]$$

und

$$(7) \quad G = [M, (RM1, \dots, KM1, \dots, OM1, \dots)]$$

wird demonstriert, wie sich die Beziehungen im Relativ darstellen lassen. In der Form (2) wird jedes Symbol durch ein Tupel beschrieben. Beziehungen zwischen Symbolen müssen daher durch Relationen zwischen Tupeln ausgedrückt werden. Nach der bisherigen Auffassung können Relationen nur zwischen den Elementen der Trägermenge existieren. Daher müssen wir auf der Grundlage des Relativs G eine neue Trägermenge definieren, deren Teilmengen die Relationen R , K und O sind. Die Relationen RRR und EPR werden dann in einem Relativ G' über der neuen Trägermenge definiert.

$$(8) \quad G' = [R \cup K \cup O, (EPR, RRR)]$$

Die Relationenstruktur von G' hat die Stellenverteilung (2,2).

Die Struktur nach (7) bietet die einfachere Möglichkeit, auch die neuen Relationen in das vorhandene Relativ aufzunehmen. Da für die Symbole schon Repräsentanten in Form der Symbolnummern vorhanden sind, werden die Endpunkt- und Regionsrand-Relation über den Symbolnummern, also innerhalb der vorhandenen Trägermenge definiert.

$$(9) \quad G'' = [M, (RM1, \dots, KM1, \dots, OM1, \dots, EPR, RRR)].$$

Die Stellenverteilung ist nun (2, ..., 2, ..., 2, ..., 2, 2). Die Abb. 2.3 enthält einen Ausschnitt von Abb. 2.2, wobei zusätzlich einige Merkmale der Symbole angedeutet sind.

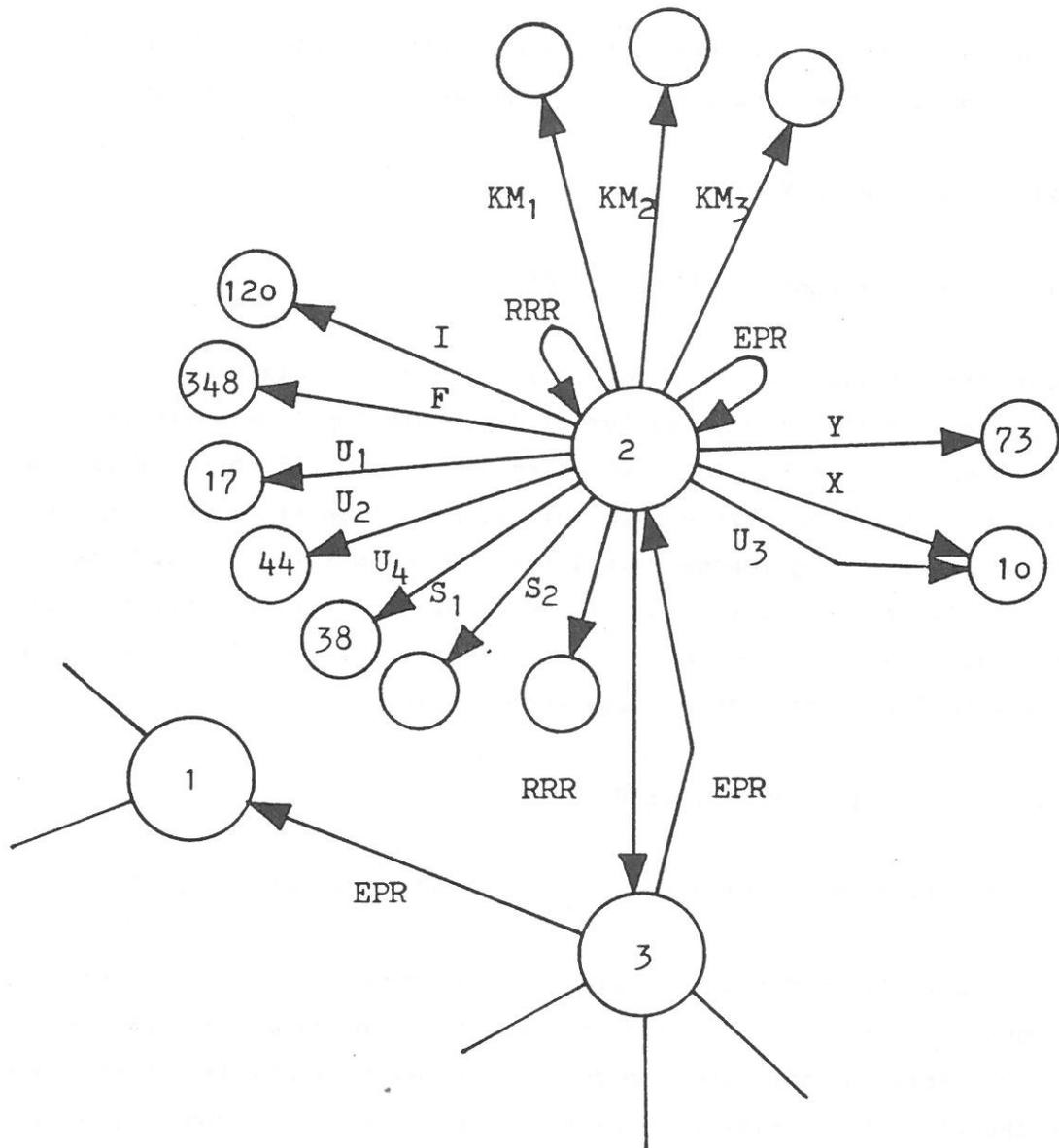


Abb. 2.4
Kompakte Form des Relativs

Abb. 2.3 Darstellung eines Relativs mit Symbolen, Merkmalen und Beziehungen

Die Relationen sind als gerichtete Graphen dargestellt, wobei der Pfeil von der ersten zur zweiten Stelle der Relation zeigt. Die Knoten sind Elemente der Trägermenge. Die Region ist mit ihren schon oben verwendeten Merkmalen dargestellt, der Ort trägt nur zwei Koordinaten, von denen die Spalte (X) mit der rechten Seite des umschreibenden Rechtecks zusammenfällt, und die Kante ist mit drei, in Abb. 2.3 nicht näher spezifizierten Merkmalen ausgestattet. Die eingetragenen Maßzahlen sind nur von illustrativer Bedeutung.

2.2.2 Redundante Relationen

Im Sinne der bis jetzt eingeführten Relationengebilde ist die Abb. 2.3 unrichtig, da die Trägermenge nicht solche Elemente wie K3 oder R2 enthält, sondern nur rationale Zahlen beziehungsweise Tupel aus solchen. Korrekt in dem Sinne ist Abb. 2.4.

Abb. 2.4 Kompakte Form des Relativs

Woran nun erkennt man, daß es eine Region mit der Nummer 2 gibt? Nur daran, daß eine Relation - wie U1 oder RRR - existiert, in der ein Element an der Stelle, die als Regionsnummer ausgewiesen ist, eine 2 enthält. Der Vergleich der Abb. 2.3 mit der Abb. 2.4 zeigt, daß die Darstellung in Abb. 2.3 redundant ist, denn in beiden Graphen wird ja derselbe Sachverhalt dargestellt. Jedoch kann man im Graphen von Abb. 2.3 explizit daran, daß ein Knoten mit der Markierung R2 existiert, das Vorhandensein einer Region mit der Nummer 2 erkennen. Um solche Explizierung auch im Relativ ausdrücken zu können, müssen wir in der Trägermenge M für jedes Bildsymbol ein eigenes Element bereitstellen. Das könnte ein Element aus der Relation

$$\text{ART} \subseteq \{ 'R', 'K', 'O' \} \times N$$

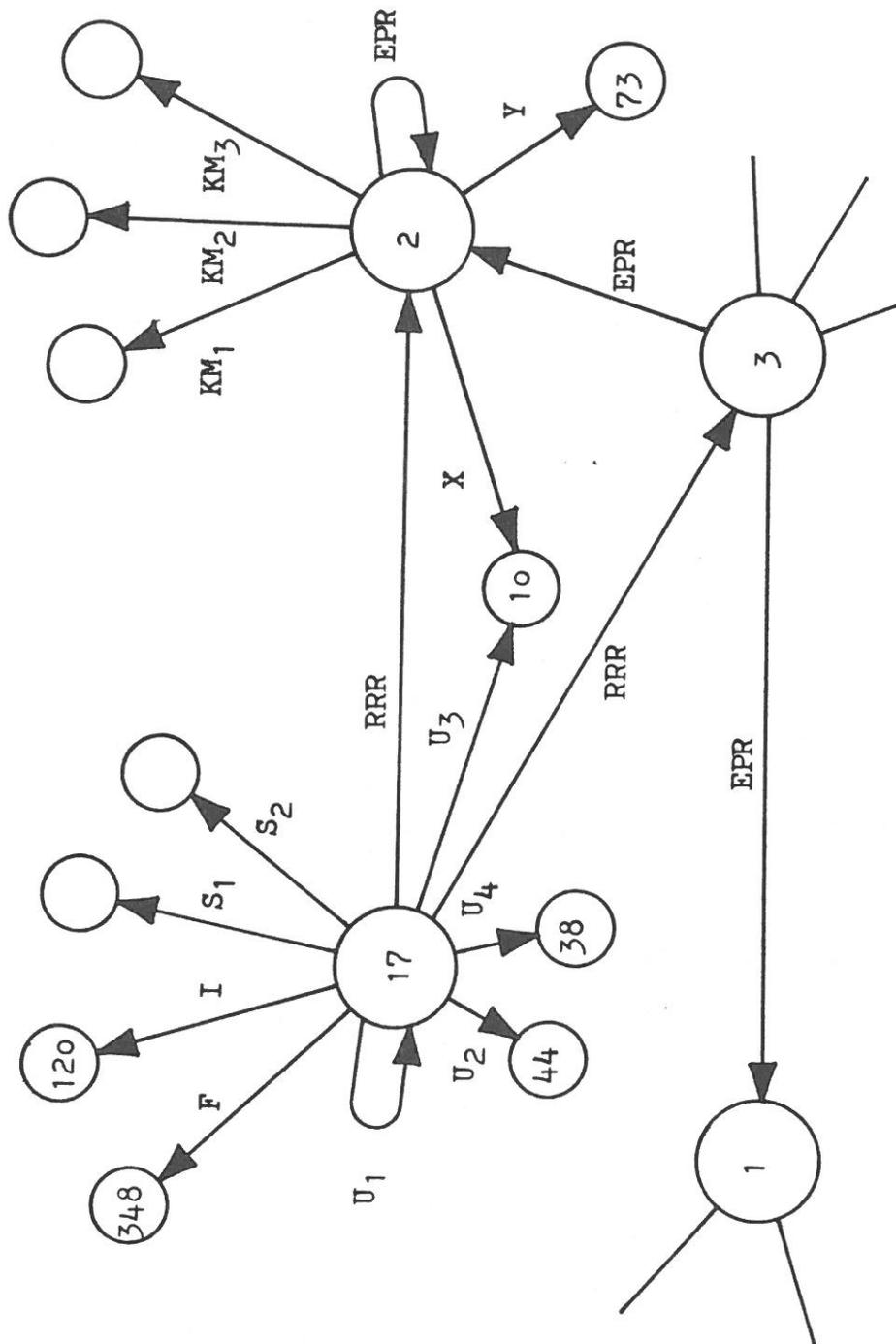


Abb. 2.5
 Region 2 von Abb. 2.4 in Region 17 umbenannt

sein, wobei ART dann Teilmenge der Trägermenge sein müßte: $M' = M \cup \text{ART}$. Mit der Vereinbarung, die Paare ('R',1), ('K',m) und ('O',n) im Graphen als R_1 , K_m und O_n zu notieren, ist nun die Abb. 2.3 eine korrekte Darstellung des so erweiterten Relationengebildes.

2.2.3 Isomorphe Relative

Eine störende Eigenschaft hat die redundanzfreie Form des Relativs: Seine Darstellung als Graph hängt stark von der gewählten, aber völlig willkürlichen Numerierung der Bildsymbole ab. Zwei Graphen, die dasselbe Segmentationsresultat beschreiben, können verschieden aussehen. Abb. 2.5 zeigt die Änderung von Abb. 2.4 durch das Umbenennen von Region 2 in Region 17.

Abb. 2.5 Region 2 von Abb. 2.4 in Region 17 umbenannt

Dahingegen ändert sich das Aussehen des Graphen in Abb. 2.3 nicht, wenn wir die Bildsymbole anders numerieren, etwa durch eine Permutation der Symbolnummern. Die Aussage können wir auch durch die Behauptung ausdrücken, daß ein Relativ G' , das durch Permutation der Symbolnummern aus dem Relativ G hervorgeht, zu diesem isomorph ist (siehe Definition 11). Der Isomorphismus läßt sich leicht angeben. Seien m die Träger Elemente der Merkmalsrelationen, also $m \in M \setminus \text{ART}$, und $a \in \text{ART}$ die Symbolrepräsentanten. Wir wählen die bijektive Abbildung g zwischen den Trägermengen M und M' der Relative G und G' zu

$$(10) \quad m = m' \rightarrow (m, m') \in g \\ (a, m) \in R_i \text{ und } (a', m') \in R_i' \text{ und } (m, m') \in g \rightarrow (a, a') \in g$$

Es sei an die Voraussetzung erinnert, daß zwei Bildsymbole identisch sind, wenn sie in allen ihren Merkmalen übereinstimmen. Da kein Merkmal bei der Abbildung verändert wird und die Permutation wie auch die Identität bijektive Abbildungen sind, bildet g die Bildsymbole eineindeutig aufeinander ab. Dann können ohne Widerspruch auch die Relationen (RRR und

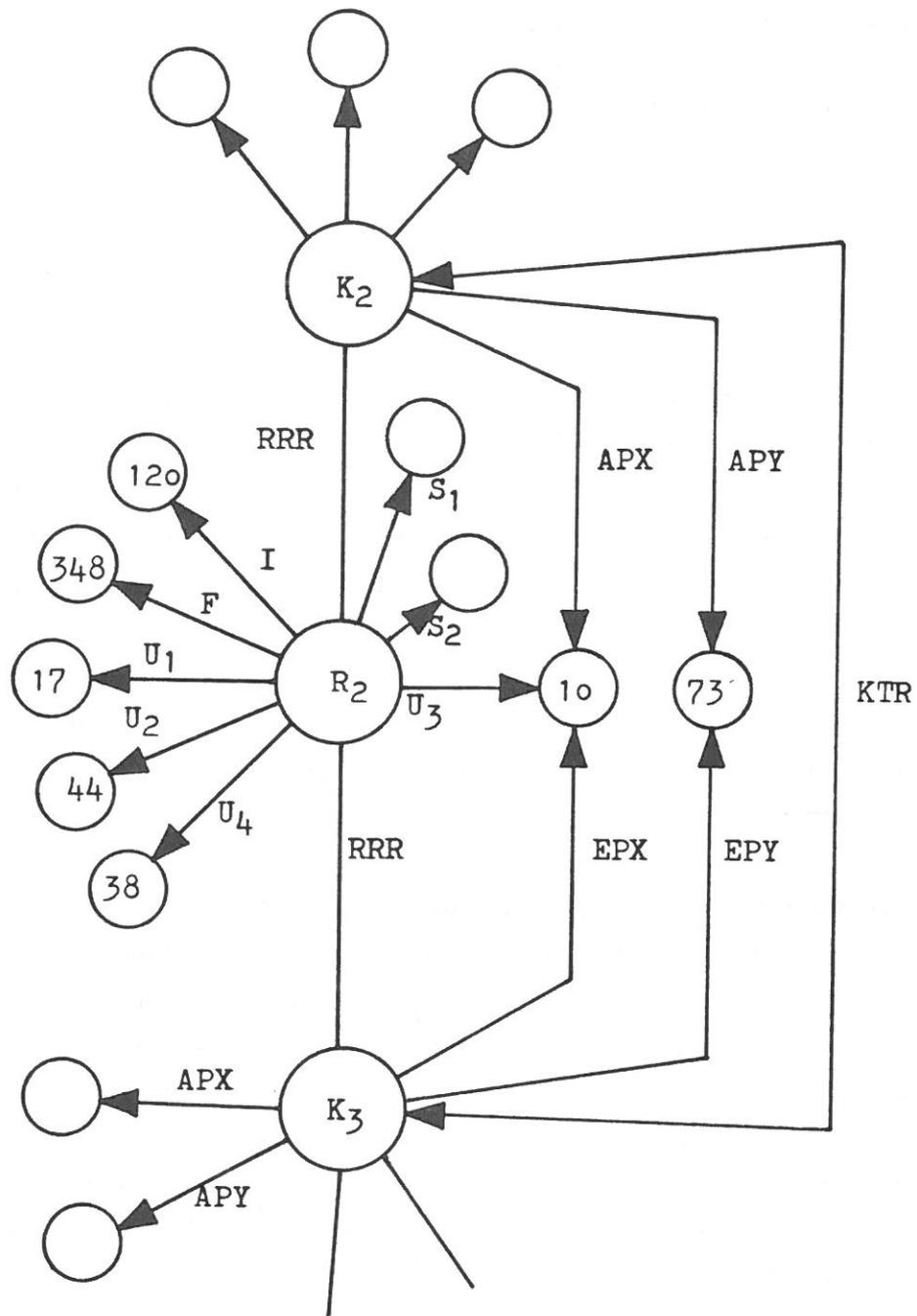


Abb. 2.6
Elimination des Bildsymbols Ort

EPR) zwischen Symbolrepräsentaten übertragen werden.

(11) $(a_1, a_1') \in g$ und $(a_2, a_2') \in g$ und $(a_1, a_2) \in RRR \rightarrow (a_1', a_2') \in RRR'$;
entsprechend für EPR.

Damit ist g ein Isomorphismus zwischen beiden Relativen.

Die Konstruktion des Isomorphismus macht noch einmal die Unterschiede zwischen den Trägerelementen des Relativs deutlich. Die einen sind Werte von Merkmalen und dürfen nicht durch eine mathematische Transformation verändert werden, wenn das Relativ weiterhin die symbolische Form des zugrundeliegenden Bildes widerspiegeln soll. Die anderen sind Platzhalter zum Aufbau formaler Strukturen, mit denen der Umgang von dem Verwendungszweck des Relativs her nicht eingeschränkt ist. Schon aus diesem Grund ist es sinnvoll, beiden Arten von Trägerelementen disjunkte Teilmengen der Trägermenge zuzuordnen.

Übrigens kann man die hier eingeführte Isomorphie verwenden, um Segmentationsverfahren zu beurteilen. So könnte man definieren, daß zwei Segmentationsverfahren dann äquivalent sind, wenn sie aus derselben Bildvorlage isomorphe Relationengebilde erzeugen. Dabei können die Auswahl und die Quantisierung der Merkmale und Beziehungen durchaus so erfolgen, daß vom Beurteiler als unerheblich erachtete Variationen die Isomorphie nicht stören.

Über die Isomorphie läßt sich bei vorgegebenem Segmentationsverfahren ebenfalls die Frage beantworten, wann zwei Bildvorlagen gleich sind. Dabei spiegeln sich in der Wahl der Relationen die erwarteten Invarianten. Wir werden auf den Vergleich von Bildern aus Folgen später ausführlich eingehen.

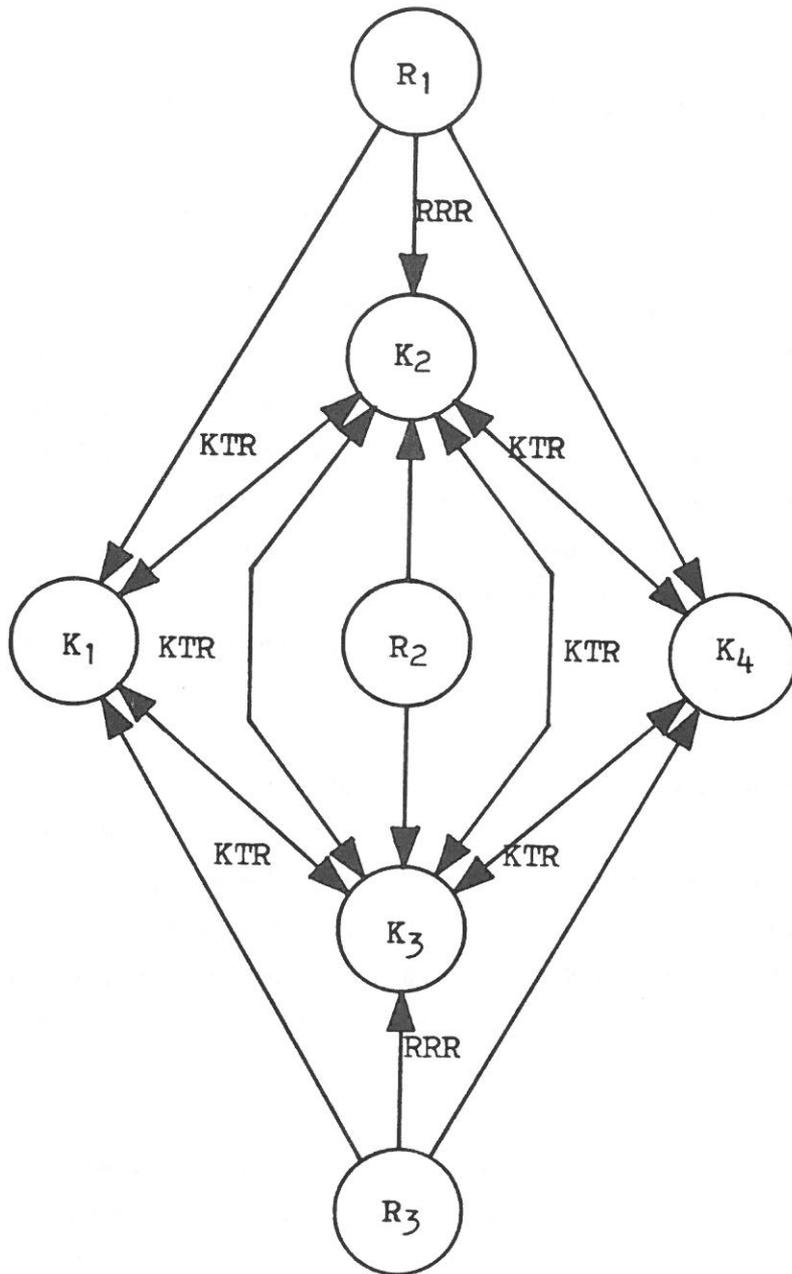


Abb. 2.7
Übersichtsgraph ohne Örter

2.2.4 Andere Zusammenhangs-Beziehungen und Symbolarten

Bisher hatten wir uns für unsere Beispiele dreier Symbolarten bedient. Regionen, Kanten und Örter wurden als typisch herausgegriffen; nun soll die Frage verfolgt werden, wie sich ein Relationengebilde ändern muß, wenn andere Bildsymbole gewählt werden. Fassen wir einmal eine Verringerung der Symbolarten ins Auge. Als Beispiel streichen wir die Örter als eigenständige Bildsymbole und erweitern dafür die Merkmale der Kanten um die Koordinaten ihres jeweiligen Anfangs- und Endpunktes. Bezeichnen wir die Relation zwischen Kante und Spalte des Anfangspunktes mit APX, so ist sie über das alte Relativ (mit Örtern) definiert durch

$$(12) \quad \text{APX} = \{ ('K', n), x \mid \exists (m \in M): (('K', n), ('O', m)) \in \text{EPR} \\ \text{und } (('O', m), x) \in X \}$$

Wir lassen hier einmal außer Acht, daß wir durch die Unterscheidung von Anfangs- und Endpunkt der Kante implizit einen Richtungssinn gegeben haben. Den Sachverhalt, daß Kanten einen Punkt gemeinsam haben, können wir durch eine "Kantentreff"-Relation (KTR) ausdrücken mit

$$(13) \quad \text{KTR} = \{ (('K', n), ('K', l)) \mid \exists (m \in M): (('K', n), ('O', m)) \in \text{EPR} \\ \text{und } (('K', l), ('O', m)) \in \text{EPR} \}$$

Die entsprechende Änderung von Abb. 2.3 ist in Abb. 2.6 gezeigt.

Abb. 2.6 Elimination des Bildsymbols Ort

Die Abb. 2.2 ändert sich entsprechend zu Abb. 2.7.

Abb. 2.7 Übersichtsgraph ohne Örter

Die Entscheidung, ob Örter als eigenständige Bildsymbole erhalten bleiben, hängt mit davon ab, welche Information aus dem Relativ gewonnen werden soll. So fällt bei einem Vergleich der Abbildungen 2.2 und 2.7 auf, daß in 2.2

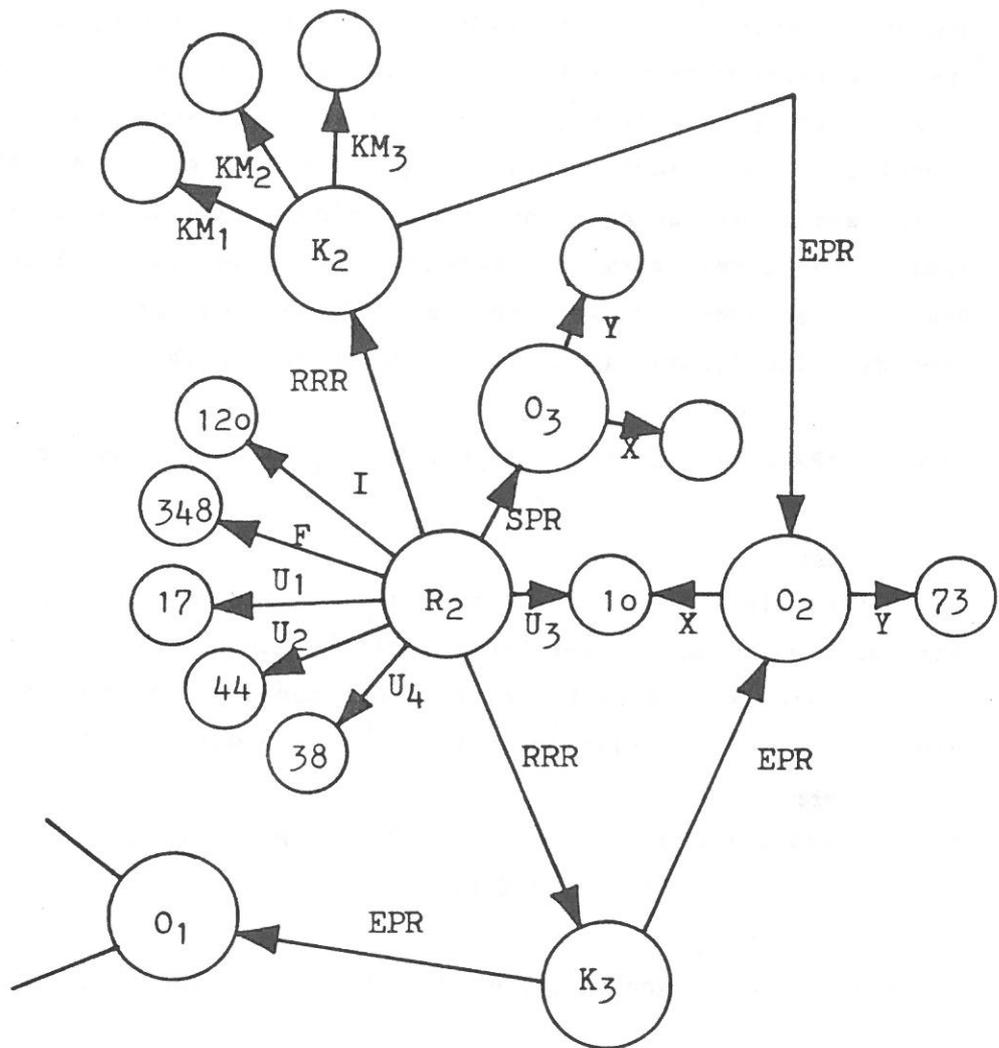


Abb. 2.8
 Zusätzlich eingeführter Ort als Schwerpunkt

einfach festzustellen ist, wieviele Kanten in einem Ort zusammentreffen, indem man die einlaufenden EPR-Pfeile zählt. Diese Information kann man aus Bild 2.7 gewinnen, indem man die Zahl der Kanten-Knoten in den maximalen Cliques (siehe Definition 12) des KTR-Graphen bestimmt, denn alle in einem Punkt zusammenlaufenden Kanten sind miteinander durch KTR-Beziehungen verbunden. Zwei Cliques K_1, K_2, K_3 und K_2, K_3, K_4 sind in Abb. 2.7 enthalten. Im allgemeinen ist es aufwendiger, die Cliques eines Graphen festzustellen als die einlaufenden Pfeile an einem Knoten zu zählen. Wird diese Information benötigt, ist ein Relativ nach Abb. 2.2 jenem von Abb. 2.7 vorzuziehen.

Wir haben die Symbolarten dadurch verringert, daß wir Symbole in die Merkmalsliste einer anderen Symbolart hineingezogen haben. Auch der entgegengesetzte Vorgang ist denkbar. Wir können Merkmale ausgliedern und zu eigenständigen Symbolen erklären. Als Beispiel wählen wir die Regionen. Besonders nahe - denn dafür müssen wir nicht einmal eine neue Symbolart einführen - liegt die Ausgliederung des Schwerpunktes, der dieselben Merkmale wie ein Ort besitzt. Wir müssen jetzt nur eine neue Zusammenhangs-Relation einführen zwischen Regionen und Örtern; wir nennen sie Schwerpunkts-Relation (SPR). Wiederum ausgehend von Abb. 2.3 zeigt nun Abb. 2.8 die eingetretene Veränderung.

Abb. 2.8 Zusätzlich eingeführter Ort als Schwerpunkt

Eine ganz neue Symbolart müssen wir einführen, wenn das umschreibende Rechteck der Region zu einer eigenständigen Einheit gemacht werden soll. Solch eine Maßnahme wird nahegelegt, weil die vier Relationen U_1 bis U_4 eine zusammengehörende Gruppe bilden und weil das Rechteck ebenso wie der Schwerpunkt eine selbständige bildliche Darstellung hat. Die neu einzuführende Relation heiße 'Umgißt'-Relation (UGR). Abb. 2.9 zeigt das Resultat.

Abb. 2.9 Umschreibendes Rechteck (U) als zusätzliches Bildsymbol

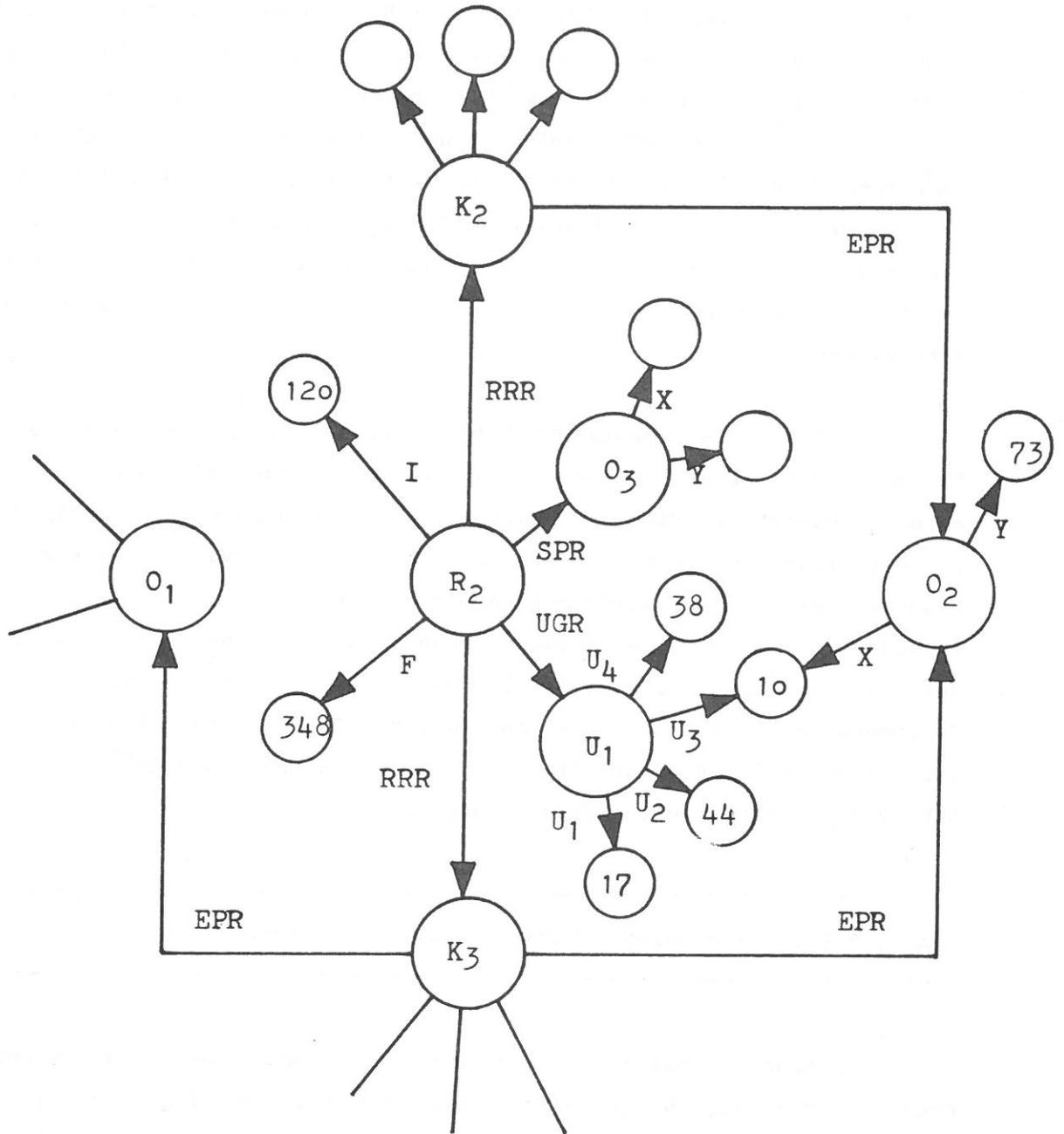


Abb. 2.9
Umgebendes Rechteck (U) als zusätzliches Bildsymbol

Das neue Bildsymbol ist durch den Buchstaben U gekennzeichnet. Aus Gründen der Vereinheitlichung könnte man beschließen, Koordinaten nur noch an Örter zu binden. Demzufolge wird das Rechteck nicht mehr durch seine Seiten sondern durch zwei diagonal gegenüber liegende Eckpunkte definiert; wir nennen sie den linken oberen (LOR) und den rechten unteren (RUR). Abb. 2.10 schließt die Beispiele dieses Abschnitts ab.

Abb. 2.10 An Örter gebundene Koordinaten

2.2.5 Vereinheitlichung der Relationen

Wir haben inzwischen zwei Klassen von Relationen unterschieden. Vertreter der einen drücken den Zusammenhang zwischen Bildsymbolen aus, Relationen aus der anderen weisen den Bildsymbolen Merkmalswerte zu. Auf Kosten des Erzeugens zusätzlicher Symbole und unter Vereinheitlichung der Trägermenge können wir alle diese Relationen zu einer einzigen zusammenfassen. Die Symbole sind in der Trägermenge bisher als Paare (art,n) vorhanden. Übertragen wir die Schreibweise auf die Merkmalswerte etwa durch ihre Repräsentation als Paare ('W',m), so besteht die Trägermenge einheitlich aus Paaren. Letztere ist eine Teilmenge $M \subseteq \text{ART} \times N$ des Kartesischen Produkts aus den Namen und den Werten der Paare. Wir erweitern hier die Menge N, die bisher nur zur Numerierung der Symbole diente, von den natürlichen zu den rationalen Zahlen, um alle benötigten Merkmalswerte ausdrücken zu können; bei Bedarf schließen wir auch nichtnumerische Werte ein. Die Namen sind durch die Buchstaben aus der Menge $\text{ART} = \{'R', 'K', 'S', 'U', 'X', 'Y', 'W', \dots\}$ gegeben. Wir können nun alle Relationen durch eine (mit der Bezeichnung HAT) ausdrücken, indem wir die Funktion, die ein Bildsymbol für ein anderes hat, mit in die Symbolbenennung hineinziehen. Solch eine Umformung wurde in Abb. 2.11 vorgenommen.

Abb. 2.11 Vereinheitlichung des Relationengebildes

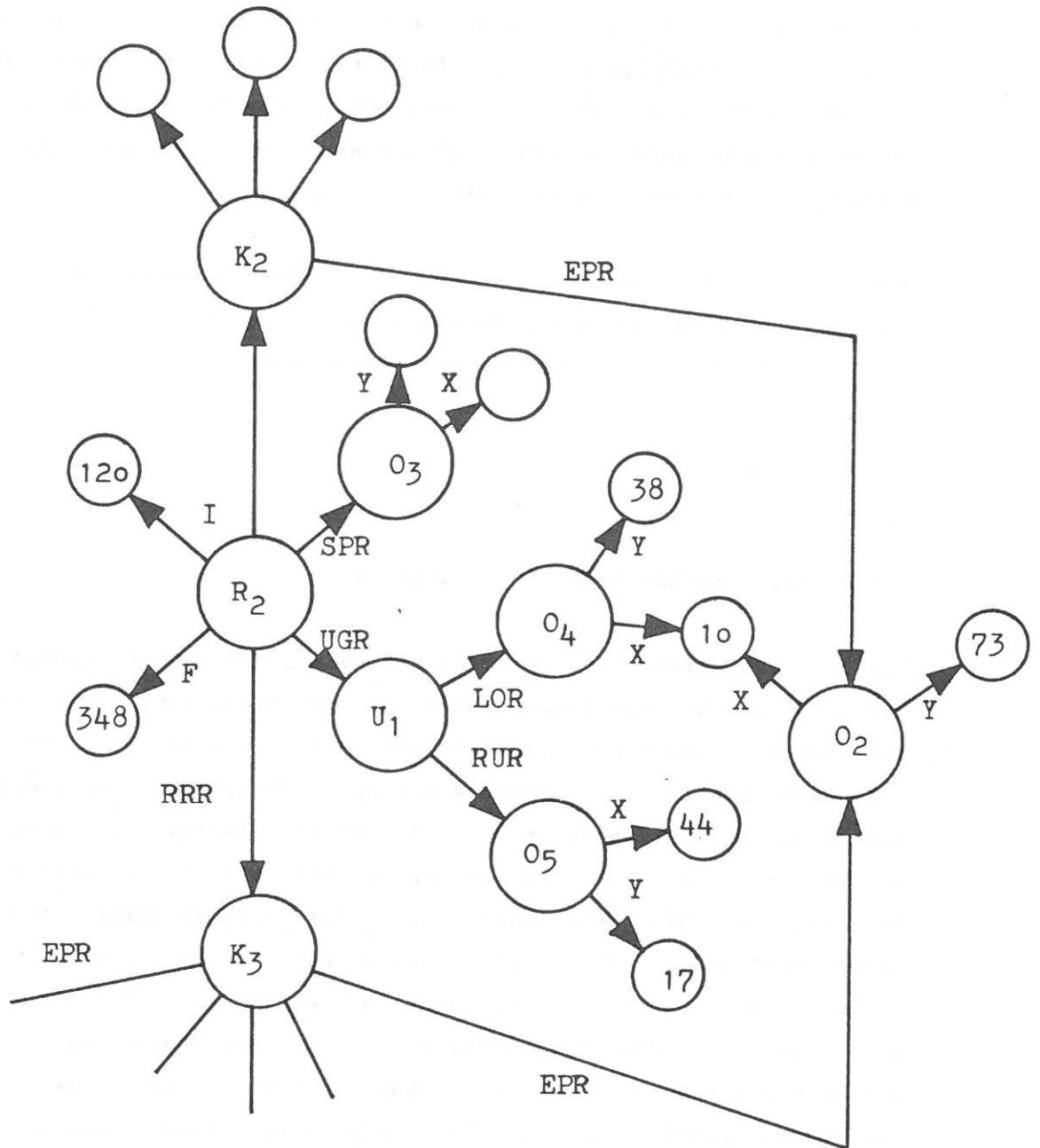


Abb. 2.10
An Örtter gebundene Koordinaten

Der bezeichnete Pfad in dieser Abbildung würde sich so lesen: Die Region 2 hat ein umschreibendes Rechteck 1; das hat eine rechte untere Ecke 5; die hat eine Spalte 5; die hat den Wert 17. Das zugehörige Relativ ist von der Form $G = [M, HAT]$, seine Stellenverteilung ist (2).

Dem möglichen implementatorischen Vorteil eines so gestalteten Relativs steht der Nachteil gegenüber, daß die Bedeutung einer Relation allein durch die Artkennzeichen der beiden beteiligten Trägerelemente ausgedrückt wird. Will man nun zwei unterschiedliche Beziehungen zwischen denselben Trägerelementen darstellen - etwa Region 1 ist dunkler als Region 2 und Region 1 ist größer als Region 2 -, so kann die notwendige Markierung nur durch Einführen zusätzlicher Trägerelemente oder durch Unterscheidung der Relationen geschehen. Tsai und Fu ordnen nicht nur den Trägerelementen sondern auch zweistelligen Relationen zwischen ihnen eindeutige Kennzeichen zu [TSAI+FU79]. Daß dies bei dem Wunsch, wie im obigen Beispiel mehrere Beziehungen zwischen zwei Bildsymbolen herzustellen, nicht ausreicht, bemerken schon Cheng und Huang [CHENG+HUANG80]. Im Gebiet der "Künstlichen Intelligenz" tauchen für die Repräsentation von Wissen in 'Semantischen Netzen' verwandte Probleme bei der Darstellung und Transformation mehrstelliger Relationen auf. In einer Weiterentwicklung lassen Fu und Chang beliebig viele Kennzeichen für Symbole und Symbolpaare zu [FU+CHANG81].

2.2.6 Vielstellige Zusammenhangs-Relationen

Ein letztes Beispiel für mögliche Entwicklungsrichtungen wird durch die Beobachtung eingeführt, daß beim Übergang von Abb. 2.9 auf Abb. 2.10 Symbole auftauchen - etwa U1 -, die keine Merkmale besitzen. So dient das umschreibende Rechteck U1 offensichtlich nur dazu, die beiden Eckpunkte 04 und 05 zusammenzufassen (über LOR bzw. RUR) und der Region R2 zuzuordnen (über UGR). Solch eine Zuordnung läßt sich natürlich durch eine dreistellige Relation vornehmen:

$$UGR' = \{ (('r', n), ('o', m), ('o', l)) \}.$$

UGR' ist in Abb. 2.12 durch einen verkettenden Bogen zwischen den drei

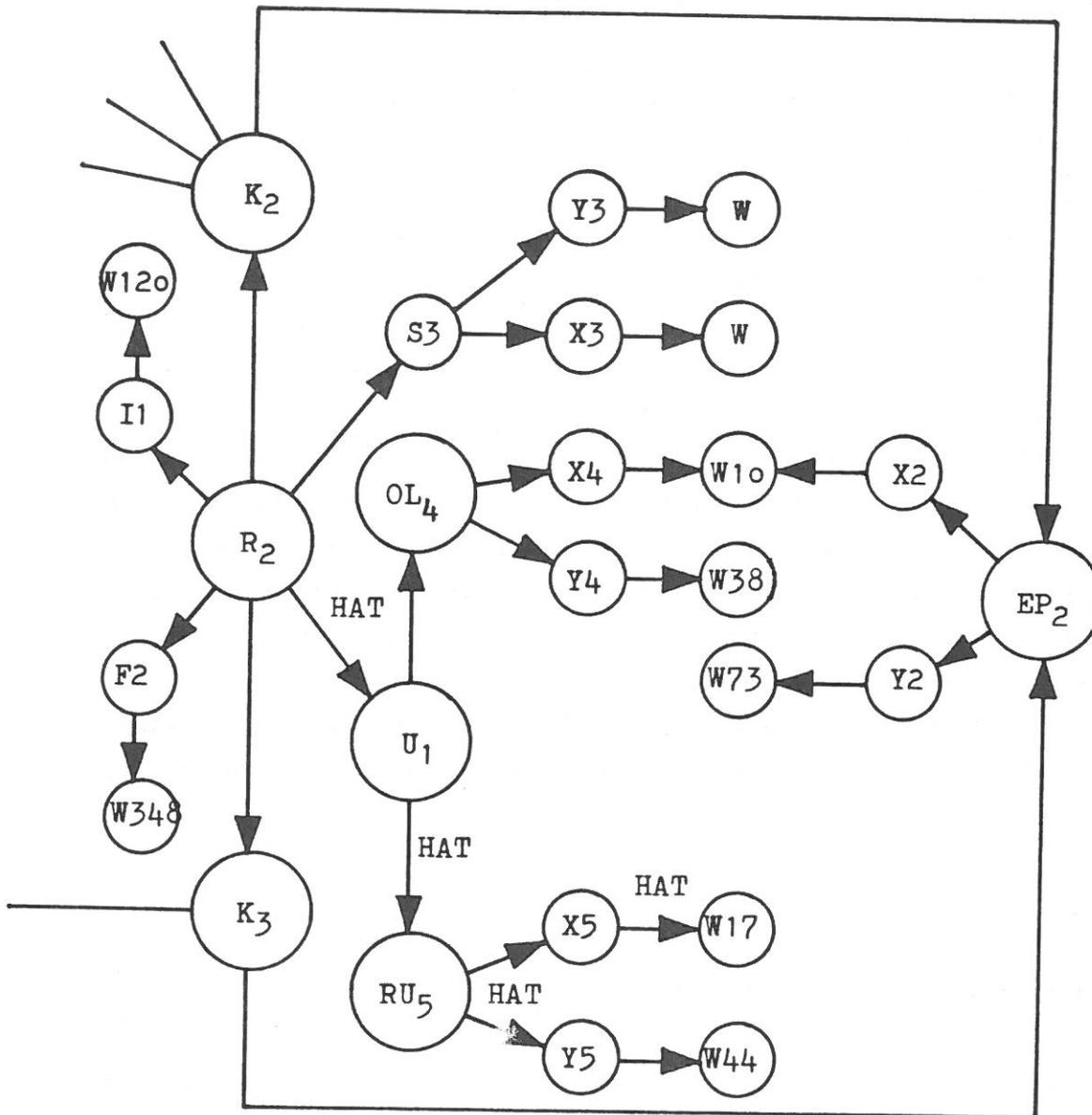


Abb. 2.11
Vereinheitlichung des Relationengebildes

Knoten des Graphen dargestellt; ausgegangen wurde von Abb. 2.10.

Abb. 2.12 Dreistellige Zusammenhangs-Relation

Zwei Gründe stehen möglicherweise solch einer Strukturierung des Relativs entgegen. Zum einen wird die Implementation des Relationengebildes unter Umständen vereinfacht, wenn man sich auf Relationen zwischen höchstens zwei Bildsymbolen beschränkt. Der andere ist ein konzeptioneller Grund, der es erfordert, auch merkmalslose Bildsymbole zu erhalten, um an ihnen Beziehungen anknüpfen zu können. Ein Beispiel dafür enthält der folgende Abschnitt.

2.2.7 Lagebeziehungen

Als Beispiel für eine weitere Kategorie von Beziehungen zwischen Bildsymbolen dienen Relationen zur Beschreibung der Lage von Symbolen im Bild. Solche Beziehungen können für ein Bild relative Positionen von Symbolen, geometrische Strukturen oder topologische Verhältnisse kennzeichnen.

Wenn eine Region vollständig in einer anderen enthalten ist, so ist dafür die Bedingung notwendig, daß ein umschreibendes Rechteck in dem anderen enthalten ist. Die notwendige Bedingung ist viel einfacher zu prüfen als die hinreichende, nämlich daß die innere Region nur von Bildpunkten umgeben ist, die zur äußeren Region gehören. Die Einfachheit könnte es rechtfertigen, die Beziehung 'enthalten in' zuerst für Rechtecke aufzustellen und sie dann für Regionen zu verifizieren, die der notwendigen Bedingung genügen. Besonders klar würden sich sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung in einem Relativ ausdrücken, das Rechtecke als Bildsymbole enthält. Die Abbildungen 2.2.13 und 2.2.14 zeigen ein Beispiel für eine solche Struktur.

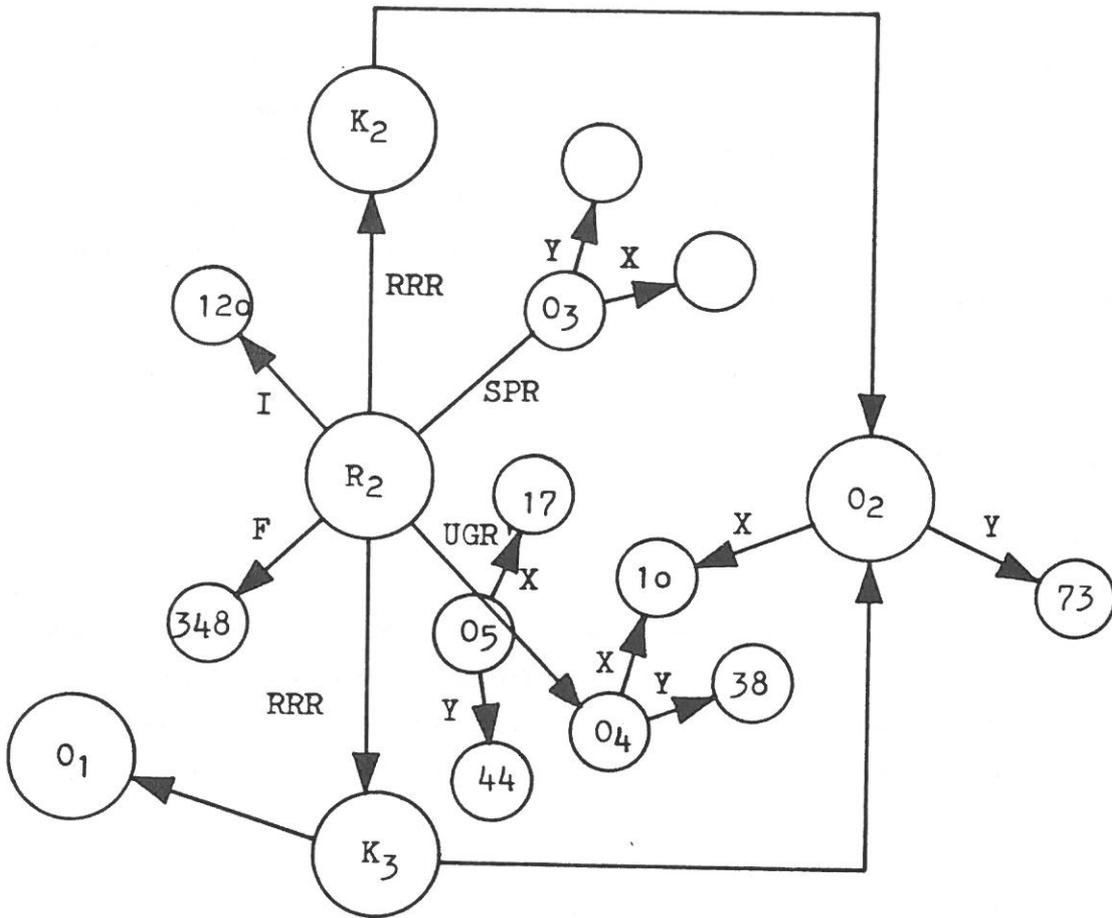


Abb. 2.12
Dreistellige Zusammenhangs-Relation

Abb. 2.13 Benachbarte und eingeschlossene Regionen

Abb. 2.14 Zugehöriges Relationengebilde

Die Enthalten-in-Relation (EHR) ist hier für Regionen und umgebende Rechtecke gleich bezeichnet. Ein ähnliches Verhältnis zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung gilt für die Nachbarschaft von Regionen. Hier müssen sich die umschreibenden Rechtecke notwendigerweise überlappen oder berühren.

Neben dem Wunsch, die passenden Trägerelemente für wichtige Relationen bereitzustellen, kann auch ein Analyseprozeß bestimmte Bildsymbole fordern. Um bei dem Beispiel der Rechtecke zu bleiben: Hogg subtrahiert Bilder einer Büroszene mit sich bewegendem Personen von der Aufnahme des leeren Büros [HOGG76]. Zusammenhängende Bereiche signifikanter Differenzen werden als Regionen extrahiert, deren wichtigste Beschreibung das umgebende Rechteck ist. Aus Lage- und Formveränderungen korrespondierender Rechtecke in der Differenzbildfolge versucht Hoggs Verfahren, den Handlungsablauf in der Szene automatisch zu ergründen.

Ein anderes Beispiel, in dem neben dem umschreibenden Rechteck der Schwerpunkt die auszuwertende Information trägt, ist die Arbeit von Levine und Youssef. Dort wird die Verschiebung des Schwerpunktes von Regionen benutzt, um die Bewegung von Blutzellen statistisch zu erfassen [LEVINE+YOUSSEF78]. Die den Blutzellen entsprechenden Regionen werden durch ein Schwellenwertverfahren vom Hintergrund separiert und ihre Merkmale nach einer Methode aus [ROSENFELD+KAK76] berechnet.

Eine Gruppe von Relationen stellt Lagebeziehungen zwischen Bildsymbolen auf, die sich unmittelbar aus den Zusammenhangs-Relationen ableiten lassen. So sind zwei Regionen benachbart, wenn sie einen gemeinsamen Rand besitzen; Eine Kante setzt eine andere fort, wenn beide einen gemeinsamen Endpunkt haben. Übrigens lassen sich beide Relationen formal leicht auseinander erzeugen. Die Nachbarschafts-Relation besitzt als

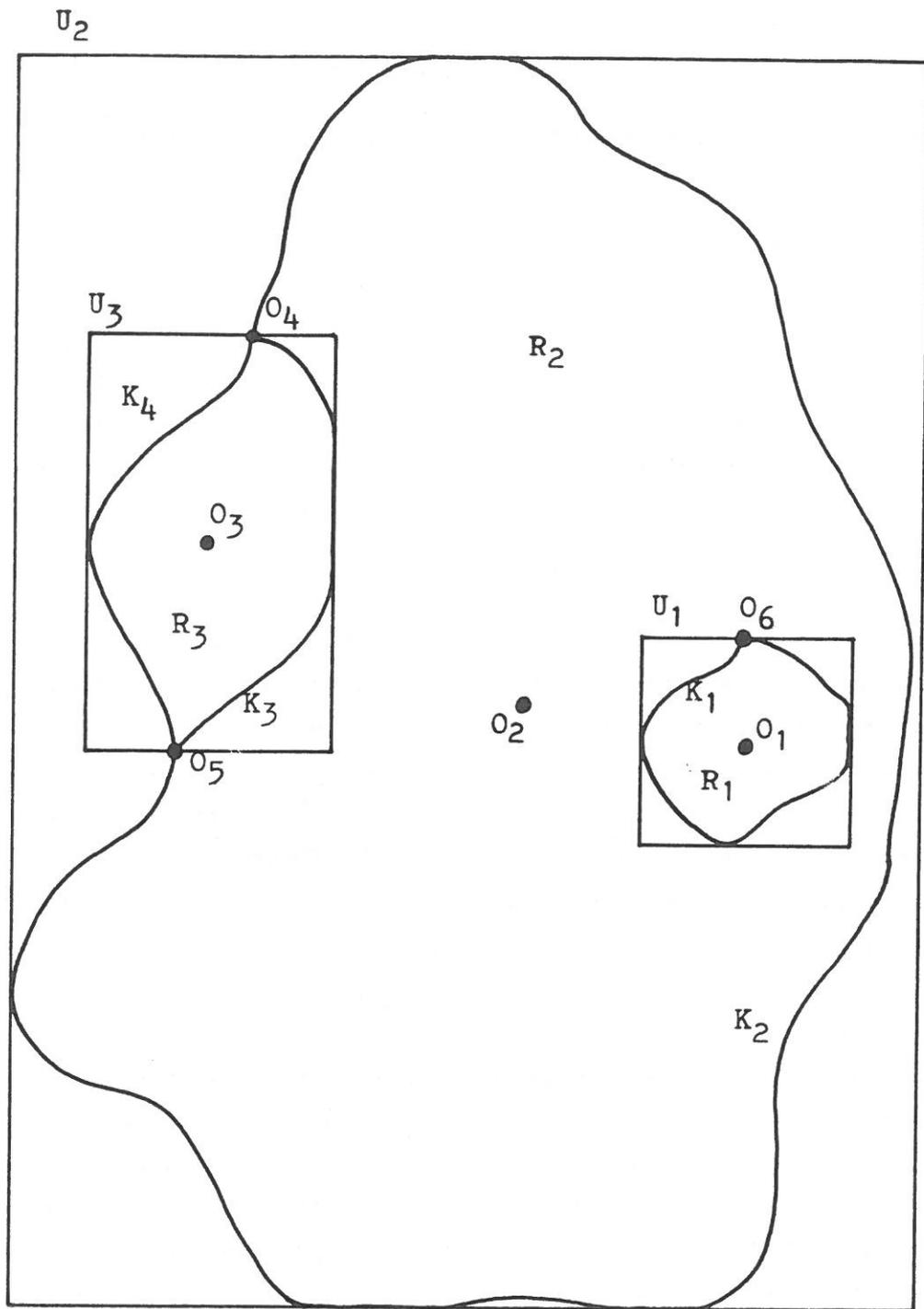


Abb. 2.13
Benachbarte und eingeschlossene Regionen

Repräsentation einen planaren, ungerichteten Graphen ('region adjacency graph' etwa bei [HOROWITZ+PAVLIDIS78]). Der geometrisch duale Graph [DE074] gibt an, welche Endpunkte durch eine Kante verbunden sind ('vertex adjacency graph').

Eine andere Gruppe benötigt zu ihrer Berechnung die Merkmalswerte von Bildsymbolen. Ob zwei Kanten parallel sind, läßt sich nur anhand des Kantenverlaufs feststellen. Die Lage einer Region bezüglich einer anderen, wie oberhalb oder links neben, wird häufig durch die relative Lage der beiden Schwerpunkte oder der umschreibenden Rechtecke bestimmt.

Sties et al. [STIES+76] zählen 14 topologische Relationen zwischen Örtern, Kanten und Regionen auf. Bei ihnen sind allerdings die Bildsymbole (dort p-, l- und r-Objekt genannt) unabhängig voneinander, also Kanten nicht nur Ränder von Regionen und Örter nicht nur Endpunkte von Kanten. Die Relationen sind:

- zwei Örter fallen aufeinander
- ein Ort liegt auf einer Kante
- ein Ort liegt auf dem Rand einer Region
- ein Ort liegt innerhalb einer Region

- eine Kante schneidet eine andere
- zwei Kanten fallen teilweise aufeinander
- eine Kante berührt eine Region
- eine Kante bildet stückweise den Rand einer Region
- eine Kante schneidet den Rand einer Region
- eine Kante liegt innerhalb einer Region

- eine Region berührt eine andere Region
- zwei Regionen besitzen einen stückweise übereinstimmenden Rand
- eine Region liegt teilweise in einer anderen
- eine Region liegt vollständig in einer anderen

Die inversen Relationen (siehe Definition 6) sind in der Liste nicht gesondert aufgeführt; sie sind zum Teil trivial, wenn die Relation symmetrisch (siehe Definition 13) ist (wie die erste in der Liste).

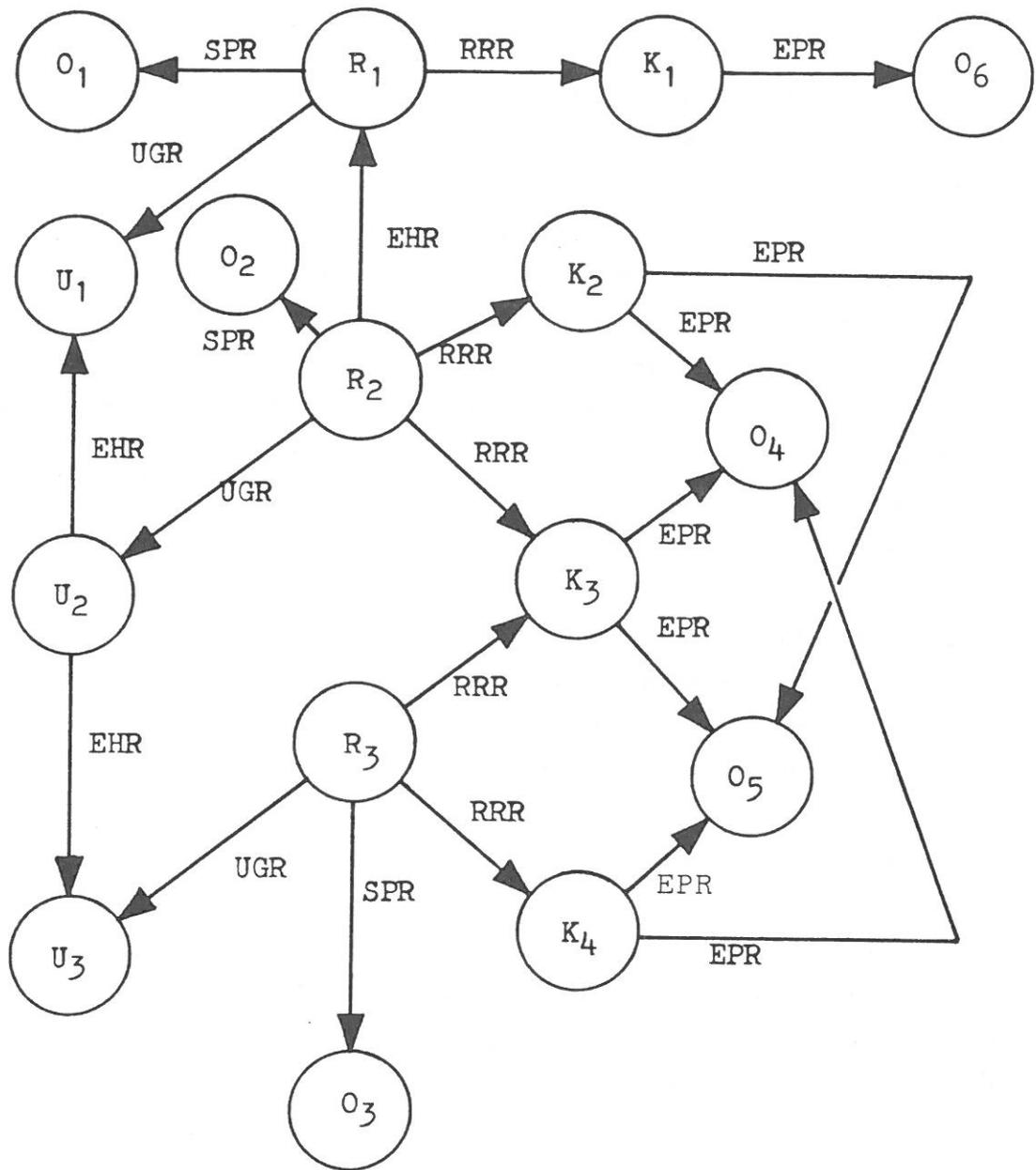


Abb. 2.14
Zugehöriges Relationengebilde

2.2.8 Bewertete Beziehungen

Zwei numerische Größen innerhalb einer mehrstelligen Relation werden häufig benutzt, um eine Beziehung zwischen Bildsymbolen näher zu kennzeichnen. Die eine verbindet eine Maßzahl mit der Aussage, daß zwei oder mehr Symbole in einer bestimmten Beziehung stehen. So wird die Aussage, daß eine Region größer ist als eine andere, mit dem Größenverhältnis bemaßt. Zu der Beziehung 'parallel' kann der Abstand der beiden beteiligten Kanten angegeben werden (siehe etwa die 'Parallel at a Distance'-Relation in [BALLARD+78]). Eine Vielzahl von ähnlichen Beispielen findet man in der Literatur. Die zweite Größe charakterisiert die Zuverlässigkeit der Beziehung. Hierbei ist im Einzelfall anzugeben, ob die Zuverlässigkeit der Existenz der Relation oder des Wertes der Relation gemeint ist.

In der Geometrie des gerasterten Bildes wird es nur in Spezialfällen Kanten geben, die der mathematischen Definition von parallel entsprechen. Wie nahe zwei Kanten dem Ideal kommen, kann durch das Zuverlässigkeitsmaß ausgedrückt werden, zum Beispiel als Funktion des Cosinus des eingeschlossenen Winkels oder durch die Variation des Abstandes der beiden Kanten. Eine der möglichen Formalisierungen dieses Konzepts der Zuverlässigkeit liegt in der Theorie der 'fuzzy sets' [ZADEH65], [ZADEH73], auch F-Mengen genannt, wie einer der gebräuchlichen deutschsprachigen Begriffe lautet [WAHLSTER77]. Die Elemente der Relation sind ja Elemente einer Teilmenge des geeigneten Kartesischen Produkts der Trägermenge des Relationengebildes. Wenn wir das Zuverlässigkeitsmaß als Wert einer Zugehörigkeitsfunktion auffassen, so wird dadurch die Relation zu einer F-Relation erweitert. Zu F-Relationen sind wie für F-Mengen neben Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplement auch Normierung und Ausschnittbildung definiert. Über einen Schwellenwert kann der Ausschnitt der F-Relation gebildet werden, der nur noch genügend zuverlässige Relationselemente enthält. Sei zwischen den Kanten unseres Beispiels ein Winkel θ definiert, so läßt sich die F-Relation 'f-parallel' für Kanten mit einem eingeschlossenen Winkel von weniger als etwa 20° bestimmen als

$$\text{f-parallel} = \{(k_1, k_2) \mid \cos^2 \theta > 0.9\}.$$

An dieser Stelle kann nicht diskutiert werden, wie Zugehörigkeitsfunktionen und Ausschnitte zu bilden sind, um die Aussage über die Zuverlässigkeit einer Beziehung in einen numerischen Wert zu übertragen. Es sei auf die Expertensysteme verwiesen als einem Teilgebiet, in dem solche Fragen sehr

sorgfältig untersucht werden.

Als ein Beispiel aus dem Bereich der Bildanalyse diene hier das in [BERTELSMEIER+RADIG77a,b] konzipierte und später in wesentlichen Teilen realisierte System [KRAASCH+ZACH79], [KRAASCH+79], [RADIG+80]. Dort ist es vorgesehen, die Eigenschaften von Bildsymbolen zu bewerten, etwa eine Kante durch den Kontrast in ihrer Umgebung. Die Güte eines ganzen Komplexes von Bildsymbolen, die anhand eines Modells gruppiert sind, wird berechnet als Anteil der gefundenen zu den im Modell geforderten Bildsymbolen. Durch eine Hierarchie von Konstruktionen können Teilkomplexe zu höheren Komplexen zusammengesetzt werden. Dabei beeinflusst eine Ausschnittbildung über einen Schwellenwert, der dort Akzeptanz genannt wird und individuell für jedes Teilmodell angebar ist, die Menge der Teilkomplexe mit genügend hoher Güte, die für eine Gruppierung auf höheren Hierarchieebenen weiter verwendet werden soll.

2.3 HIERARCHIE, INKARNATION UND KORRESPONDENZ

Bisher wurden Merkmale von Bildsymbolen und Beziehungen zwischen den Symbolen eines Bildes innerhalb von Relationengebilden ausgedrückt. Diese Gebilde werden nun um solche Relationen erweitert, die es ermöglichen, Gruppierungen von Symbolen zu beschreiben, korrespondierende Symbole oder Symbolgruppen aus verschiedenen Bildern einer Folge zu bezeichnen und die Verbindung zwischen Bild- und Modellstrukturen herzustellen.

2.3.1 Hierarchie

Eine einfache hierarchische Gruppierung von Symbolen läßt sich in einer Baumstruktur darstellen. Die Einbeziehung von Relationen zwischen Symbolen führt zu hierarchischen Graphen [FU80]. Für die Repräsentation von digitisierten Bilddaten haben in den letzten Jahren zunehmend Pyramidenstrukturen an Bedeutung gewonnen. Sind die Seitenlängen einer $n \times m$ Grauwertmatrix eine Zweierpotenz mit $n = n' \cdot 2^L$ und $m = m' \cdot 2^L$ und fassen wir die Pixel eines Bildes als elementare Symbole $(x, y, \text{Grauwert})$ auf, so lassen

sich jeweils vier miteinander benachbarte Symbole einer Hierarchieebene zu einem Symbol in der nächst höheren Ebene zusammenfassen, so daß alle Symbole einer niedrigen Ebene zu einem Symbol in der höheren Ebene gehören [TANIMOTO+PAVLIDIS75]. Verbinden wir jedes der vier Symbole mit seinem übergeordneten Symbol durch eine Teil-von-Relation, so erhalten wir einen Baum, dessen Blätter die Pixel sind und dessen Wurzel eine $n \cdot m$ -Gruppe von Symbolen ist. Diese Struktur wird (für quadratische Bilder) als 'quadtree' bezeichnet und es existieren Algorithmen zur Segmentation von Bildern, die auf solchen Bäumen arbeiten und Kanten sowie Regionen als Teilbäume repräsentieren ([SAMET80], [DYER+80] und die dort zitierte Literatur).

Solche Baumstrukturen bieten mehrere Vorteile. Algorithmen zu ihrer Manipulation wie Aufbau, Speichern und Durchsuchen können sich an zahlreichen Vorbildern orientieren (siehe z.B. [PAVLIDIS77]). Die Bilddaten stehen in verschiedenen Detaillierungsgraden zur Verfügung und erlauben grobe und feine Analysen der Bildstruktur ('planning' bei [KELLY71]). 'Viererbäume' sind besonders einfache planare Graphen. Für sie lassen sich beim Vergleich von Strukturen aus verschiedenen Bildern durch Graph- oder Subgraph-Isomorphie effizientere Methoden finden als für allgemeinere Graphen. Anwendungen von Viererbäumen auf die Analyse von Bildfolgen sind jedoch noch nicht bekannt.

Eine Pyramidenstruktur, die nicht durch ein Relationengebilde beschrieben werden kann, ist der 'recognition cone', den Uhr eingeführt hat [UHR72], [UHR+DOUGLASS79], [DOUGLASS81]. Auch hier wird die Grundebene durch die Pixelmatrix ('retina') gebildet. Operatoren transformieren die Eingangsdaten der niedrigeren Schicht in die nächsthöhere mit geringerer Auflösung bis eine Zelle an der Spitze der Pyramide das Resultat des Prozesses enthält. Dieser Entwurf ist nicht so sehr auf die Bilddatenrepräsentation als vielmehr auf die Interpretation ausgerichtet.

Ein wesentlich formaleres Konzept wurde in [BERTELSMEIER+RADIG77a,b] entworfen. Die elementaren Bildsymbole werden dort in einem Relationengebilde - genannt 'Skizze' - beschrieben. (Die Skizze und der Algorithmus zu ihrer Auslagerung auf Hintergrundspeicher weist Analogien zu dem in [CHANG+FU80b] beschriebenen Verfahren für verallgemeinerte, attributierte relationale Graphen auf.) Die Symbole werden durch einen Vergleich mit Prototypen, den 'Modellobjekten', zu 'Skizzenobjekten'

gruppiert. Die Hierarchie wird durch Teil-von-Relationen zwischen den Modellobjekten eingeführt. Eine Gruppe dieser Relationen, die vollständig die Zusammensetzung eines Modellobjektes beschreiben, heißt Konstruktion des Objektes. Durch die Konstruktion wird vorgeschrieben, in welcher Weise die Modellsymbole aus einer tieferen Hierarchieebene auf die Modellsymbole aus einer höheren Ebene abgebildet werden. Auf der untersten Schicht entsprechen sich elementare Bild- und Modellsymbole; etwa Bildregion, Bildkante und Bildort entsprechen Modellregion, Modellkante und Modellort.

Wir definieren ein Modellobjekt als Relationengebilde

$$MO = [MOM, (MOR1, \dots, MORp)].$$

Das Relationengebilde ist nach einem der in den vorigen Abschnitten angegebenen Muster aufgebaut. Die Trägermenge MOM enthält die Identifikatoren der Modellsymbole - etwa Elemente der Menge $ART \times N$ - und die in den Relationen MOR_i benötigten numerischen und nichtnumerischen Werte. Die Relationen MOR_i sind k_i -stellig, der Typ (siehe Definition 1) des Relativs ist also $\langle k_1, \dots, k_p \rangle$. Ein Modellobjekt ist die prototypische Beschreibung eines realen Objekts. Es reflektiert die Vorstellung des "Modellierers" davon, wie sich das reale Objekt in der symbolischen Beschreibung ausdrücken wird. Die Merkmalswerte der Modellsymbole sind also Erwartungswerte (nicht unbedingt im statistischen Sinne) für Merkmalswerte von Bildsymbolen, die bei der symbolischen Beschreibung des realen Objektes auftreten werden. Relationen zwischen Modellsymbolen sind Vorgaben für Beziehungen zwischen den Symbolen des Bildobjektes. Ein Bildobjekt ist die Sammlung von Bildsymbolen und ihren gegenseitigen Beziehungen, die das reale Objekt im Bild beschreiben.

Ähnlich wie wir in Abschnitt 2.2 Zusammenhangs-Beziehungen zwischen Bildsymbolen eingeführt haben, können wir nun Beziehungen zwischen Modellsymbolen herstellen, um Modellobjekte aus Komponenten zusammenzusetzen; MO' sei eine solche Komponente mit

$$MO' = [MOM', (MOR1', \dots, MORp')].$$

Wir konstruieren nun MO aus seinen Teilen durch Abbildungen (Teil-von), unter anderem $TV: MO' \rightarrow MO$. Folgende Bedingungen sind an diese Abbildungen zu stellen:

- Jede Abbildung TV ist eine zweistellige, rechts- und linkseindeutige Relation (siehe Definition 9).

- Die Relation TV zerfällt in Unterrelationen TV_0 bis TV_p' , wobei $TV_0 \neq \emptyset$ und $\exists(i): TV_i \neq \emptyset$. Dabei bildet TV_0 die Trägerelemente der beiden Relationengebilde ineinander ab, etwa $TV_0: MOM' \rightarrow MOM$. $TV_i: MORm' \rightarrow MORn$ überträgt die Relationselemente aus der Komponente MO' in das Modellobjekt MO . Die Stellenzahl der beiden Relationen soll gleich sein, außerdem sind Vorbereich und Nachbereich (siehe Definition 4) der TV_i disjunkt, da TV links- und rechtseindeutig ist.

- Die Abbildungen TV_i sollen miteinander verträglich sein, so daß gilt:

$$((mom_0', \dots, mom_p'), (mom_q, \dots, mom_r)) \in TV_i \rightarrow (mom_0', mom_q) \in TV_0, \dots, (mom_p', mom_r) \in TV_0.$$

Diese Eigenschaften gewährleisten, daß die Struktur der Komponente im Modellobjekt als Teilstruktur erhalten (falls alle Relationselemente aus MO' abgebildet werden, TV also linkstotal (siehe Definition 16) ist) oder zumindest erkennbar bleibt.

Eine weitere Forderung erleichtert die modellgesteuerte Analyse der Bilder. Die in den Relationselementen der Modelle angegebenen Merkmalswerte stellen im allgemeinen Selektoren dar, um Bildsymbole oder Bild-Relationselemente mit den gewünschten Eigenschaften auszuwählen. Solche Selektoren können beispielsweise Ober- und Untergrenzen von Wertebereichen oder Mittelwert und Streuung von Verteilungen sein. Sie sind umso selektiver, je kleiner das Intervall oder die Streuung (bei gleichem Mittelwert) sind.

- Enthält ein Relationselement einer Komponente solche Selektoren, so soll sein Bild im Modellobjekt mindestens ebenso selektiv sein.

Bei der Analyse mithilfe eines Modellobjektes werden passende Bild-Relationselemente ausgewählt, es geschieht also eine Zuordnung zwischen den Träger- und Relationselementen des Modell-Relationengebildes zum Bildrelativ. Ist das Modellobjekt aus Komponenten zusammengesetzt, kann der Aufwand für den Analyseprozeß vermindert werden unter der Annahme, daß für die Komponenten schon Zuordnungen zu Bildelementen vorhanden sind. Die Zuordnungen zwischen Elementen aus dem Bildrelativ und Elementen der jeweiligen Komponentenrelative können auf das Modellobjekt übertragen werden. Dadurch wird im allgemeinen die kombinatorische Vielfalt der

Zuordnungen vermindert gegenüber der Alternative, in der für jedes einzelne Relationselement des Modellobjektes ein passendes Element aus dem Bildrelativ gesucht wird [BARROW+72].

Für ein Beispiel einer Modellhierarchie gehen wir von Modelllinien und -Örtern aus, um das Modell eines Quadrates aufbauen zu können. Der Modellort ist ein Relationengebilde

ORTSMODELL = [MORT,XYORT] mit
 MORT = {'mo', (ox↓,oxf), (oy↓,oyf)} und
 XYORT = {'mo', (ox↓,oxf), (oy↓,oyf)}.

Das Bildsymbol wird mit 'mo' bezeichnet und die vier ox- und oy-Werte geben den zulässigen Koordinatenbereich an. Bei den Merkmalen einer Modelllinie (hier als Geradenstück angenommen) beschränken wir uns auf die Angabe von Längen- und Winkelintervallen, also

LINIENMODELL = [{'ml', (l1↓,l1f), (lw↓,lwf)}, {'ml', (l1↓,l1f), (lw↓,lwf)}].

Wir können eine "Kante" K aus einer Linie und ihren Endpunkten P und Q aufbauen.

KANTENMODELL = [MKANTE, (EPRKANTE, XYKANTE, LWKANTE)]
 MKANTE = {'mk', 'mp', 'mq', (px↓,pxf), (py↓,pyf), (qx↓,qxf), (qy↓,qyf),
 (k1↓,k1f), (kw↓,kwf)}
 EPRKANTE = {'mk', 'mp'}, {'mk', 'mq'}
 XYKANTE = {'mp', (px↓,pxf), (py↓,pyf)}, {'mq', (qx↓,qxf), (qy↓,qyf)}
 LWKANTE = {'mk', (k1↓,k1f), (kw↓,kwf)}

Die Hierarchie wird durch die Abbildungen TV^1_{0K} , TV^2_{0K} und $TVLK$ bestimmt; der Modellort wird zweimal als Komponente benötigt.

$TV^1_{0K} = {'mo', 'mp'}, ((ox↓,oxf), (px↓,pxf)), ((oy↓,oyf), (py↓,pyf))$
 bildet die Trägerelemente der beiden Örter aufeinander ab.

$TV^1_{1K} = {'mo', (ox↓,oxf), (oy↓,oyf)}, {'mp', (px↓,pxf), (py↓,pyf)}$
 ist die einelementige Abbildung der XY-Relationen.

$TV^2_{0K} = {'mo', 'mq'}, \dots$ und
 $TV^2_{1K} = {'mo', \dots}, {'mq', \dots}$

leisten dasselbe für den Ort P. Die Teil-von Relationen für die Linie sind:

$TVOLK = {'ml', 'mk'}, ((l1↓,l1f), (k1↓,k1f)), ((lw↓,lwf), (kw↓,kwf))$ und
 $TV1LK = {'ml', (l1↓,l1f), (lw↓,lwf)}, {'mk', (k1↓,k1f), (kw↓,kwf)}$.

Auf der nächsten Hierarchieebene werden zwei Kanten zu einer Ecke zusammengesetzt. Hier benötigen wir zwei gleiche Komponenten, die beiden Kanten werden mit TV^1_{KE} und TV^2_{KE} auf die Ecke abgebildet.

ECKENMODELL = [MECKE, (EPRECKE, XYECKE, LWECKE)]

MECKE = {'me', 'mf', 'mg', 'mh', 'mj',
 (ex↓, ex↑), (ey↓, ey↑), (fx↓, fx↑), (fy↓, fy↑), (gx↓, gx↑), (gy↓, gy↑),
 (hl↓, hl↑), (hw↓, hw↑), (jl↓, jl↑), (jw↓, jw↑)}

besteht aus drei Örtern und zwei Linien.

EPRECKE = {'mh', 'me'}, {'mh', 'mf'}, {'mj', 'mf'}, {'mj', 'mg'}}

Die Endpunkt-Relation bestimmt 'mf' zum Mittelpunkt der Ecke als gemeinsamen Endpunkt zweier Kanten.

XYECKE = {'me', (ex↓, ...)}, {'mf', (fx↓, ...)}, {'mg', (gx↓, ...)}

LWECKE = {'mh', (hl↓, hl↑), (hw↓, hw↑)}, {'mj', (jl↓, jl↑), (jw↓, jw↑)}

TV^1_{KE} = {'mk', 'mh'}, {'mp', 'me'}, {'mq', 'mf'},
 ((px↓, px↑), (ex↓, ex↑)), ((py↓, py↑), (ey↓, ey↑)),
 ((qx↓, qx↑), (fx↓, fx↑)), ((qy↓, qy↑), (fy↓, fy↑)),
 ((kl↓, kl↑), (hl↓, hl↑)), ((kw↓, kw↑), (hw↓, hw↑))

Die EPR-Elemente werden durch TV^1 abgebildet.

TV^1_{KE} = {'mk', 'mp'}, {'mh', 'me'}, {'mk', 'mq'}, {'mh', 'mf'}}

TV^2 überträgt die XY-Relation.

TV^2_{KE} = {'mp', (px↓, px↑), (py↓, py↑)}, {'me', (ex↓, ex↑), (ey↓, ey↑)},
 {'mq', (qx↓, qx↑), (qy↓, qy↑)}, {'mf', (fx↓, fx↑), (fy↓, fy↑)}

Schließlich wird die LW-Relation mit TV^3 abgebildet.

TV^3_{KE} = {'mk', (kl↓, kl↑), (kw↓, kw↑)}, {'mh', (hl↓, hl↑), (hw↓, hw↑)}

Der zweite Schenkel der Ecke wird ebenfalls durch eine Kante gebildet.

TV^2_{KE} = {'mk', 'mj'}, {'mp', 'mf'}, {'mq', 'mg'},
 ((px↓, px↑), (fx↓, fx↑)), ((py↓, py↑), (fy↓, fy↑)),
 ((qx↓, qx↑), (gx↓, gx↑)), ((qy↓, qy↑), (gy↓, gy↑)),
 ((kl↓, kl↑), (jl↓, jl↑)), ((kw↓, kw↑), (jw↓, jw↑))

TV^1_{KE} = {'mk', 'mp'}, {'mj', 'mf'}, {'mk', 'mq'}, {'mj', 'mg'}}

TV^2_{KE} = {'mp', (px↓, px↑), (py↓, py↑)}, {'mf', (fx↓, fx↑), (fy↓, fy↑)},
 {'mq', (qx↓, qx↑), (qy↓, qy↑)}, {'mg', (gx↓, gx↑), (gy↓, gy↑)}

TV^3_{KE} = {'mk', (kl↓, kl↑), (kw↓, kw↑)}, {'mj', (jl↓, jl↑), (jw↓, jw↑)}

Zwei Ecken lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, indem wir die beiden freien Endpunkte der beiden Ecken miteinander identifizieren. Außerdem fordern wir zwei neue Beziehungen LDIF und RW zwischen den vier Kanten. Ihre Längendifferenz soll genügend gering sein und der von jeweils zwei benachbarten Kanten eingeschlossene Winkel soll annähernd 90° betragen.

QUADMODELL = [MQUAD, (EPRQUAD, XYQUAD, LWQUAD, LDIFQUAD, RWQUAD)]

MQUAD = {'s1', 's2', 's3', 's4', 'o1', 'o2', 'o3', 'o4',
 (o1x↓, o1x↑), ..., (o4y↓, o4y↑), (s1l↓, s1l↑), ..., (s4w↓, s4w↑),
 (ld↓, ld↑), (rw↓, rw↑)}

EPRQUAD = (('s1', 'o1'), ('s1', 'o2'), ('s2', 'o2'), ('s2', 'o3'), ('s3', 'o3'),
 ('s3', 'o4'), ('s4', 'o4'), ('s4', 'o1'))

XYQUAD = (('o1', (o1x↓, o1x↑), (o1y↓, o1y↑)), ..., ('o4', (o4x↓, o4x↑), (o4y↓, o4y↑)))

LWQUAD = (('s1', (s1l↓, s1l↑), (s1w↓, s1w↑)), ..., ('s4', (s4l↓, s4l↑), (s4w↓, s4w↑)))

LDIFQUAD = (('s1', 's2', (ld↓, ld↑)), ('s2', 's3', (ld↓, ld↑)),
 ('s3', 's4', (ld↓, ld↑)), ('s4', 's1', (ld↓, ld↑)))

RWQUAD = ('s1', 's2', (rw↓, rw↑)), ('s2', 's3', (rw↓, rw↑)),
 ('s3', 's4', (rw↓, rw↑)), ('s4', 's1', (rw↓, rw↑)))

Wiederum werden zwei gleiche Komponenten benötigt, um das Quadrat zu bilden. Die beiden Abbildungen TV^1EQ und TV^2EQ vermitteln den hierarchischen Übergang, $TV0$ für die Trägerelemente, $TV1$ für die EPR-, $TV2$ für die XY- und $TV3$ für die LW-Relationen.

$TV0^1EQ$ = (('mh', 's1'), ('mj', 's2'), ('me', 'o1'), ('mf', 'o2'), ('mg', 'o3'),
 ((ex↓, ex↑), (o1x↓, o1x↑)), ..., ((gy↓, gy↑), (o3y↓, o3y↑)),
 ((hl↓, hl↑), (s1l↓, s1l↑)), ..., ((jw↓, jw↑), (s2w↓, s2w↑)))

$TV1^1EQ$ = ((('mh', 'me'), ('s1', 'o1')), (('mh', 'mf'), ('s1', 'o2'))),
 (('mj', 'mf'), ('s2', 'o2')), (('mj', 'mg'), ('s2', 'o3')))

$TV2^1EQ$ = (((('me', (ex↓, ex↑), (ey↓, ey↑)), ('o1', (o1x↓, o1x↑), (o1y↓, o1y↑))), ...)

$TV3^1EQ$ = (((('mh', (hl↓, hl↑), (hw↓, hw↑)), ('s1', (s1l↓, s1l↑), (s1w↓, s1w↑))), ...)

$TV0^2EQ$ = (('mh', 's3'), ('mj', 's4'), ('me', 'o3'), ('mf', 'o4'), ('mg', 'o1'),
 ((ex↓, ex↑), (o3x↓, o3x↑)), ..., ((gy↓, gy↑), (o1y↓, o1y↑)),
 ((hl↓, hl↑), (s3l↓, s3l↑)), ..., ((jw↓, jw↑), (s4w↓, s4w↑)))

$TV1^2EQ$ = (((('mh', 'me'), ('s3', 'o3')), (('mh', 'mf'), ('s3', 'o4'))),
 (('mj', 'mf'), ('s4', 'o4')), (('mj', 'mg'), ('s4', 'o1')))

$TV2^2EQ$ = (((('me', (ex↓, ex↑), (ey↓, ey↑)), ('o3', (o3x↓, o3x↑), (o3y↓, o3y↑))), ...)

$$TV3^2EQ = \{ (('mh', (h1\downarrow, h1\uparrow), (hw\downarrow, hw\uparrow)), ('s3', (s31\downarrow, s31\uparrow), (s3w\downarrow, s3w\uparrow))), \dots \}$$

Für die hier angegebenen Teil-von Relationen sind die vorher aufgestellten Bedingungen erfüllt, wenn gilt, daß die Intervallgrenzen der Eigenschaftswerte, die ein Relationselement enthält, in einer höheren Hierarchieebene auf mindestens ebenso selektive Werte abgebildet werden. Ist etwa durch $k1\downarrow$ und $k1\uparrow$ der Längenbereich einer Kante eingeschränkt, so muß für die Seiten der Ecke gelten: $k1\downarrow \leq h1\downarrow$, $k1\uparrow \geq h1\uparrow$, $k1\downarrow \leq j1\downarrow$, $k1\uparrow \geq j1\uparrow$. Dadurch ist sichergestellt, daß alle Kanten im Bild, die für das Kantenmodell gefunden wurden, auch Kandidaten für die Seiten von Ecken in Frage kommen. Gilt die Gleichheit der Intervallgrenzen, so kann auf der hierarchisch höheren Ebene auf eine erneute Überprüfung der Eigenschaftswerte sogar gänzlich verzichtet werden. In der Abbildung 2.15 sind die Modellsymbole auf den verschiedenen Ebenen übereinander angeordnet. Die Beziehungen zwischen den Symbolen einer Ebene sind eingezeichnet. Von den Teil-von Relationen sind nur die Abbildungen TV0 zwischen den Symbolen dargestellt.

Abb. 2.15 Teil-von Beziehung zwischen Modellsymbolen

2.3.2 Inkarnationen

Der Zweck der Modelle ist es, als Muster für Strukturen zu dienen, die in der symbolischen Beschreibung von Bildern wiedergefunden werden sollen. Dieses Wiederfinden geschieht über einen Vergleich von Relationengebilden, nämlich denen der Modellhierarchie und denen der Bilder. Der Vergleich soll möglichst vollständige "Inkarnationen" eines Modells erbringen. Jedem Relationselement des Modells soll ein entsprechendes Relationselement im Bild zugeordnet sein. 'Entsprechend' heißt in diesem Zusammenhang, daß die zugeordneten Relationselemente und damit auch die Symbole und Merkmale die im Modell vorgesehene Bedeutung haben. So wird es sinnvoll sein, nur solche Relationselemente, die eine Endpunkt-Beziehung zwischen Linien und Örtern im Bild ausdrücken, solchen Relationselementen im Modell zuzuordnen, die ebenfalls Linien und Örter in die Endpunkt-Beziehung setzen. Dabei ist es

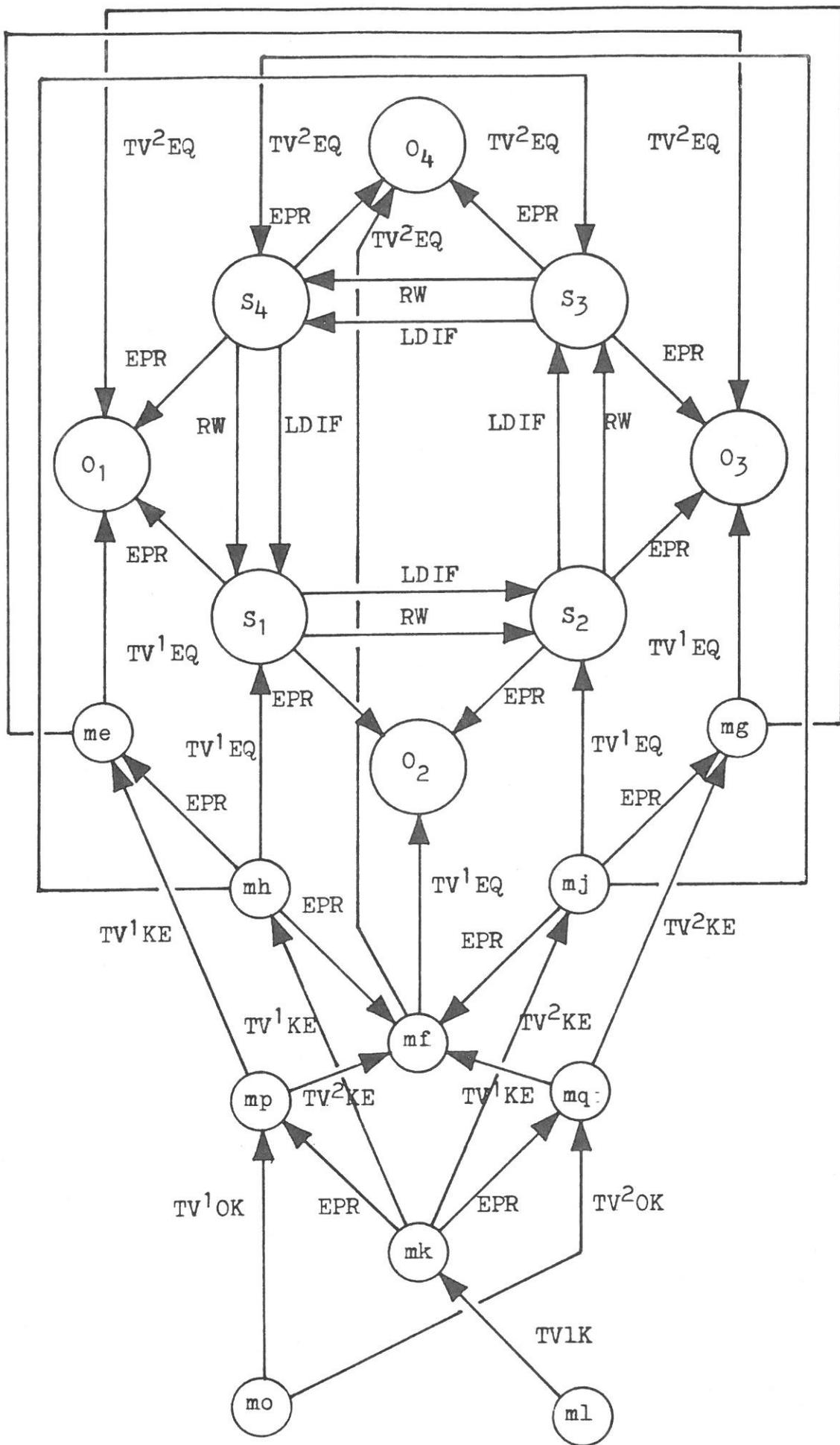


Abb. 2.15
 Teil-von Beziehung zwischen Modellsymbolen

weiterhin sinnvoll, Modellörter auf Bildörter und Modelllinien auf Bildlinien abzubilden. Dabei müssen die im Bild gefundenen Merkmalswerte der Symbole den im Modell vorgegebenen Einschränkungen genügen.

In Analogie zu der Teil-von Beziehung zwischen Relationengebilden auf den verschiedenen Ebenen der Modellhierarchie können wir eine Inkarnationsrelation 'INK' zwischen Modell- und Bildrelativen einführen. Es sind ganz ähnliche Anforderungen an die INK-Relation zu stellen wie an die TV-Relation.

- Jede Abbildung INK zwischen einem Modellobjekt und einer seiner Inkarnationen ist eine zweistellige, links- und rechtseindeutige Relation (siehe Definition 9).
- Die Relation INK zerfällt in Unterrelationen INK_0 bis INK_p . Dabei bildet INK_0 die Trägerelemente des Modellrelatives in die des Bildrelatives ab. Die restlichen p Unterrelationen vermitteln die Abbildung zwischen den Relationselementen der p Modellrelationen und den Elementen der entsprechenden Bildrelationen.
- Die Verträglichkeitsbedingung besagt wiederum, daß die aufgrund der Abbildung der Relationselemente vorgefundene Zuordnung der Trägerelemente in INK_0 enthalten sein muß.

Wir bezeichnen den Ausschnitt des Bildrelatives, der über Inkarnationsrelationen einem Modellobjekt zugeordnet ist, als Skizzenobjekt. beim Aufbau der Skizzenobjekte komplexer Modelle hilft deren hierarchische Zerlegung in Komponenten, da hierdurch die Inkarnationsrelation inkrementell aufgebaut werden kann. Die Elemente der Inkarnationsrelation, die schon für ein Teilmodell vorliegen, werden mit Hilfe der Teil-von Relation in die Inkarnation eines hierarchisch darüberliegenden Modells übernommen. Für das übergeordnete Modell sind nur in drei Fällen zusätzliche Prüfungen erforderlich:

- Das Relationselement im übergeordneten Modell enthält selektivere Spezifikatoren für Merkmalswerte. Dann ist zu prüfen, ob die zum Teilmodell inkarnierten Bildmerkmale auch die engeren Bedingungen erfüllen.

- Das Modell enthält neue Relationselemente, für die also noch keine Teil-von Beziehung zu einem Teilmodell existieren können. Die Existenz entsprechender Relationselemente im Bild ist nachzuweisen. Im Beispiel des vorigen Abschnitts tauchen solche Relationselemente für die Längen- und Winkeldifferenzen (LDIF und RW) zwischen den Schenkeln einer Ecke (Teilmodell) im Modellquadrat auf.
- Das Modell enthält Relationselemente, deren Komponenten Trägerelemente aus verschiedenen Teilmodellen sind. In demselben Beispiel sind das die Längen- und Winkeldifferenz zwischen den Schenkeln zweier verschiedener Ecken, die im Quadrat zusammenstoßen.

Das Beispiel des vorigen Abschnitts dient zu einer kurzen Illustration. Betrachten wir zwei Örter aus XYBILD, ('bo1',x1,y1) und ('bo2',x2,y2) sowie eine Linie aus LWBILD, ('bl1',l1,w1). Die beiden Örter sind Inkarnationen des Ortsmodells. Das Modell schreibt nur Intervalle für die Koordinaten vor; ein Ort, um die Inkarnation des Modells zu sein, muß genügend gut dazu passende Koordinatenwerte aufweisen. Wir können den Begriff 'genügend gut' durch ein Konfidenzmaß angeben.

$$k_x = (x\uparrow - x\downarrow) / (|x\uparrow - x| + |x - x\downarrow|)$$

$$k_y = (y\uparrow - y\downarrow) / (|y\uparrow - y| + |y - y\downarrow|)$$

$$k_{xy} = k_x * k_y$$

ist eine der vielen Möglichkeiten, um einen zwischen 0 und 1 normierten Konfidenzwert zu berechnen, wobei 1 erreicht wird, wenn beide Koordinatenwerte innerhalb des jeweiligen Intervalls liegen. Ergänzt durch das Konfidenzmaß wird die Inkarnationsbeziehung zu einer F-Relation (siehe die kurze Diskussion im Abschnitt 2.2.8), wobei dann über die Ausschnittbildung festzulegen ist, welche Paare Ortsmodell-Bildort als Inkarnation akzeptiert werden.

Wir fordern einmal $k_{xy} = 1$. Wenn $ox\downarrow \leq x1 \leq ox\uparrow$, $oy\downarrow \leq y1 \leq oy\uparrow$, $ox\downarrow \leq x2 \leq ox\uparrow$ sowie $oy\downarrow \leq y2 \leq oy\uparrow$, dann sind beide Örter Inkarnationen des Ortsmodells, also

$$\text{INKO}^1_{\text{ORT}} = \{('mo', 'bo1'), ((ox\downarrow, ox\uparrow), x1), ((oy\downarrow, oy\uparrow), y1)\}$$

$$\text{INK1}^1_{\text{ORT}} = \{(('mo', (ox\downarrow, ox\uparrow)), (oy\downarrow, oy\uparrow)), ('bo1', x1, y1)\}$$

und

$$\text{INKO}^2_{\text{ORT}} = \{('mo', 'bo2'), ((ox\downarrow, ox\uparrow), x2), ((oy\downarrow, oy\uparrow), y2)\}$$

$$\text{INK1}^2_{\text{ORT}} = \{(('mo', (ox\downarrow, ox\uparrow)), (oy\downarrow, oy\uparrow)), ('bo2', x2, y2)\}$$

Ist die Bildlinie eine Inkarnation des Linienmodells, so sind für die drei Komponenten des Kantenmodells Inkarnationen vorhanden. Mit Hilfe der Teil-von Relationen TV^1OK , TV^2OK und $TVLK$ können wir die Inkarnationen des Kantenmodells aufbauen. Auf jeden Fall muß überprüft werden, ob die beiden Bildörter Endpunkte der Bildlinien sind, also $(b11', b01') \in EPRBILD$ und $(b11', b02') \in EPRBILD$. Ist das der Fall und gilt weiterhin, daß die Koordinaten-, Längen- und Winkelangaben im Kantenmodell nicht selektiver sind als diejenigen im Orts- beziehungsweise Linienmodell, also $px\downarrow = qx\downarrow = ox\downarrow$, $px\uparrow = qx\uparrow = ox\uparrow$, $py\downarrow = qy\downarrow = oy\downarrow$, $py\uparrow = qy\uparrow = oy\uparrow$, $ll\downarrow = kl\downarrow$, $ll\uparrow = kl\uparrow$, $lw\downarrow = kw\downarrow$ und $lw\uparrow = kw\uparrow$, dann ist damit schon eine Inkarnation des Kantenmodells gefunden. Im anderen Fall, jedoch bei eingehaltener Endpunkt-Beziehung im Bild, müssen die Konfidenzwerte neu berechnet werden. Anhand der Ergebnisse kann dann entschieden werden, ob die drei Bildsymbole eine Inkarnation des Kantenmodells sind.

In [KRAASCH+ZACH79] werden die Konfidenzwerte mit Gewichtungsfaktoren versehen, mit deren Hilfe die Bedeutung von Teilmodellen für das ganze Modell beschrieben werden kann. Eine aus diesen Werten gebildete Güte einer Inkarnation wird benutzt, um mit Hilfe einer für das Modell angebbaren 'Akzeptanz' zu ungenügende Inkarnationen zu eliminieren.

2.3.3 Korrespondenz

Bisher wurden in dem Formalismus der Relationengebilde Strukturen von Bildsymbolen, hierarchische Anordnungen von Modellsymbolen zur Verwendung als Prototypen und Inkarnationen als Verbindung zwischen Bild- und Modellstruktur beschrieben. Die letzte, wichtige Gruppe von Relationen erfaßt die bildübergreifenden Beziehungen, die wesentlich für die Analyse von Bildfolgen sind. Im folgenden werden - ohne zu große Einschränkung der Allgemeinheit - nur Bildfolgen herangezogen, die zeitlich veränderliche Strukturen beschreiben. Bildfolgen, die räumliche Strukturen beschreiben, wie etwa Schichtaufnahmen in der Computer-Tomographie, bleiben hier nur deswegen unberücksichtigt, um nicht in jeder Aussage sprachliche Varianten für beide Arten der dritten Dimension - Raum oder Zeit - mitführen zu müssen. Natürlich sind verschiedene Beziehungen zwischen den Bildern einer Folge einzuführen, je nachdem ob die Bilder entlang der Zeit- oder der

Raumachse gestaffelt sind. Dem Vergleich der Bilder einer Folge liegt der Gedanke der Suche nach ähnlichen Strukturen zugrunde. Hierzu gehören Verfahren, die Nagel in seinen Übersichtsartikeln als 'similarity search' bezeichnet hat, wobei eventuell 'dissimilarity grading' vorausgeht oder folgt [NAGEL78], [RADIG+NAGEL81].

Drei Fragen sind für das Korrespondenzproblem zu beantworten:

- Welche Strukturen sollen verglichen werden und wie werden sie repräsentiert?
- Wie wird Ähnlichkeit definiert? Gleichbedeutend damit ist die Frage nach den invarianten Substrukturen und Struktureigenschaften, die es gestatten, Strukturen aus verschiedenen Bildern einander sicher zuzuordnen.
- Welche Suchverfahren sind geeignet, um ähnliche Strukturen aus verschiedenen Bildern aufzufinden?

Auf die dritte Frage wird im nächsten Kapitel eingegangen. Alle drei Fragen sind grundlegend für die Verarbeitung von Bildfolgen und wohl für jede denkbare Variation von Bildvorlagen nicht allgemein beantwortbar. Hier soll deshalb nur dargestellt werden, wie sich Korrespondenzbeziehungen innerhalb von Relationengebilden darstellen lassen.

Bisher wurden drei Klassen von relationalen Strukturen unterschieden, die Bildbeschreibung durch Bildsymbole, die Repräsentation der Modelle und die Inkarnationen. Individuelle Bildsymbole und Inkarnationen existieren für jedes Bild einer Folge. Neben bildunabhängigen Modellen, wie es in den Beispielen die Ecke und das Dreieck waren, kann es Modelle geben, die genau für ein Bild konstruiert sind. In [KRAASCH+ZACH79] etwa wird aus dem Relationengebilde der Skizze eines Bildes automatisch ein Modell für das nachfolgende Bild generiert, über dessen Inkarnation (genauer: die nach Gütekriterien selektierte beste von eventuell mehreren Inkarnationen) die Korrespondenz von Bildsymbolen gewonnen wird. Winston erzeugt aus einer Folge von relational beschriebenen Bildern, die Beispiele und Gegenbeispiele von "zu lernenden" Gegenständen enthalten, eine Folge von Modellen, die den Gegenstand in seiner wesentlichen Struktur immer enger spezifizieren [WINSTON75b].

Für alle drei erwähnten Klassen ist es sinnvoll, Korrespondenzbeziehungen herzustellen.

2.3.4 Korrespondenz zwischen Bildsymbolen

In [JAIN+NAGEL79] sind Bildausschnitte von 4×6 Pixeln elementare Bildsymbole. Korrespondenz wird zwischen zwei solchen Bildausschnitten am gleichen Ort in verschiedenen Bildern hergestellt, bei denen ein Likelihoodmaß, das Mittelwert und Streuung in den beiden Ausschnitten bewertet, genügend Ähnlichkeit signalisiert. Zwei Äquivalenzklassen bilden sich heraus; in der einen sind die Symbole enthalten, die eine Korrespondenzbeziehung zu ihren zeitlichen Nachbarn aufweisen, die andere enthält die übrigen. In der letzteren Äquivalenzklasse sind solche Bildausschnitte versammelt, für die der Grauwertverlauf in zwei Bildern signifikante Unterschiede aufweist. Örtlich in jedem Bild zusammenhängende Bereiche von diesen Ausschnitten werden über alle Bilder der Folge ausgewertet, um Bildmasken zu gewinnen, die Projektionen von sich bewegenden Gegenständen abdecken.

Die Gaußsche Krümmung der Bildfunktion dient in [DRESCHLER81a,b] dazu, markante Punkte in der Projektion eines Objektes zu finden. Zwischen solchen Symbolen, die etwa als lokale Extremwerte der Krümmung definiert sind, aus zeitlich benachbarten Bildern wird die Korrespondenz durch ein Relaxationsverfahren ermittelt. Aus den Koordinaten von Punktgruppen mit ungefähr gleichen Verschiebungsvektoren wird eine dreidimensionale Beschreibung des sich bewegenden Gegenstandes berechnet.

Die Invarianz der relativen Position von Regionen wird in [RADIG81c] ausgenutzt, um bewegte Objekte zu verfolgen. Diese Invarianz zusammen mit einer robusten Ähnlichkeitsfunktion hilft, Störungen wie teilweise oder vollständige Verdeckung und die damit verbundene Formveränderung der Regionen zu überwinden.

Im ersten Beispiel genügt es, die Korrespondenz zwischen den Bildausschnitten als zweistellige Relation zu notieren, da nur ausgewertet wird, ob Korrespondenz zwischen zwei Ausschnitten existiert oder nicht. Notiert man die Relation als (Bild-)Matrix, die eine 0 an den Stellen enthält, die korrespondierende Bildausschnitte bezeichnen, und addiert man diese Matrizen (algebraisch) für jeden Bildvergleich, so erhält man die 'first order difference pictures' [JAIN+NAGEL79], die Grundlage für die weitere Auswertung sind.

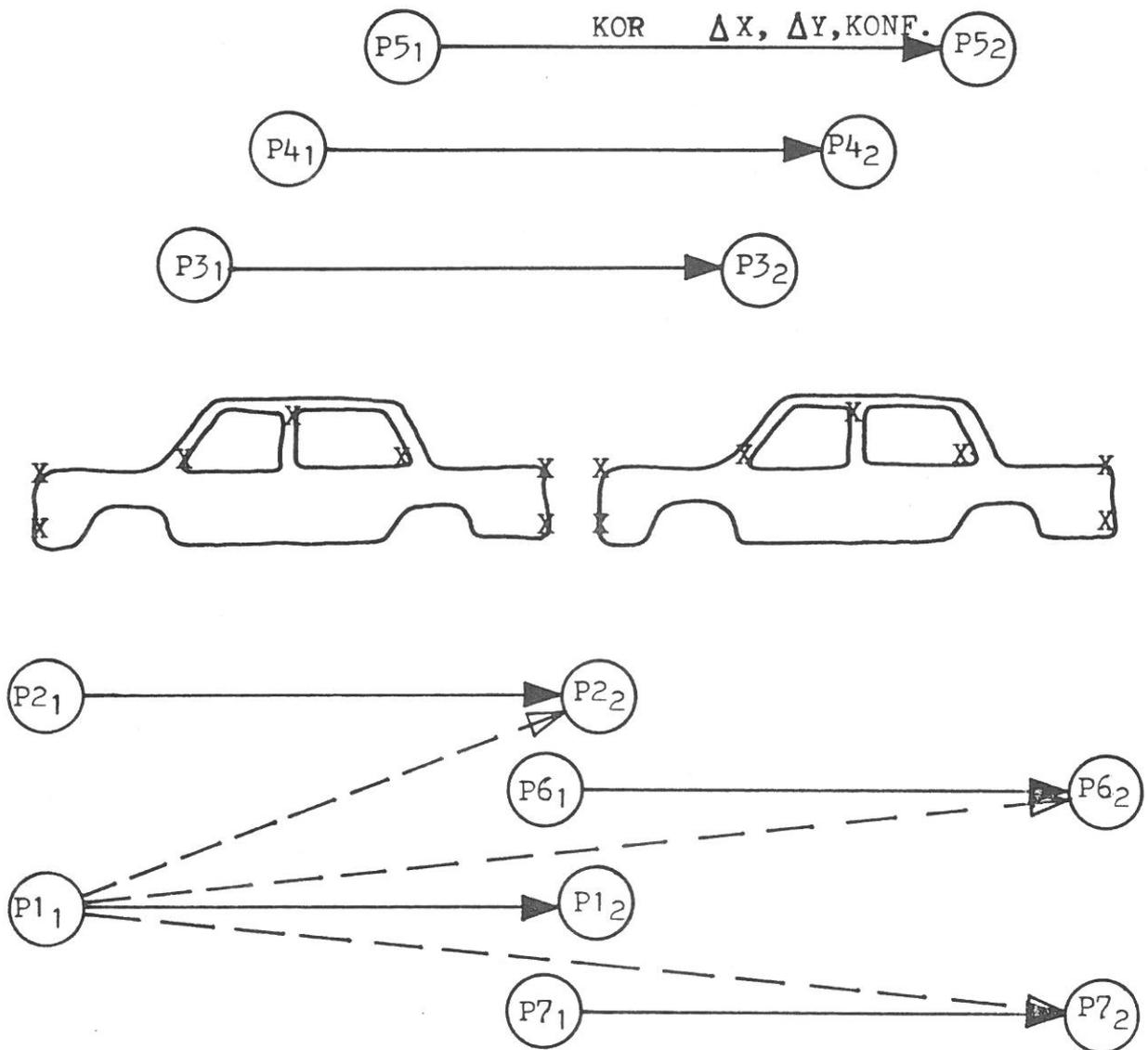


Abb. 2.16
Korrespondenz zwischen markanten Punkten

Im zweiten Beispiel muß die Korrespondenzrelation mit Attributen versehen werden, um das Relaxationsverfahren zu steuern. Notwendig sind die Koeffizienten des Verschiebungsvektors, die durch ein hypothetisch korrespondierendes Punktepaar gegeben sind, und ein Maß für die Konfidenz der jeweiligen Paarzuordnung. Die Analogie zu einer F-Relation ist hier gegeben. Nach genügend vielen Relaxationszyklen hat jeder Punkt im früheren Bild höchstens einen Nachfolger (selektiert durch das Konfidenzmaximum) im nachfolgenden Bild (durchgezogene Pfeile in Abb. 2.16).

Abb. 2.16 Korrespondenz zwischen markanten Punkten. Gestrichelt: einige der Korrespondenzrelationselemente, die nicht die maximale Konfidenz erreichten.

Im dritten Beispiel ist die Korrespondenzrelation vielstellig, dort Regions-Sequenz genannt. Sie hat so viele Stellen wie die Bildfolge Bilder enthält. Die Elemente sind Tupel von Regionen, die untereinander die größte Ähnlichkeit aufweisen. Für Regionen, die zeitweise nicht aus einigen Bildern extrahiert werden konnten, wird die 'Nullregion' an den diesen Bildern entsprechenden Stellen der Relationstupel substituiert. Merkmale der Relation sind unter anderem die Durchschnittsgeschwindigkeit der Region, die einen Teil der Projektion eines Gegenstandes beschreibt (Abb. 2.17).

Abb. 2.17 Regions-Sequenz als vielstellige Korrespondenzrelation

Zur Darstellung der Korrespondenzrelation wurde ein neues Symbol 'SEQ' geschaffen, dem die Regionen über zweistellige Relationen und dem die Merkmale zugeordnet sind. Solche Sequenzen können gruppiert werden, wenn mehrere Regionen einen Gegenstand beschreiben. So wird in [RADIG81b] ein die Straße überquerender Fußgänger durch drei Sequenzen modelliert, die jeweils Kopf, Rumpf und Beine als Regionsfolge enthalten.

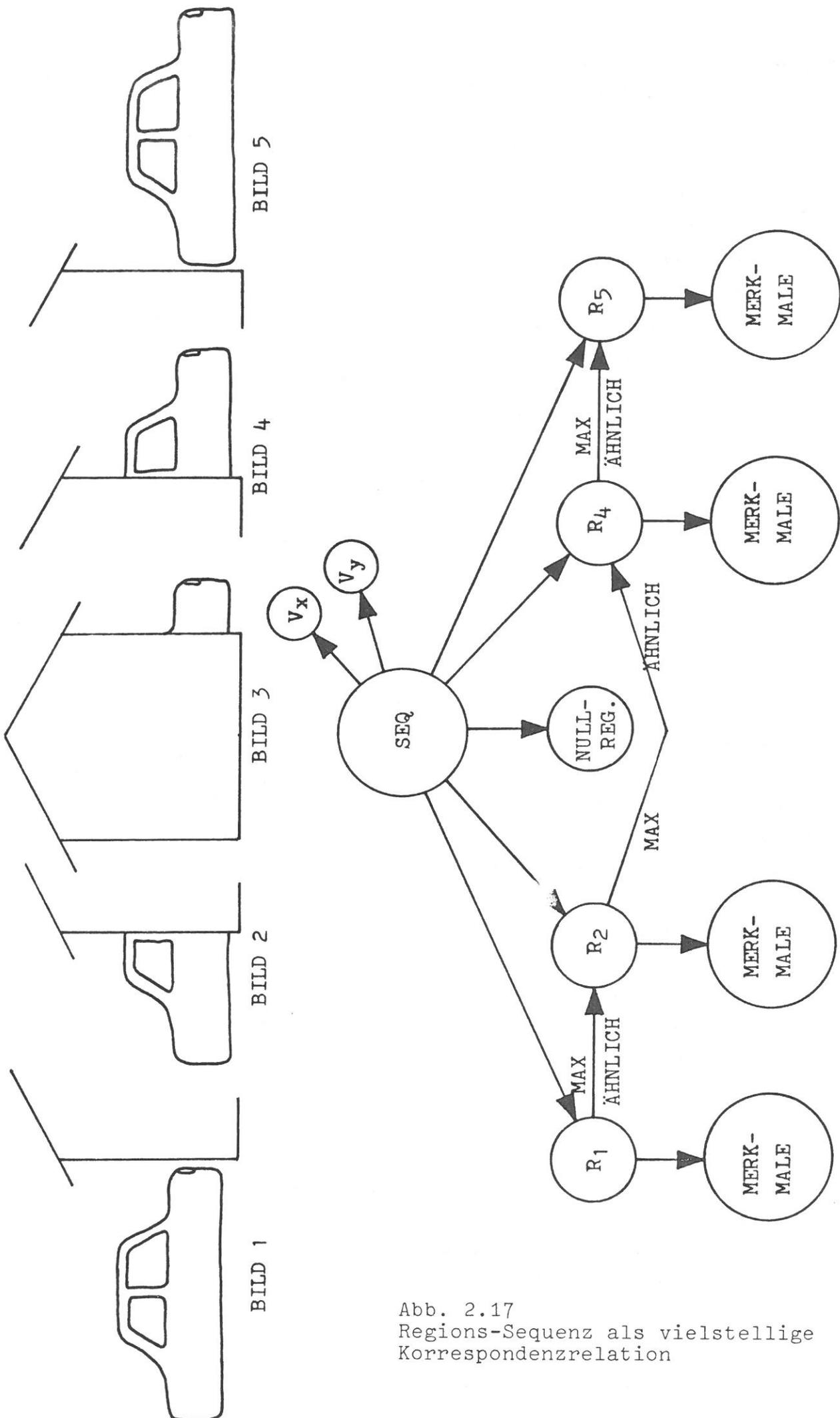


Abb. 2.17
 Regions-Sequenz als vielstellige
 Korrespondenzrelation

2.3.5 Korrespondenz zwischen Inkarnationen

Im Falle der modellgesteuerten Analyse von Bildfolgen bieten sich die Inkarnationen als Träger der Korrespondenzrelation an. Zwei Gründe sprechen dafür. Zum einen werden nur die für die Analyse interessanten Strukturen erfaßt; Bildsymbole, die keinem Modellsymbol zugeordnet sind, können unberücksichtigt bleiben. Zum anderen sind Inkarnationen eindeutige Strukturen, auch wenn konkurrierende Interpretationshypothesen vorhanden sind. Bildsymbole können verschiedenen Modellsymbolen gleichzeitig zugeordnet sein; eine Konsequenz davon ist die mögliche Koexistenz von mehreren Korrespondenzbeziehungen solcher Symbole untereinander.

Um die Anschaulichkeit zu erhöhen, verwandeln wir, wie schon in den vorangegangenen Abschnitten an anderen Relationen demonstriert, die Inkarnationsrelation zu Inkarnationssymbolen. Damit kreieren wir neben dem Modell- und dem Skizzenobjekt das Inkarnationsobjekt. Die Relation 'VON' verbindet die Symbole eines Modells mit den zugehörigen Symbolen der Inkarnationsobjekte. Die Relation 'ZU' verbindet wiederum die Inkarnationssymbole mit den Bildsymbolen. Wurden unvollständige Inkarnationen gefunden, so fehlt für eine Teilmenge der Inkarnationssymbole der Bezug zu den Bildsymbolen. Die Relation 'ZU' ist rechsteindeutig, die Relation 'VON' ist linkseindeutig (siehe Definition 9.). Die Konfidenz der über ein Inkarnationssymbol hergestellten Zuordnung zwischen Modell- und Bildsymbol kann als Merkmal dem Inkarnationssymbol beigegeben werden.

Formal kann ein Inkarnationsobjekt folgendermaßen definiert werden: MO sei ein Relationengebilde, das ein Modellobjekt beschreibt, $MO = [MOM, (MOR1, MOR2, \dots)]$. Ein Inkarnationsobjekt dieses Modells wird dann beschrieben durch ein isomorphes Relativ (siehe Definition 11)

$$IO = [IOM, (IOR1, IOR2, \dots)] \text{ mit}$$

$$IOM = \{(m' \mid \wedge (m \in MOM): \exists (m'): m' = VON(m))\} \text{ und}$$

$$IORi = \{(m_1', m_2', \dots) \mid (VON^{-1}(m_1'), VON^{-1}(m_2'), \dots) \in MORi\}.$$

Die Trägerelemente des Inkarnationsobjektes entsprechen eindeutig den Trägerelementen des Modellobjektes, Elemente aus den Modellrelationen $MORi$ werden umkehrbar eindeutig auf die Elemente aus $IORi$ abgebildet, die Relationengebilde MO und IO sind natürlich homolog (siehe Definition 14).

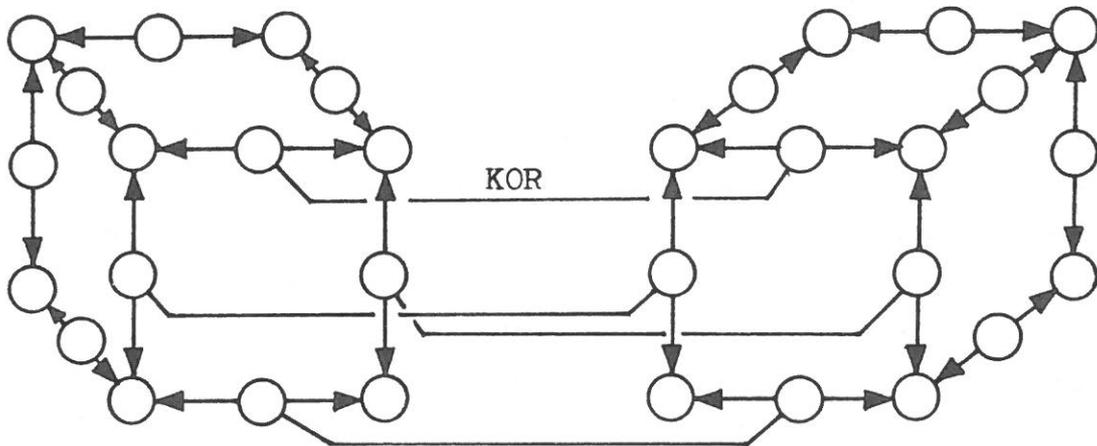
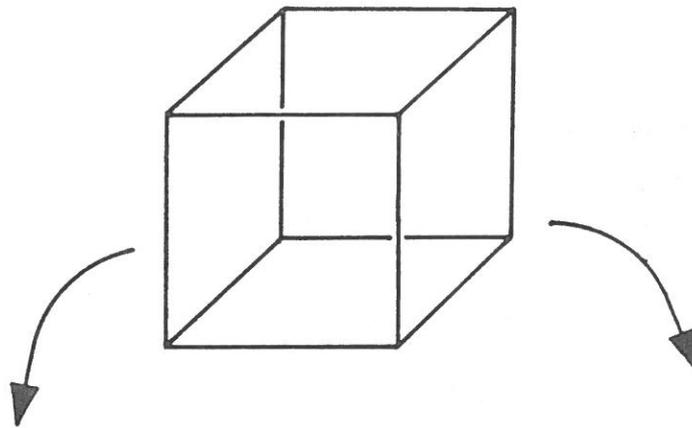


Abb. 2.18
 Korrespondenzrelation zwischen Modellsymbolen
 zweier Perspektiven eines Quadermodells, hier
 nur für einige Kanten eingezeichnet

Die Korrespondenzbeziehung läßt sich nun zwischen Inkarnationssymbolen in derselben Weise herstellen wie im vorigen Abschnitt für Bildsymbole. Nichtvorhandene Bildsymbole müßten in einer Sequenz nicht mehr durch formale Platzhalter ersetzt werden. In einer Sequenz von Inkarnationssymbolen tauchen an solchen Stellen Symbole auf, die keinen Bezug zu Bildsymbolen aufweisen.

2.3.6 Korrespondenz zwischen Modellen

Bleibt die Projektion eines Gegenstandes sich hinreichend ähnlich in den Bildern einer Folge, so wird es häufig genügen, einen Gegenstand durch eine einzige Modellhierarchie zu beschreiben, die dann für die ganze Folge ausreichend gute Inkarnationen liefert. Für die Beobachtung von sich im dreidimensionalen Raum bewegenden, auch drehenden Gegenständen oder bei bewegtem Beobachter kann es notwendig werden, verschiedene Ansichten eines Gegenstandes durch unterschiedliche (statische) Modelle zu beschreiben. Zwei Modelle von zwei Ansichten werden in [NEUMANN78] benutzt, um ein sich auf einem simulierten Fließband an der Kamera vorbeibewegendes Formteil zu erkennen. Sinkt im Laufe der Bewegung die Interpretationsgüte für das erste Modell unter diejenige für das zweite, so werden die Bildsymbole den Inkarnationssymbolen des zweiten Modells zugeordnet. Um bei dem Übergang die Korrespondenzbeziehung zwischen Inkarnationssymbolen herstellen zu können, muß entweder auf der Bildebene oder auf der Modellebene eine Korrespondenz zwischen in beiden Modellen gemeinsam sichtbaren Modellsymbolen hergestellt werden. Letztere Beziehung kann automatisch gewonnen werden, wenn die perspektivischen Ansichten aus einem dreidimensionalen Modell abgeleitet werden (Abbildung 2.18).

Abb. 2.18 Korrespondenzrelation zwischen Modellsymbolen zweier Perspektiven eines Quadermodells, hier nur für Kanten eingezeichnet

Eine Korrespondenzbeziehung auf der Bildsymbolebene induziert über die Inkarnationen eine Korrespondenz auf der Modellebene. Stellen wir uns in einem Gedankenexperiment vor, daß für alle möglichen Bewegungen eines

Körpers bei gegebenem optischen System Modelle für alle Ansichten vorliegen, so kann die tatsächliche Bewegung des beobachteten Körpers im Raum aus der induzierten Korrespondenz erschlossen werden.

Eine etwas andere Form der Korrespondenz zwischen Modellen liegt vor, wenn die Inkarnationen eines Modelles in einem Bild benutzt werden, um ein neues, der Ausprägung des beobachteten, modellierten Gegenstandes besser angepaßtes Modell zu erzeugen. Hier ist zu erwarten, daß große Teile der Relationengebilde, die das alte und das neue Modell repräsentieren, isomorph sind und damit eindeutig korrespondieren. Ein Beispiel für eine solche Modellanpassung findet sich in [RADIG81b]. Dort werden Projektionen von Gegenständen als Gruppen von benachbarten Regionen modelliert. Die im Modell enthaltenen Angaben für die Merkmale der Regionen - etwa die zu erwartende Position bei sich bewegenden Gegenständen - werden von Bild zu Bild anhand der Analyseergebnisse modifiziert.

2.4 INTERPRETATIONS-STRATEGIEN

Ullman sieht Korrespondenz als einen Prozeß der Identifikation von Elementen in verschiedenen Ansichten, die dasselbe Objekt zu verschiedenen Zeitpunkten repräsentieren und die ganzheitliche Wahrnehmung eines sich bewegenden oder verändernden Objektes bewahren [ULLMAN79]. Folgen wir einmal unserem Paradigma, in welchem wir Objekte als Skizzenobjekte, Modellobjekte und Inkarnationsobjekte repräsentieren, wobei das Inkarnationsobjekt als Mittler zwischen den beiden anderen Objekten dient. Dabei sollen die Modellobjekte hierarchisch aus elementaren Symbolen und ihren Beziehungen untereinander aufgebaut sein. Die formale Beschreibung all dieser Objekte durch gleichartig ausgeprägte Relationengebilde ermöglicht den Vergleich der Strukturen durch einen einheitlichen Algorithmus. Dabei lassen sich zwei Richtungen des Vergleichsvorganges unterscheiden. Der eine Vorgang verläuft 'vertikal' und gruppiert die Bildsymbole anhand der Modellhierarchie zu komplexen Skizzenobjekten. Der andere verläuft 'horizontal' und stellt die Korrespondenzbeziehung zwischen gleichartigen Objekten aus verschiedenen Bildern her. Die beiden im letzten Absatz angedeuteten Strategien, entweder für jedes Bild zuerst vollständig den vertikalen Prozeß ablaufen zu lassen, um über die Identität oder Korrespondenz der Modelle das Geschehen in der

Bildfolge zu erschließen, oder zuerst den horizontalen Prozeß zu beenden, um dann korrespondierende Bildsymbole aus verschiedenen Bildern gleichartig zu komplexeren Objekten zu aggregieren, wurden im Ansatz schon in [NEUMANN+RADIG80] diskutiert.

Die Einführung der Inkarnationsobjekte erlaubt es nun, jede beliebige Strategie zwischen den beiden Extremen wählen zu können. Auf jeder Abstraktionsebene, von den elementaren Symbolen bis zu den Spitzen der Modellhierarchie existieren Inkarnationsobjekte. Der horizontale Vergleichsvorgang kann auf allen Ebenen stattfinden. Die Reihenfolge oder Verzahnung der horizontalen und vertikalen Phasen ist frei wählbar. Ein früher horizontaler Vergleich auf Pixelebene charakterisiert die Differenzbildverfahren von [JAIN+NAGEL79], während ein vertikaler Prozeß gefolgt von einem horizontalen Vergleich in [BERTELSMEIER+RADIG77a,b] vorgeschlagen wurde.

Die gleichberechtigte Abfolge der horizontalen und vertikalen Prozesse legt eine Vereinheitlichung der Struktur nahe. Der Vergleich zwischen Modell- und Bildstruktur liefert als Resultat die Inkarnationsobjekte, wie sie in Abschnitt 2.3.5 eingeführt wurden als Umformung der Inkarnationsrelation. Analog führen wir nun Korrespondenzobjekte ein als Ergebnis des Vergleichs von Inkarnationsobjekten aus verschiedenen Bildern und als Umformung der Korrespondenzrelation. In Abschnitt 2.3.4 wurde der Begriff Sequenz schon als eine solche Umformung beim Vergleich von Bildsymbolen eingeführt. Wir übertragen diesen Begriff als Korrespondenzobjekt auf den Anwendungsfall, in dem Inkarnationsobjekte verglichen werden. Abb. 2.19 veranschaulicht in einem Diagramm diese Beziehung. Dabei sind bildindividuelle und bildübergreifende Modelle angedeutet.

Abb. 2.19 Inkarnations- und Korrespondenzobjekte, bildübergreifende und bildindividuelle Modelle

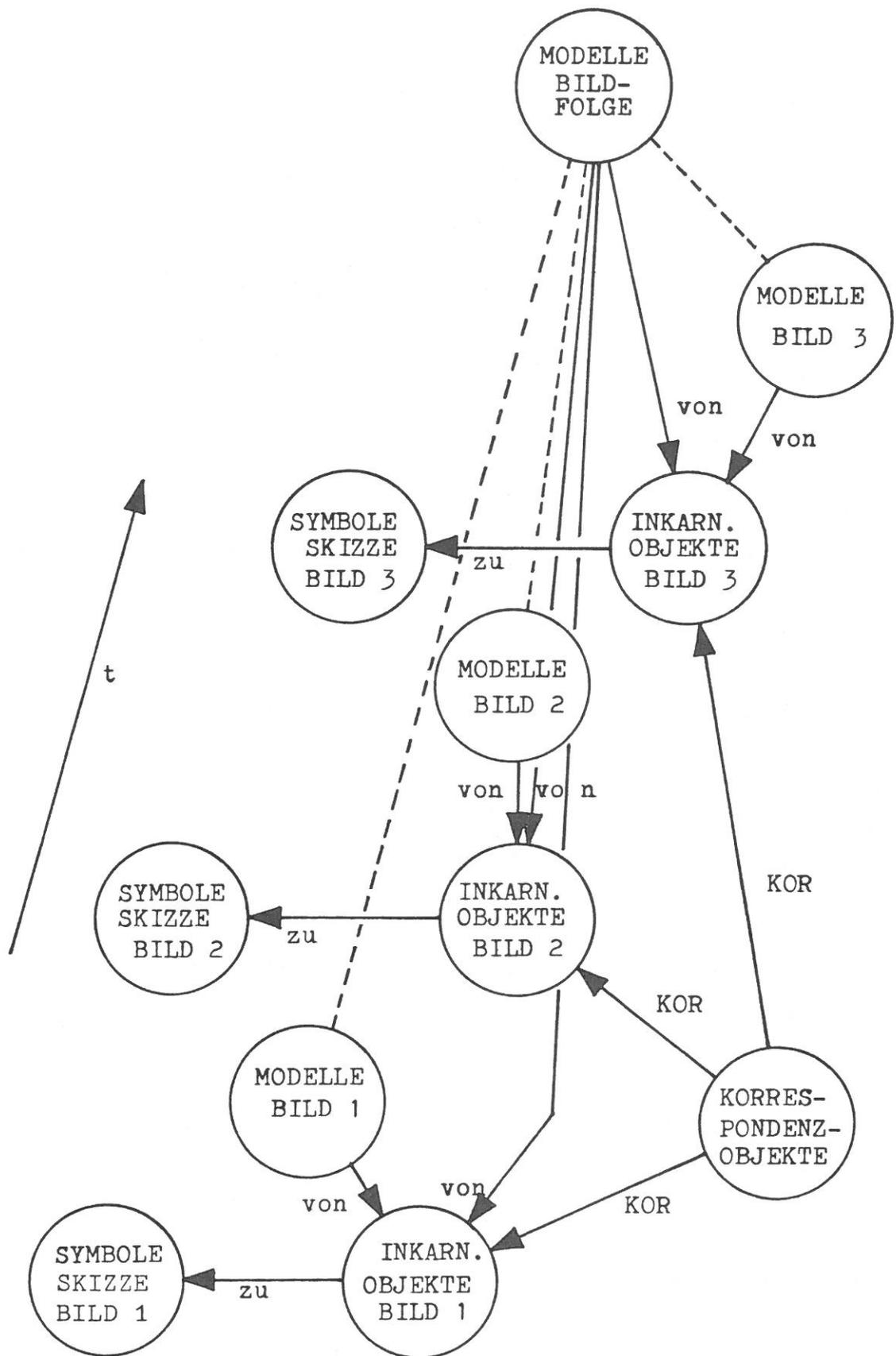


Abb. 2.19
 Inkarnations- und Korrespondenzobjekte, bildübergreifende
 und bildindividuelle Modelle

Wir haben nun eine wesentliche Modularisierung der strukturellen Interpretation von Bildfolgen erreicht. Symbole und Objekte werden als Relationengebilde repräsentiert. Der Vergleich von Objekten liefert wiederum Objekte dargestellt in Relationengebilden. Die Kontrollstrategie für die Suche nach der (besten) Interpretation bestimmt nur noch die Reihenfolge der Vergleichsoperationen, die zur Bildung neuer Objekte führen. Das im nächsten Kapitel vorgestellte Verfahren ist geeignet, sowohl Inkarnations- als auch Korrespondenzobjekte zu erzeugen.

Kapitel 3

VERGLEICH VON STRUKTUREN

Gegeben sind zwei Relationengebilde

$$G = [M, (R_1, R_2, \dots, R_p)] \text{ und } G' = [M', (R_1', R_2', \dots, R_p')].$$

Um beide Relative zu vergleichen, müssen wir die Elemente der Relationengebilde aufeinander abbilden; das sind die Elemente der Trägermengen und die Tupel der Relationen. Wir definieren eine Relation $f_0 \subseteq M \times M'$, die rechtseindeutig (siehe Definition 9) die Trägerelemente von G in die von G' abbildet. Um die Relationenstrukturen (siehe Definition 1) miteinander vergleichen zu können, fordern wir, daß die Relative homolog sind (siehe Definition 14), also dieselbe Stellenverteilung besitzen. Im allgemeinen werden die Relationen, die an sich entsprechenden Stellen des Relationengebildes stehen, auch (semantisch) dieselbe Beziehung zwischen den Symbolen ausdrücken; das wird hier aber nicht gefordert. Wir definieren nun p Relationen $f_i \subseteq R_i \times R_i'$, die rechtseindeutig die Elemente der Relation R_i in die von R_i' abbilden. Weiterhin soll mindestens eine der Relationen f_i nicht leer sein. Die Abbildungen der Trägermenge und der Relationen geschehen aber nicht unabhängig voneinander. Werden zwei Relationstupel aus R_i und R_i' aufeinander abgebildet, so müssen die entsprechenden Trägerelemente auch aufeinander abgebildet werden.

$$(14) \quad \begin{aligned} \bigwedge (i=1 \dots p): ((m_1, m_2, \dots, m_r), (m_1', m_2', \dots, m_r')) \in f_i \rightarrow \\ \bigwedge (j=1 \dots r): (m_j, m_j') \in f_0 \end{aligned}$$

Eine Abbildung $F:G \rightarrow G'$ und $F = [f_0, f_1, \dots, f_p]$ mit den oben genannten Eigenschaften soll R-Morphismus heißen (Definition 15). Im nächsten Abschnitt werden einige eingeschränkte R-Morphismen vorgestellt, deren Benennung den analogen Begriffen aus der Graphtheorie folgt und der Bezeichnung gleicht, die in [CHENG+HUANG80] sowie [SHAPIRO+HARALICK81] für speziellere Relationengebilde verwandt wurden.

3.1 TAXONOMIE DER R-MORPHISMEN

Wir gehen vom allgemeinen R-Morphismus aus und stellen Zusatzbedingungen, die zur Verringerung der Anzahl möglicher R-Morphismen zwischen zwei Relativen führen. Weiterhin definieren wir einen maximalen R-Morphismus, der solche Abbildungen auszeichnet, die möglichst vollständig sind, also besonders viele Trägerelemente und Relationselemente abbilden. Im allgemeinen wird es mehrere R-Morphismen zwischen zwei Relationen geben. Es ist daher wünschenswert, verschiedene R-Morphismen miteinander vergleichen zu können. Wir werden zu diesem Zweck ein einfaches Bewertungsschema einführen, das es gestattet, den R-Morphismen Gütewerte zuzuordnen und so von einem besseren oder dem besten R-Morphismus zu sprechen.

3.1.1 Bewertete und maximale R-Morphismen

Zwei Einflüsse sollen die Güte eines R-Morphismus bestimmen: zum einen das Gewicht eines Relationselementes in dem Ausgangsrelativ G und zum anderen der "Grad", mit dem die Relation bei der Übertragung in das Zielrelativ G' erhalten geblieben ist. Wir definieren für jedes Element $(m_1, m_2, \dots, m_r)_1 \in R_i$ ein Gewicht $w_1^i \in [0, \infty)$. Dabei soll 0 die Bedeutung unwichtig und ∞ die Bedeutung sehr wichtig haben. Jedem Element $((m_1, \dots, m_r)_1, (m_1', \dots, m_r')_j) \in f_i$ ordnen wir einen "Kompatibilitätswert" $\kappa_{1j}^i \in [0, 1]$ zu, wobei 0 schlechte und 1 gute Übereinstimmung bedeuten. Für Eigenschaften von Regionen wurden in [RADIG78] bei Häufigkeitsverteilungen skalarer Werte die normierte Kreuzkorrelation und bei einzelnen skalaren, positiven Werten die normierte Differenz ($d = 1 - |s_1 - s_2| / (s_1 + s_2)$) eingesetzt.

Für die Bewertung eines Relationselements $(m_1', \dots, m_r')_j \in Ri'$ wird der Wert

$$\beta_j^i = \beta(w_{1^*k_{11}^i}^i, \dots, w_{1^*k_{1q}^i}^i)$$

als Funktion der q Elemente aus Ri berechnet, die auf das Element j aus Ri' abgebildet wurden. Die Relationselemente in G' , die nicht Bilder von Elementen aus G sind, haben den Wert $\beta=0$.

Die Güte eines R-Morphismus F ist eine Funktion $\Gamma_F = \Gamma(\beta_1^1, \dots)$. Für ein Beispiel wählen wir die "mittlere" Güte eines R-Morphismus wie folgt:

- Die Gewichte für alle Relationselemente einer Relation Ri sind gleich

$$w_1^i = w_2^i = \dots = \Omega^i.$$

- Mehrfachabbildungen auf ein einzelnes Relationselement aus Ri' werden über den Mittelwert der Einzelabbildungen bewertet:

$$\beta_j^i = [\sum_{n=1}^q (\Omega_{k_{1n}^i}^i)]/q.$$

- Die Güte Γ ist der Mittelwert über alle β -Werte:

$$\Gamma = [\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{\|Ri'\|} \beta_j^i] / \sum_{i=1}^p \|Ri'\|.$$

Die Anzahl aller Relationselemente in G' ist $\sum_{i=1}^p \|Ri'\|$.

Die Abb. 3.1 zeigt zwei Bildausschnitte und die Abb. 3.2 die zugehörigen Relationengebilde G und G' .

Abb. 3.1 Ausschnitte aus zwei Bildern

Abb. 3.2 Dazugehörige Relationengebilde

$$\begin{aligned}
 G &= [\{01,02,R1,R2,K1,K2,K3,50,90\}, (EPR, RRR, LINKS, FL)] \\
 EPR &= \{(K1,01), (K1,02), (K2,01), (K2,02), (K3,01), (K3,02)\} \\
 RRR &= \{(R1,K1), (R1,K2), (R2,K2), (R2,K3)\} \\
 LINKS &= \{(R2,R1)\} \\
 FL &= \{(R1,90), (R2,50)\}
 \end{aligned}$$

G' hat eine ähnliche Struktur mit den Unterschieden

$$\begin{aligned}
 M' &= \{01',02',K1',K2',K3',60,80\} \\
 FL' &= \{(R1',60), (R2',80)\}
 \end{aligned}$$

Folgende beiden R-Morphismen seien definiert durch F^1 , wobei die κ -Werte bei den entsprechenden Elementen von f angegeben sind,

$$f_0^1 = \{(01,01'), (02,02'), (K1,K1'), (K2,K2'), (K3,K3'), (R1,R1'), (R2,R2'), (50,80), (90,60)\}$$

$$f_{EPR}^1 = \{((K1,01), (K1',01'), 1), \dots, ((K3,02), (K3',03'), 1)\}$$

$$f_{RRR}^1 = \{((R1,K1), (R1',K1'), 1), ((R1,K2), (R1',K2'), 1), ((R2,K2), (R2',K2'), 1), ((R2,K3), (R2',K3'), 1)\}$$

$$f_{LINKS}^1 = \{((R2,R1), (R2',R1'), 1)\}$$

$$f_{FL}^1 = \{((R1,90), (R1',60), 0.8), ((R2,50), (R2',80), 0.77)\}$$

mit $0.8 = 1 - (90-60)/(90+60)$ und $0.77 = 1 - (80-50)/(80+50)$

und F^2 mit den Abweichungen

$$f_0^2 = \{ \dots, (R1,R2'), (R2,R1'), (50,60), (90,80) \}$$

$$f_{EPR}^2 = f_{EPR}^1$$

$$f_{RRR}^2 = \{((R1,K1), (R2',K1'), 1), \dots, ((R2,K3), (R1',K3'), 1)\}$$

$$f_{LINKS}^2 = \{\}$$

$$f_{FL}^2 = \{((R1,90), (R2',80), 0.94), ((R2,50), (R1',60), 0.91)\}$$



Abb. 3.1
Ausschnitte aus zwei Bildern

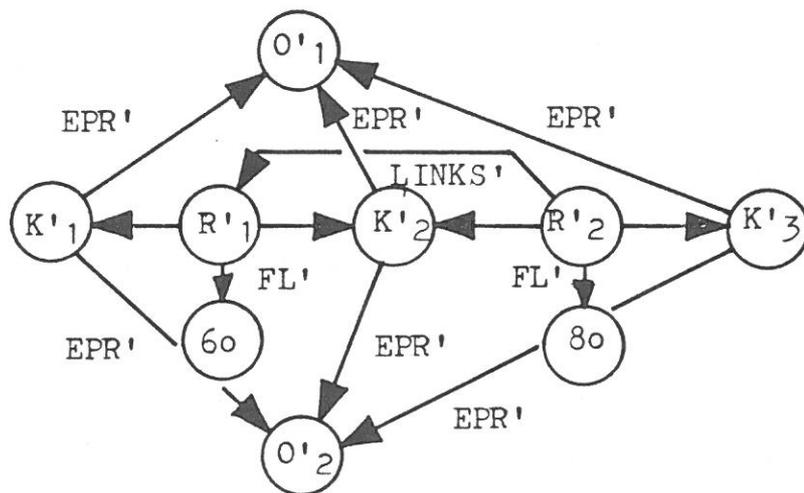
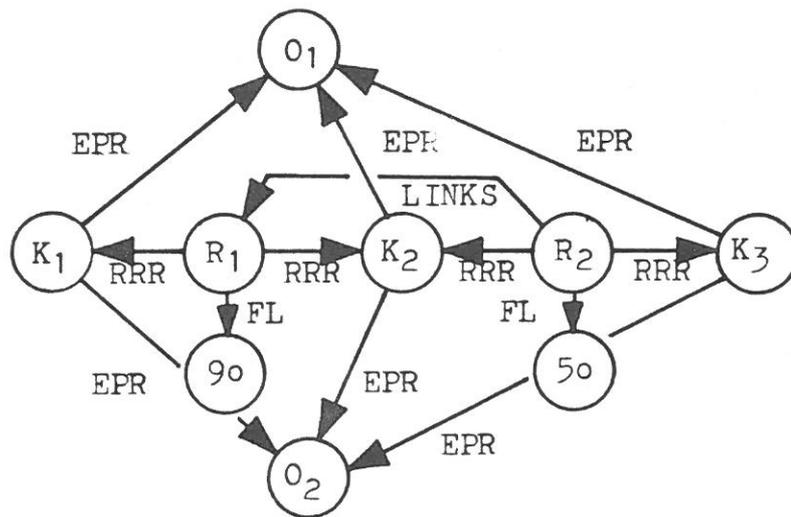


Abb. 3.2
Dazugehörige Relationengebilde

Bei einer Wichtung von $\Omega^{EPR} = \Omega^{RRR} = \Omega^{LINKS} = 1$ und $\Omega^{FL} = 0.5$ ergibt sich die Güte im ersten Fall zu

$$\Gamma_1(F^1) = (6*1+4*1+1+0.5*(0.8+0.77))/(6+4+1+2) = 0.91$$

$$\Gamma_1(F^2) = (6*1+4*1+0+0.5*(0.94+0.91))/13 = 0.84$$

Ignorieren wir im nächsten Beispiel die LINKS-Relation durch $\Omega^{LINKS} = 0$, so ergibt sich

$$\Gamma_2(F^1) = (6+4+0+0.5*(0.8+0.77))/13 = 0.82$$

$$\Gamma_2(F^2) = (6+4+0+0.5*(0.94+0.91))/13 = 0.84$$

Die Gewichte Ω^i sind also ein Mittel, um die gewünschten Invarianzeigenschaften beim Vergleich zu betonen.

Führt man eine partielle Ordnung unter den R-Morphismen zwischen zwei Relationengebilden ein durch

$$(15) \quad F^1 \subseteq F^2 \leftrightarrow \wedge (i): f_i^1 \subseteq f_i^2,$$

so ergibt sich als sinnvoll zu fordernde Beziehung, daß

$$(16) \quad F^1 \subseteq F^2 \rightarrow \Gamma(F^1) \leq \Gamma(F^2) \text{ gelten soll.}$$

Die in diesem Abschnitt verwendete Gütedefinition erfüllt Gleichung (16). Einen R-Morphismus F , der in keinem anderen enthalten ist, nennen wir maximal. Im folgenden werden wir uns nur noch für maximale R-Morphismen interessieren, denn aus (16) folgt, daß es für einen nicht-maximalen R-Morphismus mindestens einen weiteren mit gleicher oder höherer Güte gibt, also einen "besseren".

3.1.2 Allgemeiner R-Morphismus

Wir geben noch einmal die Definition eines R-Morphismus und entwickeln daraus speziellere Formen durch zusätzliche Anforderungen:

$$G = [M, (R_1, \dots, R_p)] \text{ und } G' = [M', (R_1', \dots, R_p')]$$

G und G' sind homolog (siehe Definition 14). Ein R-Morphismus $F : G \rightarrow G'$ mit $F = [f_0, f_1, \dots, f_p]$ und den Einzelabbildungen $f_0 : M \rightarrow M'$, $f_i : R_i \rightarrow R_i'$ mit $i=1, \dots, p$ erfüllt die Bedingung

$$(17) \quad \begin{aligned} \bigwedge (i=1 \dots p): & \quad ((m_1, m_2, \dots, m_r), (m_1', m_2', \dots, m_r')) \in f_i \rightarrow \\ & \quad \bigwedge (j=1 \dots r): \quad (m_j, m_j') \in f_0. \end{aligned}$$

Gleichbedeutend damit ist

$$(18) \quad \bigwedge (i=1 \dots p): \quad (f_0(m_1), \dots, f_0(m_r)) \in f_i \rightarrow (m_1, \dots, m_r) \in R_i.$$

Obwohl (18) in der Literatur häufig für (17) eingesetzt wird, haben wir jedoch die Form (17) gewählt, da aus ihr unmittelbar ersichtlich ist, daß wir Trägerelemente aus M , die in keiner abgebildeten Relation R_i auftauchen, nicht auf Trägerelemente aus M' abbilden.

Sind wir beispielsweise nur an den Regionen als Bildsymbole interessiert, so ist

$$\begin{aligned} f_{\text{LINKS}} &= \{(R_1, R_1'), (R_2, R_2')\}, \\ f_{\text{FL}} &= \{(R_1, 90), (R_1', 60), (R_2, 50), (R_2', 80)\}, \\ f_0 &= \{(R_1, R_1'), (R_2, R_2'), (90, 50), (60, 80)\}. \end{aligned}$$

ein R-Morphismus, wobei wir die Relationengebilde von Abb. 3.2 zugrundelegen.

3.1.3 R-Homomorphismus und R-Monomorphismus

Eine mögliche Zusatzforderung an die Abbildungen f_i ist, daß sie linkstotal (siehe Definition 16) sind. Dann werden alle Relationselemente von G in solche von G' abgebildet.

$$\bigwedge (i=1\dots p): R_i = \text{VORBER.}(f_i).$$

Ein R-Morphismus mit dieser Eigenschaft heißt R-Homomorphismus (Definition 17), er ist maximal. Sei F ein solcher R-Homomorphismus und es gäbe einen umfassenderen F^\diamond , dann

$$F \subseteq F^\diamond \rightarrow \exists (i, r \in R_i, r' \in R_i'): (r, r') \in f_i^\diamond \text{ und } (r, r') \notin f_i.$$

Da f_i linkstotal ist, muß es ein r'' geben mit $(r, r'') \in f_i$. Aus der Rechtseindeutigkeit (siehe Definition 9) von f_i und f_i^\diamond folgt aber sofort $r' = r''$ und damit $F^\diamond = F$.

Ein Beispiel für einen R-Homomorphismus zwischen den beiden Relationengebilden aus Abb. 3.2 ist:

$$f_{\text{EPR}} = \{((K1,01),(K1',01')), ((K1,02),(K1',02')), ((K2,01),(K2',01')), ((K2,02),(K2',02')), ((K3,01),(K2',01')), ((K3,02),(K2',02'))\}$$

$$f_{\text{RRR}} = \{((R1,K1),(R1',K1')), ((R1,K2),(R1',K2')), ((R2,K2),(R2',K2')), ((R2,K3),(R2',K3'))\}$$

$$f_{\text{LINKS}} = \{((R2,R1),(R2',R1'))\}$$

$$f_{\text{FL}} = \{((R1,90),(R1',60)), ((R2,50),(R2',80))\}$$

$$f_0 = \{(R1,R1'), (R2,R2'), (K1,K1'), (K2,K2'), (K3,K2'), (01,01'), (02,02'), (90,60), (50,80)\}.$$

Fordern wir von einem R-Homomorphismus, daß die Abbildungen f_0 bis f_p injektiv sind (siehe Definition 10), so nennen wir ihn R-Monomorphismus (Definition 18). Jetzt ist es nicht mehr möglich, daß mehr als ein Trägerelement aus M auf nur ein Trägerelement aus M' abgebildet wird. Jeder R-Monomorphismus ist auch ein R-Homomorphismus und damit maximal.

Löschen wir aus dem Relationengebilde G aus Abb. 3.2 die Elemente K_3 , R_2 und 5_0 sowie die damit verbundenen Relationen, so ist F ein R -Monomorphismus mit

$$f_{EPR} = \{((K_1, 0_1), (K_2', 0_1')), ((K_1, 0_2), (K_2', 0_2')), ((K_2, 0_1), (K_3', 0_1')), ((K_2, 0_2), (K_3', 0_2'))\}$$

$$f_{RRR} = \{((R_1, K_1), (R_2', K_2')), ((R_1, K_2), (R_2', K_3'))\}$$

$$f_{FL} = \{((R_1, 9_0), (R_2', 8_0))\}$$

$$f_0 = \{(0_1, 0_1'), (0_2, 0_2'), (K_1, K_2'), (K_2, K_3'), (R_1, R_2'), (9_0, 8_0)\}$$

3.1.4 R -Isomorphismus, R -Automorphismus und R -Komorphismus

Zwei Relationengebilde sind isomorph (Definition 19), wenn es einen R -Monomorphismus F gibt, bei dem die f_0 bis f_p bijektiv sind. Gleichbedeutend damit ist die Aussage, daß ein inverser R -Monomorphismus $F^{-1} = [f_0^{-1}, f_1^{-1}, \dots, f_p^{-1}]$ existiert. Der in Abschnitt 3.1.1 unter F^1 angegebene R -Morphismus ist ein R -Isomorphismus.

Beim Vergleich von Skizzen aus zwei Bildern liefert ein R -Isomorphismus vorteilhafterweise eine eindeutige und vollständige Korrespondenz zwischen den Bildsymbolen (den Trägerelementen) und ihren Beziehungen untereinander. Nachteilig tritt der R -Isomorphismus eines Relationengebildes mit sich selbst in Erscheinung. Wir nennen einen solchen R -Isomorphismus $A: G \rightarrow G$ einen R -Automorphismus (Definition 20). Sei nun $F: G \rightarrow G'$ ein R -Isomorphismus, dann ist $F \circ A: G \rightarrow G'$ ebenfalls eine isomorphe Abbildung von G auf G' . (Die Automorphismen bilden eine Gruppe mit der Identität als neutralem Element.)

Beim Vergleich isomorpher Relative, die α verschiedene R-Automorphismen aufweisen, erhalten wir α verschiedene R-Isomorphismen. So ist etwa bei einem Rechteck, das durch seine vier Eckpunkte O_1 bis O_4 und seine vier Kanten K_1 bis K_4 und die acht Endpunkt-Relationen beschrieben wird, die zyklische Vertauschung der Indizes $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ ein R-Automorphismus. Vergleichen wir zwei Bilder, in denen jeweils q Rechtecke enthalten sind, deren Symmetrie durch keine zusätzliche Relation gestört ist, so erhalten wir 4^q R-Isomorphismen zwischen beiden Bildern.

Bei isomorpher Übereinstimmung kann eine solche Vielfalt noch hingenommen werden, da sich die verschiedenen R-Isomorphismen nur durch einen R-Automorphismus unterscheiden können; es genügt also, einen der R-Isomorphismen willkürlich als Repräsentanten zu wählen. Anders liegt der Fall, wenn wir an Abbildungen interessiert sind, die eine bestmögliche Übereinstimmung von zwei verschiedenen Relativen beschreiben. Wir wollen einen maximalen R-Isomorphismus zwischen zwei Teilrelativen

$$K: G^\diamond \rightarrow G^{\diamond'} \text{ mit } G^\diamond \subseteq G \text{ und } G^{\diamond'} \subseteq G'$$

als "R-Komorphismus" bezeichnen (Definition 21). Sind beide Relative Graphen, so spricht man auch von 'Subgraph-Isomorphismus' oder von einem 'maximal match'.

Nun wird es im allgemeinen mehrere R-Komorphismen geben, da nur eine partielle Ordnung unter den R-Morphismen besteht. Unter den R-Komorphismen sind diejenigen, die sich durch R-Automorphie voneinander unterscheiden, nur durch explizites Prüfen der Automorphieeigenschaft herauszufinden. Dieser Aufwand läßt sich verringern, wenn man bei dem Entwurf des Relationengebildes dafür sorgt, daß die Zahl der R-Automorphismen klein bleibt. Führt man zum Beispiel zwischen den Kanten eines nichtquadratischen Rechtecks die Beziehung 'länger als' ein, so reduziert sich die Zahl der R-Automorphismen von vier auf zwei. Asymmetrie ausdrückende Relationen wie 'links', 'unterhalb', 'größer' und ähnliche helfen dabei, R-Automorphismen zu unterdrücken. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß solche Beziehungen wie 'links' oder 'unterhalb' nicht rotationsinvariant sind und eine 'länger'- oder 'größer'-Relation bei Änderungen der Perspektive verletzt werden kann. Topologische Eigenschaften sind invariant unter den meisten Transformationen, die zwischen Bildern einer zeitlichen Folge auftreten; die Topologie - etwa von Organschnitten - bleibt nicht unbedingt erhalten, wenn die Bilder entlang einer Raumkoordinate gestaffelt sind.

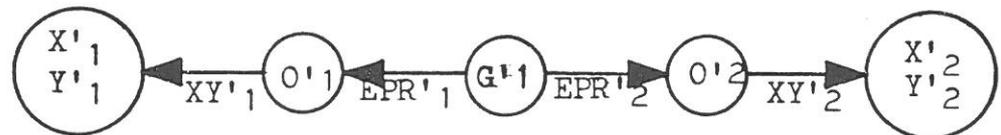
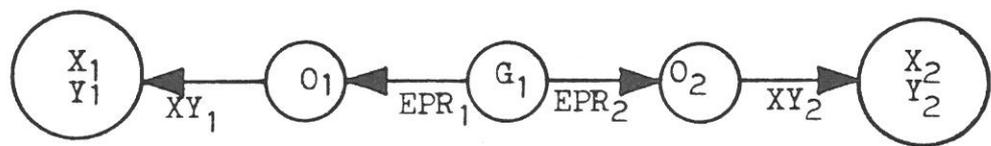


Abb. 3.3
Zwei Geraden mit ihren Endpunkten

3.2 ERZEUGEN DER R-MORPHISMEN

Zwei einfache Relationengebilde, die jeweils eine Gerade mit ihren beiden Endpunkten repräsentieren, dienen als Beispiel, um alle R-Morphismen zwischen den Relativen aufzuführen. Das Relationengebilde G hat die Form

$$G = [M, (EPR, XY)] \text{ mit}$$
$$M = \{G_1, O_1, O_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2\} \text{ und}$$
$$EPR = \{(G_1, O_1), (G_1, O_2)\} \text{ und}$$
$$XY = \{(O_1, X_1, Y_1), (O_2, X_2, Y_2)\}.$$

Die Stellenverteilung ist also (2,3). Die Endpunkt-Relation (EPR) verknüpft die Geraden mit ihren Endpunkten, sie ist Zusammenhangs-Relation. Die Merkmals-Relation XY weist den Örtern ihre Koordinatenwerte als Merkmale zu.

Das zweite Relationengebilde G' habe die entsprechende Träger- und Relationselemente. Die grafische Darstellung beider Relative zeigt Abb. 3.3.

Abb. 3.3 Zwei Geraden mit ihren Endpunkten

Die möglichen R-Morphismen $F: G \rightarrow G'$ lassen sich tabellarisch angeben (Abb. 3.4) mit der Vereinbarung, daß eine Ziffer in der Tabelle die Zuordnung des durch die Ziffer indizierten Träger- oder Relationselementes aus G' zu dem Element aus G bedeutet, das über der entsprechenden Spalte angeschrieben ist. Die Abbildung F ist in drei Teilabbildungen f_0 für die Trägerelemente, f_1 für die XY-Relation und f_2 für die EPR-Relation gegliedert.

Abb. 3.4 R-Morphismen zwischen zwei Relationengebilden

In der Tabelle tauchen in den Spalten der Trägerelemente dort Fragezeichen auf, wo die gewählte Abbildung der Relationen nicht zu einer (rechtseindeutigen) Abbildung der Bildsymbole führt. Solche Zuordnungen bilden gemäß der Definition keinen R-Morphismus. Spezielle R-Morphismen

f0	f1			f2								
	G1	O1	X1	Y1	O2	X2	Y2	XY1	XY2	EPR1	EPR2	
1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	
1	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	2	
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	
1	1	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1	
1	1	-	-	2	-	-	-	-	-	1	2	
1	2	-	-	1	-	-	-	-	-	2	1	
1	2	-	-	2	-	-	-	-	-	2	2	
-	-	-	-	1	1	1	-	1	-	-	-	
1	-	-	-	1	1	1	-	1	-	-	1	
1	-	-	-	?	1	1	-	1	-	-	2	kein R-Morphismus
1	1	-	-	1	1	1	-	1	1	-	-	
1	2	-	-	1	1	1	-	1	2	-	-	R-Morphismus (e)
1	1	-	-	1	1	1	-	1	1	1	1	
1	1	-	-	?	1	1	-	1	1	1	2	kein R-Morphismus
1	2	-	-	1	1	1	-	1	2	1	1	
1	2	-	-	?	1	1	-	1	2	2	2	kein R-Morphismus
-	-	-	-	2	2	2	-	2	-	-	-	
.												
1	2	-	-	2	2	2	-	2	2	2	2	
-	1	1	1	-	-	-	1	-	-	-	-	
.												
1	2	2	2	2	-	-	2	-	2	2	2	
-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	
1	1	1	1	?	1	1	1	1	1	-	2	kein R-Morphismus
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	
1	?	1	1	1	1	1	1	1	1	2	-	kein R-Morphismus
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	R-Homomorphismus (c)
1	1	1	1	?	1	1	1	1	1	1	2	kein R-Morphismus
1	?	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	kein R-Morphismus
1	?	1	1	?	1	1	1	1	1	2	2	kein R-Morphismus
.												
1	1	1	1	?	2	2	1	2	1	1	1	kein R-Morphismus
1	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	2	R-Isomorphismus (a)
1	?	1	1	?	2	2	1	2	2	1	1	kein R-Morphismus
1	?	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	kein R-Morphismus
.												
1	?	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1	kein R-Morphismus
1	?	2	2	?	1	1	2	1	1	1	2	kein R-Morphismus
1	2	2	2	1	1	1	2	1	2	1	1	R-Isomorphismus (b)
1	2	2	2	?	1	1	2	1	2	2	2	kein R-Morphismus
.												
1	?	2	2	?	2	2	2	2	1	1	1	kein R-Morphismus
1	?	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	kein R-Morphismus
1	2	2	2	?	2	2	2	2	2	1	1	kein R-Morphismus
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	R-Homomorphismus (d)

Abb. 3.4 R-Morphismen zwischen zwei Relationengebilden

sind in den einzelnen Zeilen gekennzeichnet. R-Monomorphismen treten nur als R-Isomorphismen auf, da beide Relative isomorph sind; ein linkstotaler, rechts- und linkseindeutiger R-Morphismus muß rechtstotal (und damit ein R-Isomorphismus) sein, wenn die entsprechenden Relationen der beiden Relative gleich viele Elemente enthalten.

Für einige R-Morphismen sei die Güte angegeben, wobei wir als einfache Berechnungsgrundlage alle Abbildungen mit dem Gewicht $\Omega^i = 1$ versehen und die Ortskoordinaten über die normierte Differenz vergleichen:

$$\beta_j^{XY} = \beta_{ij} = (2 - |X_i - X_j'| / (X_i + X_j') - |Y_i - Y_j'| / (Y_i + Y_j')) / 2.$$

G' enthält vier Relationselemente, damit hat der R-Isomorphismus (a) die mittlere Güte $\Gamma_a = (2 + \beta_{11} + \beta_{22}) / 4$. Diejenige von (b) ist $\Gamma_b = (2 + \beta_{12} + \beta_{21}) / 4$. Die Güte der R-Homomorphismen (c) und (d) ist $\Gamma_c = (2 + \beta_{11} + \beta_{12}) / 4$ und $\Gamma_d = (2 + \beta_{22} + \beta_{21}) / 4$. Der R-Morphismus (e), der kein R-Komorphismus ist, da er im R-Isomorphismus (c) enthalten ist, hat die geringste Güte mit $\Gamma_e = (1 + \beta_{21}) / 4$. Mit der Annahme, daß die gleich indizierten Örter aus G beziehungsweise G' nahe beieinander liegen, könnte sich eine Reihenfolge der β -Werte etwa als $\beta_{11} > \beta_{22} > \beta_{21} > \beta_{12}$ ergeben und damit $\Gamma_a > \Gamma_c > \Gamma_d > \Gamma_b > \Gamma_e$ oder $\Gamma_a > \Gamma_d > \Gamma_c > \Gamma_b > \Gamma_e$. Wenn sich die Geraden aus beiden Relationen decken, gilt $\Gamma_a = 1$, $\Gamma_c = \Gamma_d > 1/2$ und $\Gamma_e < 1/2$. Solche Art von Bewertungen können eine heuristische Suche nach dem besten R-Morphismus steuern.

3.2.1 Kombinatorische Erzeugung

Wir wenden uns zunächst der Fragestellung zu, wie wir die Tabelle aus Abb. 3.4 automatisch erzeugen können. Wir benutzen dabei die Beobachtung, daß $f_1 \subseteq XY \times YY'$ und $f_2 \subseteq EPR \times EPR'$ ist. Definieren wir nun die Menge Z als $Z = XY \times YY' \cup EPR \times EPR'$, so enthält die Potenzmenge PZ von Z alle R-Morphismen. Wir nennen Z die Zuordnungsmenge der beiden zu vergleichenden Relationengebilde. Im allgemeinen Fall ist $G = [M, (R_1, \dots, R_p)]$ sowie $G' = [M', (R_1', \dots, R_p')]$ und $Z = \bigcup_{i=1..p} R_i \times R_i'$. Die Erzeugung aller R-Morphismen kann damit in zwei Schritte untergliedert werden: die Bildung der Potenzmenge PZ und die Prüfung der Morphismus-Bedingung. Der erste

```
type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
var
  Z: MENGE;

procedure POTENZMENGE(Z: MENGE);
  procedure EXPANDIERE(KOMBINATIONEN, KANDIDATEN: MENGE);
    var E: ZUORDNUNGEN;

    procedure PRUEFE(M: MENGE);
      . . . . .

    function IRGENDEINSAUS(M: MENGE): ZUORDNUNGEN;
    label 1;
    var I: ZUORDNUNGEN;
    begin
      for I:=Z1 to Z8 do if I in M then goto 1;
      1: IRGENDEINSAUS:=I;
    end;

    begin
      PRUEFE(KOMBINATIONEN);
      while KANDIDATEN<>[] do begin
        E:=IRGENDEINSAUS(KANDIDATEN);
        KANDIDATEN:=KANDIDATEN-[E];
        EXPANDIERE(KOMBINATIONEN+[E], KANDIDATEN)
      end
    end;

  begin
    EXPANDIERE([], Z)
  end;
```

Abb. 3.5 Algorithmus zum Erzeugen der Potenzmenge

Schritt kann durch einen einfachen Algorithmus, der in Abb. 3.5 angegeben ist (als PASCAL-Prozedur nach [JOHNSTON76]), vorgenommen werden.

Abb. 3.5 Algorithmus zum Erzeugen der Potenzmenge

Wählt die Funktion IRGENDEINSAUS immer das Element mit dem kleinsten Index aus der (indizierten) Argumentmenge aus, so werden die Mengen in lexikografischer Ordnung erzeugt; für $Z = \{Z1, Z2, Z3\}$ also $PZ = \{\{\}, \{Z1\}, \{Z1, Z2\}, \{Z1, Z2, Z3\}, \{Z1, Z3\}, \{Z2\}, \{Z2, Z3\}, \{Z3\}\}$.

Die Prozedur PRUEFE hat die Aufgabe festzustellen, ob die vorgeschlagene Argumentmenge tatsächlich einen R-Morphismus darstellt. Dazu müssen die durch die Elemente der Menge angegebenen Zuordnungen rechtseindeutige Relationen ergeben und die durch die paarweise Zuordnung der Relationselemente aus den Relativen implizierte Zuordnung der Trägerelemente muß ebenfalls rechtseindeutig sein. Schon wenn zwei Zuordnungen diese Bedingungen verletzen, scheidet die Menge als Repräsentant eines R-Morphismus aus.

Wir beobachten, daß die Frage, ob zwei Elemente der Zuordnungsmenge miteinander verträglich sind (also zu einem R-Morphismus beitragen), unabhängig davon ist, wie die Potenzmenge gebildet wird und in welchen Kombinationen die beiden Elemente auftreten. Daher kann die Überprüfung der Verträglichkeit schon vor der Erzeugung der Potenzmenge vorgenommen werden und das Ergebnis beispielsweise in einer "Kompatibilitätsmatrix" festgehalten werden. Die Abb. 3.6 zeigt die Kompatibilitätsmatrix für die Relationengebilde aus dem vorigen Abschnitt.

Abb. 3.6 Kompatibilitätsmatrix

Der Leser mag sich überzeugen, daß alle in der Abb. 3.4 aufgeführten R-Morphismen nur solche Paarungen enthalten, die eine 1 in der Kompatibilitätsmatrix eingetragen haben. Numerieren wir nun die Spalten beziehungsweise Zeilen der Matrix mit Z1 bis Z8, so könnte eine Realisierung

	EPR1	EPR2	EPR1	EPR2	XY1	XY2	XY1	XY2
	EPR1'	EPR1'	EPR2'	EPR2'	XY1'	XY1'	XY2'	XY2'
EPR1								
EPR1'	0	1	0	1	1	1	0	1
EPR2								
EPR1'	1	0	1	0	1	1	1	0
EPR1								
EPR2'	0	1	0	1	0	1	1	1
EPR2								
EPR2'	1	0	1	0	1	0	1	1
XY1								
XY1'	1	1	0	1	0	1	0	1
XY2								
XY1'	1	1	1	0	1	0	1	0
XY1								
XY2'	0	1	1	1	0	1	0	1
XY2								
XY2'	1	0	1	1	1	0	1	0

Abb. 3.6 Kompatibilitätsmatrix

```

type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
  KOMP        = array[ZUORDNUNGEN,ZUORDNUNGEN] of boolean;
var
  KOMPMATRIX: KOMP;

  procedure AUSGABE(K: MENGE);
  begin writeln(K) end;

  procedure PRUEFE(M: MENGE);
  Label 1;
  var E1,E2: ZUORDNUNGEN;
  begin
    for E1:=Z1 to pred(Z8) do
      if E1 in M then begin
        for E2:=succ(E1) to Z8 do
          if (E2 in M) and (KOMPMATRIX[E1,E2]=false) then goto 1;
        end;
        if M<>[] then AUSGABE(M);
      1: end;
  end;

```

Abb. 3.7 Identifizieren der R-Morphismen

der Prozedur PRUEFE so lauten, wie in Abb. 3.7 angegeben.

Abb. 3.7 Identifizieren der R-Morphismen

In der Prozedur enthält KOMPMATRIX die Ergebnisse der Verträglichkeitsprüfung und die Prozedur AUSGABE gibt den R-Morphismus etwa in der Form wie in Abb. 3.4 aus. Es ist berücksichtigt, daß die KOMPMATRIX symmetrisch ist.

3.2.2 Cliquenalgorithmus

Der Algorithmus zur Erzeugung der Potenzmenge läßt sich nun durch Ausnützen der KOMPMATRIX leicht so verfeinern, daß er nur noch Zuordnungsmengen erzeugt, die R-Morphismen repräsentieren. Dazu müssen wir nur dafür sorgen, daß zu der Menge KOMBINATIONEN nur solche Elemente hinzugefügt werden, die mit den in ihr schon vorhandenen Elementen verträglich sind. Das geschieht in der Weise, daß wir aus der Menge KANDIDATEN, sobald wir uns für ein Element E der Menge KOMBINATIONEN entschieden haben, alle Elemente entfernen, die mit E nicht verträglich sind. Da die Menge KOMBINATIONEN aus der Menge KANDIDATEN gebildet wird, können dann nur noch miteinander verträgliche Zuordnungen in die Menge KANDIDATEN gelangen. Abb. 3.8 zeigt die modifizierte Form, bei der die Prozedur PRUEFE überflüssig ist und durch die Prozedur AUSGABE ersetzt wurde.

Abb. 3.8 Erzeugen von R-Morphismen

Wir gelangen zu einer etwas verschiedenen Sicht unseres bisherigen Ansatzes, wenn wir die KOMPMATRIX als Nachbarmatrix eines (ungerichteten) Graphen betrachten [HARARY69]). Die Zuordnungen $Z_1 = (EPR1, EPR1') = ((G1, 01), (G1', 01'))$ bis $Z_8 = (XY2, XY2') = (02, X2, Y2), (02', X2', Y2')$ bilden die Knoten des "Kompatibilitätsgraphen", in dem verträgliche Zuordnungen durch einen Bogen

```

type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
  KOMP        = array[ZUORDNUNGEN,ZUORDNUNGEN] of boolean;
var
  KOMPMATRIX: KOMP;

procedure POTENZMENGE(Z: MENGE);
  procedure EXPANDIERE(KOMBINATIONEN,KANDIDATEN: MENGE);
    var E,F: ZUORDNUNGEN; KOMPATIBEL: MENGE;

    procedure AUSGABE(K: MENGE);
      begin writeln(K) end;

    function IRGENDEINSAUS(M: MENGE): ZUORDNUNGEN;
      label 1;
      var I: ZUORDNUNGEN;
      begin
        for I:=Z1 to Z8 do if I in M then goto 1;
        1: IRGENDEINSAUS:=I
      end;

      begin
        if KOMBINATIONEN<>[] then AUSGABE(KOMBINATIONEN);
        while KANDIDATEN<>[] do begin
          E:=IRGENDEINSAUS(KANDIDATEN);
          KANDIDATEN:=KANDIDATEN-CE];
          KOMPATIBEL:=KANDIDATEN;
          for F:=succ(E) to Z8 do
            if KOMPMATRIX[E,F]=false then KOMPATIBEL:=KOMPATIBEL-CE];
            EXPANDIERE(KOMBINATIONEN+CE],KOMPATIBEL)
          end
        end
      end;

begin
  EXPANDIERE([],Z)
end;

```

Abb. 3.8 Erzeugen von R-Morphismen

im Graphen verbunden sind. Die erzeugten KOMBINATIONEN enthalten alle Teilmengen von solchen Knoten, die alle miteinander verträglich, also durch Bögen verbunden sind. Das sind genau alle vollständigen Teilgraphen des Kompatibilitätsgraphen. Auf der Suche nach den besten R-Morphismen wird, wie schon in Abschnitt 3.1 erwähnt, nur an maximalen R-Morphismen interessiert. R-Morphismen sind dann maximal, wenn sie in keinem anderen enthalten sind; die entsprechenden maximalen, vollständigen Teilgraphen, die in keinem anderen enthalten sind, heißen maximale Cliques. Im folgenden werden wir unter Cliques immer maximale Cliques verstehen.

Damit haben wir das Problem, übereinstimmende Teilstrukturen von zwei Relationengebilden zu finden, in die in der Literatur wohlbekannte Aufgabe überführt, Cliques in einem Graphen zu bestimmen. Kozen beweist die Äquivalenz beider Probleme für Graph-Isomorphismen beziehungsweise Graph-Komorphismen [KOZEN78]; Graphen sind spezielle Relationengebilde mit nur einer zweistelligen, symmetrischen und nicht reflexiven Relation. Johnston stellt einen Cliques-Algorithmus vor [JOHNSTON76], der einige früher bekannte als Spezialfall enthält. In [BOLLES79] wird eine Version dieses Algorithmus benutzt. Die in [BRON+KERBOSCH73] schon früher gefundene Variante wurde in [BERTELSMEIER+RADIG77a] und [KRAASCH+ZACH79] verwendet. [TURNER74] adaptiert einen Algorithmus aus [AMBLER+73]. Hier sei eine besonders einfache Version vorgestellt, die sich unmittelbar aus dem Algorithmus von Abb.3.8 ergibt und dessen Notation verwendet.

Abb. 3.9 Erzeugen von Cliques

Hier werden nur noch solche KOMBINATIONEN ausgegeben, die nicht mehr erweiterbar sind, da die Menge der KANDIDATEN leer ist; die KOMBINATIONEN sind also maximal und damit Cliques.

```

type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
  KOMP        = array[ZUORDNUNGEN,ZUORDNUNGEN] of boolean;
var
  KOMPMATRIX: KOMP;

procedure CLIQUE(Z: MENGE);
  procedure EXPANDIERE(KOMBINATIONEN,KANDIDATEN,DURCHSCHNITT: MENGE);
    var E,F: ZUORDNUNGEN; KOMPATIBEL,DURCH: MENGE;

    procedure AUSGABE(K: MENGE);
      begin writeln(K) end;

    function IRGENDEINSAUS(M: MENGE): ZUORDNUNGEN;
      Label 1;
      var I: ZUORDNUNGEN;
      begin
        for I:=Z1 to Z8 do if I in M then goto 1;
        1: IRGENDEINSAUS:=I
      end;

    begin
      if DURCHSCHNITT=∅ then AUSGABE(KOMBINATIONEN) else
      while KANDIDATEN≠∅ do begin
        E:=IRGENDEINSAUS(KANDIDATEN);
        KANDIDATEN:=KANDIDATEN-∅E∅;
        KOMPATIBEL:=KANDIDATEN;
        for F:=succ(E) to Z8 do
          if KOMPMATRIX∅E,F∅=false then KOMPATIBEL:=KOMPATIBEL-∅F∅;
        DURCH:=DURCHSCHNITT;
        for F:=E to Z8 do
          if KOMPMATRIX∅E,F∅=false then DURCH:=DURCH-∅F∅;
        EXPANDIERE(KOMBINATIONEN+∅E∅,KOMPATIBEL,DURCH)
      end
    end;

begin
  EXPANDIERE(∅,Z,Z)
end;

```

Abb. 3.9 Erzeugen von Cliques

3.2.3 Erzeugen ausgewählter R-Morphismen

Nachdem nun eine Methode eingeführt ist, mit deren Hilfe sich maximale R-Morphismen erzeugen lassen, bleibt die Frage zu klären, welche Art von R-Morphismen die einzelnen Cliques im Kompatibilitätsgraphen repräsentieren. Anschaulich läßt sich diese Frage beantworten, wenn wir die Elemente der zweistelligen Relationen f_1 bis f_p der R-Morphismen $F = [f_0, f_1, \dots, f_p]$ als Bögen eines Graphen auffassen, den wir durch seine Nachbarmatrix darstellen. Die Abbildungen 3.10a bis 3.10e zeigen die Matrizen der R-Morphismen (a) bis (e) aus Abb. 3.4.

Abb. 3.10a-e Matrixdarstellung verschiedener R-Morphismen

Folgende Aussagen beschreiben die Nachbarmatrizen der R-Morphismen

- Alle Spalten dürfen höchstens eine 1 enthalten, da die f_i , $i=1, \dots, p$ rechtseindeutig sind.
- Außer für die R-Homomorphismen dürfen auch alle Zeilen höchstens eine 1 enthalten, da die anderen maximalen R-Morphismen linkseindeutig sind.
- Enthalten alle Spalten eine 1 und keine Zeile mehr als eine 1, so handelt es sich um einen R-Monomorphismus oder bei quadratischer Matrix um einen R-Isomorphismus.
- Enthalten genauso viele Spalten wie Zeilen eine 1, so handelt es sich um einen R-Komorphismus.

Durch einfaches Abzählen der 1-Einträge in den Spalten und Zeilen der Nachbarmatrix läßt sich also die Art der R-Morphismen leicht bestimmen.

Falls wir an R-Homomorphismen, die ja als einzige nicht linkseindeutig sind, nicht interessiert sind, können wir deren Erzeugung von vornherein verhindern, indem wir aus der Kompatibilitätsmatrix alle 1-Eintragungen entfernen, die zwei Paarungen von Relationselementen als verträglich kennzeichnen, in denen zwei Relationselemente aus dem Relativ G aber nur ein Element aus G' auftreten. Abb. 3.11 zeigt die entsprechend korrigierte Matrix unseres Beispiels zum Vergleich mit Abb. 3.6.

	XY1	XY2	EPR1	EPR2
XY1'	1	0	0	0
XY2'	0	1	0	0
EPR1'	0	0	1	0
EPR2'	0	0	0	1

Abb. 3.10a

	XY1	XY2	EPR1	EPR2
XY1'	0	1	0	0
XY2'	1	0	0	0
EPR1'	0	0	0	1
EPR2'	0	0	1	0

Abb. 3.10b

	XY1	XY2	EPR1	EPR2
XY1'	1	1	0	0
XY2'	0	0	0	0
EPR1'	0	0	1	1
EPR2'	0	0	0	0

Abb. 3.10c

	XY1	XY2	EPR1	EPR2
XY1'	0	0	0	0
XY2'	1	1	0	0
EPR1'	0	0	0	0
EPR2'	0	0	1	1

Abb. 3.10d

	XY1	XY2	EPR1	EPR2
XY1'	0	1	0	0
XY2'	0	0	0	0
EPR1'	0	0	0	0
EPR2'	0	0	1	0

Abb. 3.10e

Abb. 3.10a-e Matrixdarstellung verschiedener R-Morphismen

Abb. 3.11 Modifizierte Kompatibilitätsmatrix

Im Bedarfsfall können wir das Erzeugen von R-Komorphismen, die eine zu geringe Anzahl von Relationselementen aufeinander abbilden, im Cliquenalgorithmus selbst verhindern. Er läßt sich so modifizieren, daß nur noch Cliquen mit einer Mindestgröße erzeugt werden. Wir brechen deswegen die while-Schleife nicht erst ab, wenn keine Kandidaten zur Erweiterung der Clique zur Verfügung stehen, sondern schon, wenn die Summe der Elemente in **KOMBINATIONEN** und **KANDIDATEN** die Mindestgröße unterschreitet. Den modifizierten Algorithmus zeigt Abb. 3.12; die Mindestgröße wird als Parameter übergeben und die Funktion **KARD** berechnet die Kardinalität ihrer Argumentmenge.

Abb. 3.12 Modifikationen mit unterer Schranke für die Cliquengröße

Wird als Mindestgröße die Zahl der Relationselemente im Relativ **G** angegeben, so werden keine R-Komorphismen mehr erzeugt (sondern nur noch R-Isomorphismen).

3.2.4 Erzeugen der besten R-Morphismen

Das Konzept, die Suche nach R-Morphismen abubrechen, wenn nur ungenügend viele Relationselemente aus den beiden Relativen aufeinander abgebildet werden können, läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß die Suche dann abgebrochen wird, wenn kein R-Morphismen mit genügend hoher Güte mehr gefunden werden kann. Nach dem klassischen Vorbild des A^* -Algorithmus [HART+68], [GELPERIN77] müssen wir dazu die Güte des R-Morphismus bestimmen, der aus den schon in der Menge **KOMBINATIONEN** versammelten Zuordnungselementen gebildet wird. Weiterhin müssen wir eine obere Schranke für den Zugewinn an Güte abschätzen, den der augenblickliche R-Morphismus durch Hinzufügen von Abbildungselementen aus der Menge **KANDIDATEN** bekommen kann. Unterschreitet die Summe aus beiden Gütewerten (siehe Abschnitt 3.3.1

	EPR1	EPR2	EPR1	EPR2	XY1	XY2	XY1	XY2
	EPR1'	EPR1'	EPR2'	EPR2'	XY1'	XY1'	XY2'	XY2'
EPR1								
EPR1'	0	0	0	1	1	0	0	1
EPR2								
EPR1'	0	0	1	0	0	1	1	0
EPR1								
EPR2'	0	1	0	0	0	1	1	0
EPR2								
EPR2'	1	0	0	0	1	0	0	1
XY1								
XY1'	1	0	0	1	0	0	0	1
XY2								
XY1'	0	1	1	0	0	0	1	0
XY1								
XY2'	0	1	1	0	0	1	0	0
XY2								
XY2'	1	0	0	1	1	0	0	0

Abb. 3.11 Modifizierte Kompatibilitätsmatrix

```

type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
  KOMP        = array[ZUORDNUNGEN,ZUORDNUNGEN] of boolean;
var
  KOMPMATRIX: KOMP;

procedure CLIQUE(Z: MENGE; UNTERGRENZE: INTEGER);
  procedure EXPANDIERE(KOMBINATIONEN,KANDIDATEN,DURCHSCHNITT: MENGE);
    var E,F: ZUORDNUNGEN; KOMPATIBEL,DURCH: MENGE;

    procedure AUSGABE(K: MENGE);
      begin writeln(K) end;

    function IRGENDEINSAUS(M: MENGE): ZUORDNUNGEN;
      label 1;
      var I: ZUORDNUNGEN;
      begin
        for I:=Z1 to Z8 do if I in M then goto 1;
        1: IRGENDEINSAUS:=I
      end;

    begin
      if DURCHSCHNITT=[] then AUSGABE(KOMBINATIONEN) else
        while KARD(KANDIDATEN+KOMBINATIONEN)>UNTERGRENZE do begin
          E:=IRGENDEINSAUS(KANDIDATEN);
          KANDIDATEN:=KANDIDATEN-CE];
          KOMPATIBEL:=KANDIDATEN;
          for F:=succ(E) to Z8 do
            if KOMPMATRIX[E,F]=false then KOMPATIBEL:=KOMPATIBEL-[F];
          DURCH:=DURCHSCHNITT;
          for F:=E to Z8 do
            if KOMPMATRIX[E,F]=false then DURCH:=DURCH-[F];
          EXPANDIERE(KOMBINATIONEN+CE],KOMPATIBEL,DURCH)
        end
      end;

    begin
      EXPANDIERE([],Z,Z)
    end;
end;

```

Abb. 3.12 Modifikationen mit unterer Schranke für die Cliquengröße

für eine additiv berechnete Güte) einen vorgegebenen Wert - etwa eine Mindestanforderung oder die Güte des bisher besten, gefundenen R-Morphismus - so kann die Weiterentwicklung des augenblicklichen R-Morphismus abgebrochen werden.

Die grösste Abschätzung ist sicherlich die, anzunehmen, daß alle noch für einen linkstotalen R-Morphismus benötigten Zuordnungselemente mit einer Konfidenz von 1 zur Verfügung stehen. Seien r die Anzahl der Relationen im Relativ G , g' die Summe der Konfidenzwerte für den augenblicklichen R-Morphismus und p dessen Kardinalität. Die obere Schranke für die Summe der Konfidenzwerte, aus denen sich nach Wichtung und Normierung die Güte ableitet, ist dann

$$h = g' + (r-p)$$

Die nächst feinere Abschätzung würde berücksichtigen, wieviele Elemente überhaupt in der Menge KANDIDATEN zur Verfügung stehen. Seien es q Elemente, dann ist eine verbesserte Schätzung

$$h = g' + g'' \quad \text{mit } g'' = (r-p+q-|r-p-q|)/2;$$

g'' ist das Minimum der vorhandenen (q) und der benötigten ($r-p$) Kandidaten. Ein weiterer Schritt in Richtung einer genaueren Schätzung könnte die Konfidenzwerte der Elemente aus der Menge KANDIDATEN berücksichtigen. Seien die Elemente k aus KANDIDATEN in der Reihenfolge abnehmender Konfidenz von 1 bis q indiziert, so ergibt sich

$$h = g' + \sum_{n=1}^{g''} \kappa(k_n).$$

Wir können nun berücksichtigen, daß die Elemente der Menge KANDIDATEN zu verschiedenen Abbildungen f_i des R-Morphismus $F = [f_0, f_1, \dots, f_m]$ gehören. Seien die $k^i \in f_i$ für jedes i individuell geordnet und sei g_i'' die Zahl der Elemente aus f_i , die dem augenblicklichen R-Morphismus (der Menge KOMBINATIONEN) noch hinzuzufügen möglich ist, dann ist eine verbesserte Abschätzung

$$h = g' + \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{g_i''} \kappa(k_n^i).$$

Auf eine letzte Verfeinerung sei noch hingewiesen. Wir können die Verträglichkeit der zur Schätzung ausgewählten Elemente k_n^i überprüfen, denn nur miteinander kompatible Zuordnungselemente können die Menge KOMBINATIONEN erweitern. In letzter Konsequenz führt das dazu, nur noch Cliques des

Kompatibilitäts-Teilgraphen, dessen Knotenmenge die KANDIDATEN sind, für die Schätzung zu verwenden. Sei h' die Konfidenzsumme einer solchen Clique, dann ist

$$h = g' + \text{maximum}[h'(\text{Cliques} \subseteq \text{KANDIDATEN})].$$

Hier wird der Aufwand zur Abschätzung umso höher, je umfangreicher die Menge KANDIDATEN ist. Ist die Menge KOMBINATIONEN zu Beginn leer, so setzt die Abschätzung schon die Lösung des Problems voraus. Man muß also den Aufwand für die Abschätzung gegen den Nutzen frühzeitig aufgebener Suchpfade abwägen. Eine eingehende Untersuchung dieser Fragestellung ist in [SHAPIRO+HARALICK81], und [HARALICK+SHAPIRO79,80] zu finden. Dort wird das analoge Problem der konsistenten Markierung ('consistent labeling') von Relationen behandelt und es werden verschiedene Formen von Suchalgorithmen sowie Untersuchungen und Simulationsresultate bezüglich ihres Verhaltens angegeben.

Unabhängig von dem verwendeten Schätzverfahren kann der Cliquenalgorithmus noch an einer weiteren Stelle verbessert werden. Neben der Wahl des Rekursions-Abbruchkriteriums läßt sich noch die Auswahl des nächsten Kandidaten steuern. Ersetzen wir die Funktion IRGENDEINSAUS durch die Funktion DASBESTEAUS, die aus der Argumentmenge das Element mit der höchsten Konfidenz auswählt, so wird die Wahrscheinlichkeit erhöht, daß die besten R-Morphismen zuerst gefunden werden. Die Abb. 3.13 zeigt die neue Form des Algorithmus, wobei die Funktion SCHAETZWERT den Wert für h nach einer der oben erwähnten Methoden berechnet

Abb. 3.13 Heuristische Suche nach Cliquen

```

type
  ZUORDNUNGEN = Z1..Z8;
  MENGE       = set of ZUORDNUNGEN;
  KOMP        = array[ZUORDNUNGEN,ZUORDNUNGEN] of boolean;
var
  KOMPMATRIX: KOMP;

procedure CLIQUE(Z: MENGE; MINDESTGUETE: REAL);
  procedure EXPANDIERE(KOMBINATIONEN,KANDIDATEN,DURCHSCHNITT: MENGE);
    var E,F: ZUORDNUNGEN; KOMPATIBEL,DURCH: MENGE;

    procedure AUSGABE(K: MENGE);
      begin writeln(K) end;

    function IRGENDEINSAUS(M: MENGE): ZUORDNUNGEN;
      label 1;
      var I: ZUORDNUNGEN;
      begin
        for I:=Z1 to Z8 do if I in M then goto 1;
        1: IRGENDEINSAUS:=I
      end;

    begin
      if DURCHSCHNITT=[] then AUSGABE(KOMBINATIONEN) else
        while SCHAETZWERT(KOMBINATIONEN,KANDIDATEN)>MINDESTGUETE do begin
          E:=IRGENDEINSAUS(KANDIDATEN);
          KANDIDATEN:=KANDIDATEN-[E];
          KOMPATIBEL:=KANDIDATEN;
          for F:=succ(E) to Z8 do
            if KOMPMATRIX[E,F]=false then KOMPATIBEL:=KOMPATIBEL-[F];
          DURCH:=DURCHSCHNITT;
          for F:=E to Z8 do
            if KOMPMATRIX[E,F]=false then DURCH:=DURCH-[F];
          EXPANDIERE(KOMBINATIONEN+[E],KOMPATIBEL,DURCH)
        end
      end;

    begin
      EXPANDIERE([],Z,Z)
    end;

```

Abb. 3.13 Heuristische Suche nach Cliques

3.2.5 Parallele Erzeugung der R-Morphismen

Anstatt hier weiter auf heuristische Suchverfahren einzugehen, wird eine Alternative vorgestellt, die mit einfachen Operationen auf Mengen und ohne Rekursion auskommt. Mengen kann man durch Bitvektoren darstellen, wenn man die Elemente des Universums indiziert und die Inklusion eines Elementes in einer durch einen Bitvektor repräsentierten Menge durch das durch die Elementnummer indizierte Bit angibt. Vereinigung und Durchschnitt können dann auf Boolesche Disjunktion und Konjunktion zurückgeführt werden. Diese Repräsentation ist deswegen attraktiv, da auf jedem Digitalrechner Boolesche Operationen effizient implementiert sind. In [CHENG+HUANG81] wird beispielsweise ein Algorithmus zur Berechnung von Subgraph-Isomorphie entwickelt, der im wesentlichen mit Booleschen Operationen auskommt. Andere Autoren verwenden Boolesche Gleichungssysteme zur Konstruktion von Cliques [AKKOYUNLU73], [MISRA74], [OSTEEN74], [SEN GUPTA+PALIT79].

Der hier vorgestellte Ansatz verhindert nicht die Erzeugung von Zwischenresultaten, die nicht zu einem R-Morphismus führen, versucht dafür aber, die Zwischenresultate schnell zu berechnen. Wir gehen wieder von der Menge C der Knoten im Kompatibilitätsgraphen aus und stellen sie als Bitvektor dar, dessen Komponenten alle auf 1 gesetzt sind. Anstatt nun jedoch die Kompatibilitätsmatrix (Nachbarmatrix) explizit aufzustellen, wie sie im vorher vorgeschlagenen Verfahren verwendet wurde, werden aus der Menge C zwei Mengen C' und C'' gebildet, sobald Unverträglichkeit zwischen zwei Zuordnungselementen festgestellt wird. Die Menge C' enthält nur das eine der beiden Elemente, die Menge C'' nur das andere. Der Prozeß wird iterativ für alle unverträglichen Elementpaare und alle Mengen, die beide Elemente des Paares enthalten, fortgeführt. Die so gebildete Mengen enthalten zu jedem Zeitpunkt nur solche Elemente, die miteinander verträglich sind oder deren Unverträglichkeit noch nicht bekannt ist. Sind alle Zuordnungspaare überprüft, repräsentieren die Ergebnismengen die R-Morphismen zwischen beiden Relationengebilden. Da wir nur an maximalen R-Morphismen interessiert sind, können während der Iteration Mengen, die Teilmengen von anderen sind, gelöscht werden. Wir veranschaulichen das Verfahren an dem oben benutzten Beispiel in Abb. 3.14

XY1 XY1'	XY1 XY2'	XY2 XY1'	XY2 XY2'	EPR1 EPR1'	EPR1 EPR2'	EPR2 EPR1'	EPR2 EPR2'	unverträglich
1	1	1	1	1	1	1	1	XY1/XY1'-XY1/XY2'
0	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	1	1	1	1	1	1	XY1/XY1'-EPR1/EPR2'
0	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	1	- nicht maximal
1	0	1	1	1	0	1	1	XY1/XY2'-EPR1/EPR1'
0	0	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	1	0	1	1	XY2/XY1'-XY2/XY2'
0	0	0	1	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	0	1	1	XY2/XY1'-EPR2/EPR2'
0	0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	0	1	1	1	1	- nicht maximal
0	0	1	0	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	- nicht maximal
0	1	1	0	0	1	1	0	
1	0	0	1	1	0	1	1	
1	0	0	0	1	0	1	1	- nicht maximal
1	0	1	0	1	0	1	0	XY2/XY2'-EPR2/EPR1'
0	0	0	0	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	1	0	1	
0	0	1	0	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	0	
1	0	0	0	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	EPR1/EPR1'-EPR1/EPR2'
0	0	0	0	0	1	1	1	- nicht maximal
0	0	0	0	1	0	1	1	- nicht maximal
0	0	0	1	0	1	0	1	- nicht maximal
0	0	0	1	1	0	0	1	- nicht maximal
0	0	1	0	0	1	1	0	- nicht maximal
0	0	1	0	0	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	0	
1	0	0	0	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	EPR2/EPR1'-EPR2/EPR2'
0	1	0	0	0	1	0	1	- nicht maximal
0	1	0	0	0	1	1	0	- nicht maximal
0	1	0	1	0	1	0	1	Homomorphismus (d)
0	1	1	0	0	1	1	0	Isomorphismus (b)
1	0	0	0	1	0	0	1	- nicht maximal
1	0	0	0	1	0	1	0	- nicht maximal
1	0	0	1	1	0	0	1	Isomorphismus (a)
1	0	1	0	1	0	1	0	Homomorphismus (c)

Abb. 3.14 Iterative Erzeugung der R-Morphismen

Abb. 3.14 Iterative Erzeugung der R-Morphismen

In der Tabelle sind in jedem Block alle Cliques des Kompatibilitätsgraphen aufgeführt, die sich ergeben, wenn man von einem vollständigen Graphen (erste Zeile) ausgeht und in ihm die rechts zwischen den Blöcken angeschriebenen Bögen entfernt. Die vier maximalen R-Morphismen im letzten Block sind in Übereinstimmung mit Abb. 3.4 durch (a) bis (d) gekennzeichnet. Die beiden Grundoperationen des Aufspaltens zweier Mengen und des Prüfens auf Maximalität sehen in PASCAL-Notation wie folgt aus, wobei C1 bis C4 Mengen- und E1 sowie E2 Elementvariablen sind:

```
.....  
if (E1 in C1) and (E2 in C1) then begin  
  C2 := C1 - [E1]; C3 := C1 - [E2]  
end;  
.....  
if C2 * C4 = C2 then C2 := []  
else if C2 * C4 = C4 then C4 := [];  
.....
```

Beim Prüfen auf Maximalität muß nicht jede Clique mit jeder anderen verglichen werden. Gehen wir - bildlich an Abb. 3.14 orientiert - von einem Block zu dem nächsten über, so gibt es in dem Vorgängerblock zwei Klassen von Cliques K1 und K2; einige Cliques sind von der Unverträglichkeit der beiden Elemente betroffen (K1), die anderen nicht (K2). Die Klasse K1 zerfällt in zwei Teilklassen K1' und K1" je nachdem, ob das eine oder das andere Element entfernt wurde. Eine Clique aus K1' kann nicht in einer anderen aus K1" enthalten sein, da in beiden unterschiedliche Elemente entfernt beziehungsweise belassen wurden. Eine Clique aus K1' kann nicht in einer anderen aus K1' enthalten sein, denn dann hätten ihre "Eltern" auch schon ineinander enthalten sein müssen, aus denen ja dasselbe Element entfernt wurde. Dasselbe gilt auch für K1". Zu prüfen sind also nur Cliques aus K2 in Kombination mit Cliques aus K1' sowie K1".

Eine Verkürzung des Verfahrens kann analog wie im vorigen Abschnitt beschrieben durch Eliminieren von Cliques mit zu geringer Güte geschehen. Der einfachste Ansatz ist auch hier sicherlich, sofort Cliques mit einer zu geringen (gegenüber einer vorgegebenen) Zahl von Elementen auszusondern. Weitere Verfahren unter Berücksichtigung der Gütwerte sind denkbar.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß dieses Verfahren sehr gut zur Durchführung in einer Mehrprozessor-Datenverarbeitungsanlage geeignet ist. Ein sehr einfacher Prozessor für Boolesche Operationen kann die Manipulation der Cliques übernehmen während ein zweiter Prozessor die nichtkompatiblen Zuordnungselemente ermittelt und dem ersten meldet. Hat der zweite Prozessor dem ersten den Abschluß seiner Ermittlungen mitgeteilt, sendet der erste die Menge der R-Morphismen zurück.

Unabhängig von der gewählten Methode zum Ermitteln der gewünschten R-Morphismen besteht das beste Mittel zum Verringern des Rechenaufwandes darin, den Umfang der aufeinander abzubildenden Relationengebilde und die Zahl der maximalen R-Morphismen möglichst klein zu halten. Einen möglichen Weg dazu zeigt der nächste Abschnitt.

3.3 HIERARCHISCHE SYNTHESE

In [BARROW+72] findet sich eine Abschätzung über die Größenordnung an Aufwandsverringerung, die sich erreichen läßt, wenn die zu vergleichenden Strukturen nicht direkt sondern erst nach hierarchischer Gruppierung der Strukturbestandteile aufeinander abgebildet werden ('hierarchical synthesis'). Wir argumentieren im folgenden für eine solche Gruppierung im Rahmen des bisher entwickelten Formalismus.

Eine Möglichkeit, von zwei Graphen zu bestimmen, ob sie isomorph sind, besteht darin, die Knoten beider Graphen durch ihre Zugehörigkeit zu Äquivalenzklassen von Knoten eindeutig zu kodieren [BHAT80]. Ist das geschehen, muß nur noch geprüft werden, ob zu jedem Knoten des einen Graphen ein Knoten mit identischem Code im anderen Graphen enthalten ist. Natürlich müssen die Äquivalenzklassen gerade so ausgesucht werden, daß sie invariant unter Isomorphie sind. Ein Beispiel für eine solche Klasse ist die

Äquivalenzklasse von Knoten mit demselben Grad (Anzahl der Nachbarn). In diesem Verfahren wird die Kombinatorik der Knotenzuordnung zwischen beiden Graphen vollständig aufgehoben. Übertragen auf die Problematik des Vergleichs von Relationengebilden bedeutet das, die Relationselemente der Relatione so in Klassen einzuteilen, daß nur Elemente aus gleichen Klassen einander zugeordnet werden müssen. Eine Methode einer solchen Einteilung ist es, solche Elemente einer Relation zu Äquivalenzklassen zusammenzufassen, die Inkarnationen desselben Modells sind. Durch den hierarchischen Aufbau der Modelle kann die Äquivalenzklassen-Unterteilung verfeinert werden. So mag es viele Linien, modelliert als Geradenstück mit seinen Endpunkten, in einem Bild geben, aber nicht alle davon werden gleichzeitig zu Dreiecken und zu Rechtecken gehören. Die in Abschnitt 2.3.5 eingeführten "VON" und "ZU" Relationen vermitteln einen direkten Zugriff zu den Relationselementen in den gewünschten Klassen.

Gehen wir einmal von einem hierarchisch über mehrere Ebenen organisierten Modell aus, dessen Modellobjekt (siehe Abschnitt 2.3.1) M_0 aus zwei Teilobjekten M_{01} und M_{02} auf einer tieferen Hierarchieebene besteht. Wir gehen weiter davon aus, daß Inkarnationsteilobjekte (siehe Abschnitt 2.3.5) I_{01m} und I_{02n} schon existieren. Um ein Inkarnationsobjekt I_{0k} zu konstruieren, müssen wir zwei Inkarnationsobjekte - etwa I_{01i} und I_{02j} - finden, die die im Modell M_0 spezifizierten Relationelemente enthalten. Wir gehen nun vor wie im Abschnitt 3.1 beschrieben. Die möglichen Zuordnungen $M_{01} \leftrightarrow I_{01m}$ und $M_{02} \leftrightarrow I_{02n}$ werden als Knoten eines Kompatibilitätsgraphen aufgefaßt und die nach den Bedingungen, die das Modell M_0 stellt, miteinander verträglichen Zuordnungsknoten werden durch einen Bogen verbunden. Die jeweils in einer Clique versammelten Zuordnungsknoten konstituieren das Inkarnationsobjekt I_{0k} ($k=1 \dots$ Anzahl der Cliques).

Zwei Bedingungen müssen erfüllt werden, damit ein Inkarnationsteilobjekt als Kandidat für eine Zuordnung zugelassen wird.

- Im Modell M_0 können für einige auch schon in dem Teilmodell M_{01} beziehungsweise M_{02} enthaltenen Relationelemente einschränkendere Merkmalswerte definiert werden. Für diese Relationelemente sind in den Inkarnationsobjekten I_{01m} beziehungsweise I_{02n} die Merkmalswerte zu überprüfen.
- Das Modell M_0 kann für Trägerelemente aus M_{01} beziehungsweise M_{02} neue

Relationen definieren. Dann muß geprüft werden, ob diese Relationen auch in den Inkarnationsteilobjekten $I01m$ beziehungsweise $I02n$ gelten.

Alle Inkarnationsteilobjekte, die diese Bedingungen erfüllen, können in Zuordnungen auftreten. Spezifiziert das Modell $M0$ Relationen zwischen Trägerelementen aus beiden Teilmodellen, so müssen diese Relationen auch zwischen den entsprechenden Trägerelementen der zugeordneten Inkarnationsteilobjekten gelten, damit die beiden Zuordnungselemente verträglich sind. Eine Clique im Kompatibilitätsgraphen repräsentiert eine Inkarnation des Modellobjektes $M0$.

Der Vergleich von Strukturen aus zwei Bildern einer Folge gelingt auf analoge Weise, nur wird die Rolle der Modellobjekte von Inkarnationsobjekten aus dem zweiten Bild übernommen. Es ist günstig, Bilder auf möglichst hoher Hierarchieebene zu vergleichen, auf der die Zahl der Objekte genügend gering ist.

In dem von Bertelsmeier und Radig konzipierten und in wesentlichen Teilen von Kraasch und Zach implementierten System [BERTELSMEIER+RADIG77a,b], [KRAASCH+ZACH79], [KRAASCH+79] wird die hierarchische Synthese angewandt, um markante Punkte eines sich bewegenden Polyeders zu finden. Es werden unterschiedliche Modelle für Eckpunkte benutzt, beispielsweise für solche Punkte, die sich in der Zahl der sichtbaren, sich schneidenden Kanten unterscheiden. Um die Koordinaten der Eckpunkte im dreidimensionalen Raum berechnen zu können, muß die Projektion jedes Eckpunktes durch mehrere Bilder verfolgt werden. Korrespondenz zwischen den Eckpunkt-Projektionen wird ermittelt, indem die markanten Punkte, ihre Verbindungskanten und die davon eingeschlossenen Regionen automatisch in ein zweidimensionales Modell des Polyederbildes konvertiert werden. Die besten Inkarnationen dieses Modelles im nächsten sowie im vorausgegangenen Bild liefern die benötigte Korrespondenzbeziehung zwischen den Punkten.

Kapitel 4

RESUMEE

Eine Möglichkeit der Analyse von Bildern zeitlich oder räumlich geordneter Bildfolgen besteht darin, Bildsymbole für einzelne Bilder oder Gruppen von Bildern innerhalb einer Folge zu erzeugen. Die Merkmale der Symbole und ihre gegenseitigen Beziehungen werden ausgewertet, um die gewünschte Information zu extrahieren.

Hier werden Relationengebilde als formale Beschreibung der Bildsymbole vorgeschlagen. Spezielle Ausprägungen von Relationengebilden dienen schon häufig als formale Grundlage für Symbole und sind bei dem Einsatz von relationalen Bilddatenbanken zur Unterstützung der Analyse offensichtlich notwendig (siehe etwa [CHANG81]). Beim Aufbau und Vergleich relationaler Strukturen wurden ebenso häufig Algorithmen entwickelt, die eben nur spezielle Relationengebilde behandeln können, beispielsweise in [JACOBUS+80] oder [CHENG+HUANG80].

Obwohl im Kapitel 2 dieser Arbeit ausgewählte Relationengebilde zur Illustration der symbolischen Beschreibung von Bildern herangezogen wurden, sind die im dritten Kapitel entwickelten Methoden zur Suche nach Abbildungen zwischen Relationengebilden auf allgemeine Relative anwendbar. Den größten Nutzen bringt die Existenz solcher Verfahren, wenn die wesentlichen Datenstrukturen, die bei der Auswertung von Bildfolgen auftreten, als Relationengebilde formuliert werden.

Zwei Datenstrukturen sind wesentlich, die symbolische Beschreibung der Bilder und das abstrakte, interne Modell, das die Analyseprogramme zur Beschreibung der beobachteten Szene aufbauen. Zwei Abbildungen sind wesentlich, diejenige zwischen Bild und Modell und diejenige zwischen den Bildern einer Folge. Beide Abbildungen können mit den im dritten Kapitel vorgestellten Verfahren als R-Morphismen erzeugt werden. Darüberhinaus wurden noch weitere Anwendungen der R-Morphismen aufgezeigt. Die Analyse der Bilder läßt sich durch Vorwissen steuern, daß in Form von prototypischen Modellen zur Verfügung steht. Das abstrakte, interne Modell wird in den Inkarnationsobjekten explizit als Relationengebilde aufgebaut. Wiederum vermitteln R-Morphismen die Kopplung zwischen Prototypen und Inkarnationen sowie Inkarnationen und Bildern. Die Suche nach Inkarnationen läßt sich durch einen hierarchischen Aufbau der Prototypen optimieren. Auch dabei bilden die R-Morphismen das Bindeglied zwischen Modellen und ihren Komponenten.

R-Morphismen bestehen aus zweistelligen Relationen. Die Erweiterung dieser Relationen sowie derjenigen, die Bestandteile der Relationengebilde sind, um einen Konfidenz-, Akzeptanz-, Güte-, oder ähnlichen Wert läßt die Anwendung der Theorie der 'fuzzy sets' zu, verwandelt die Relationen in F-Relationen, wie sie hier genannt wurden. Damit lassen sich Relationengebilde ebenso bewerten - etwa der Grad der Übereinstimmung zwischen Prototyp und Inkarnation - wie R-Morphismen, um beispielsweise die Vollständigkeit einer Abbildung zwischen zwei Bildstrukturen, also die Ähnlichkeit zwischen Bildern zu messen.

Die Realisierung eines Konzeptes zur Beschreibung von Bildfolgen durch Relationengebilde und Morphismen erfordert drei grundlegende Bausteine.

- Der erste erzeugt Bildsymbole und bettet sie in ein Netz von Beziehungen - das Bildrelativ - ein. Man kann hier auf einen großen Fundus von Segmentationsverfahren zurückgreifen [HILLE81], deren Resultate als Relationengebilde formuliert werden können [KRAASCH+ZACH78].
- Der zweite Baustein ist die Implementation der Relation als Datenstruktur. Hier bieten einige wenige Programmiersprachen, die im Bereich der "Künstlichen Intelligenz" entstanden sind, Unterstützung an. Einen vielversprechenden Ansatz bilden Datenbanken nach dem relationalen Modell

[CODD70,82]. Sie sind besonders attraktiv für die Bildfolgenanalyse, da erfahrungsgemäß die große, anfallende Datenmenge eine Aufbewahrung von Bildbeschreibungen und Zwischenergebnissen auf einem Massenspeicher erfordert. Inzwischen wurden auch bekannte Programmiersprachen um Datenstrukturen und Operatoren für Relationen erweitert, so etwa PASCAL [SCHMIDT77].

- Der dritte Baustein erzeugt die benötigten Morphismen. Einige Realisierungsmöglichkeiten wurden im dritten Kapitel aufgezeigt. Die Formulierung der Morphismen-Erzeugung als Suche nach bestimmten Strukturen in einem Graphen eröffnet das Feld der Graphtheorie und der darin vorgenommenen Untersuchungen zur Optimierung graphverarbeitender Algorithmen.

Diese drei Bausteine sind weitgehend unabhängig voneinander, natürlich müssen sie an ihren Schnittstellen in den Datenstrukturen übereinstimmen. Diese lose Kopplung ermöglicht beispielsweise die Verteilung der drei Aufgaben auf verschiedene Prozessoren in einem gekoppelten Netz. Zur Zeit wird in einem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekt untersucht, wie ein relationales Datenbanksystem beschaffen sein muß und in einem Rechnernetz implementiert werden kann, das die Verwaltung von Relationengebilden und die Erzeugung von R-Morphismen unmittelbar unterstützt [BENN+RADIG82].

Das Rechnernetz, mit dessen Hilfe auch einige der hier zitierten Untersuchungen durchgeführt wurden, besteht zur Zeit aus fünf Prozeßrechnern mit umfangreicher, zum Teil selbstentwickelter Peripherie. Es wurde im Arbeitsbereich "Kognitive Systeme" unter der Leitung von Prof. H.-H. Nagel aufgebaut. Ihm und seinen Mitarbeitern - Dipl. Phys. R. Bertelsmeier, P. Cord, Dr. L. Dreschler, Ing. grad. I. Heer, R. Jancke, Dr. H. Kemen, K. Kleemann, Prof. B. Neumann - spreche ich gerne meinen Dank aus. H.-H. Nagel hat die Idee zu dieser Arbeit schon sehr früh unterstützt, auch in der Zeit, als der Inhalt noch keine mittelbare Form hatte. In sehr kollegialer Weise haben er und B. Neumann es mir erleichtert, mich intensiv

mit dem hier behandelten Stoff zu beschäftigen. Beide haben die Arbeit kritisch gelesen und kommentiert. Auch für die Verbesserungsvorschläge meiner Frau, Dr. M.-J. Schachter-Radig, bin ich ihr - wie für vieles andere mehr - dankbar. Ein guter Freund und Kollege, Prof. J. P. Foith, hat ebenfalls einen Entwurf gelesen, konnte jedoch seine Kritik nicht mehr mitteilen. Ich bedaure seinen plötzlichen Tod sehr.

Dipl. Inf. W. Benn hat die Abbildungen gezeichnet. Ihm und den vielen Diskussionspartnern, die ich hier nicht alle namentlich erwähnen kann, gilt ebenfalls mein Dank.

Kapitel 5

DEFINITIONEN

Def.1: Relationengebilde (synonym Relativ)

Ein Relationengebilde ist ein Paar $G = (M, R)$, wobei $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ ein n -Tupel von Relationen auf der Trägermenge M ist. Die Relation R_i habe k_i Stellen. R heißt die Relationenstruktur auf M . Das n -Tupel (k_1, k_2, \dots, k_n) heißt die Stellenverteilung (synonym Typ) der Relationenstruktur.

Def.2: Familie

Sei I eine Indexmenge, M eine Menge und $F: I \rightarrow M$ eine Abbildung (siehe Definition 8), dann heißt F eine Familie und $F(I) \subseteq M$ eine indizierte Menge.

Def.3: Zweistellige Relation

M sei eine endliche Menge von Elementen, $M \times M$ das Kartesische Produkt. $R = \{(x, y)\} \subseteq M \times M$ heißt eine zweistellige Relation.

Def.4: Vor- und Nachbereich

Der Vorbereich $VORBER.(R)$ ist die Menge aller Elemente von M , die in der ersten Stelle von R auftreten.

$$VORBER.(R) = \{x \mid \exists (y): (x, y) \in R\}$$

entsprechend

$$NACHBER.(R) = \{y \mid \exists (x): (x, y) \in R\}$$

Def.5: Diagonale und Totalrelation

$DIAG.(M) = \{(x,x) \mid x \in M\}$ heißt die Diagonale (synonym Identität) von $M \times M$.

$TOTALR.(M) = \{(x,y) \mid x \in M, y \in M\} = M \times M$ heißt die Totalrelation auf $M \times M$.

Def.6: Inverse Relation

Die inverse Relation R^{-1} ist definiert durch
 $(y,x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x,y) \in R$.

Def.7: Produkt zweier Relationen

S sei wie R eine Relation auf $M \times M$.

$(x,z) \in R \circ S \leftrightarrow \exists (y): [(x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S]$

Def.8: Abbildung (synonym Funktion)

Eine rechtseindeutige (siehe Definition 9), zweistellige Relation F heißt Abbildung. Jedem Element aus dem Vorbereich von F wird genau ein Element aus dem Nachbereich von F zugeordnet.

Def.9: Rechts- und linkseindeutige Relation

Die Relation $R \subseteq M \times M$ ist rechtseindeutig, wenn $R^{-1} \circ R \subseteq DIAG.(M)$; entsprechend ist R linkseindeutig, wenn $R \circ R^{-1} \subseteq DIAG.(M)$. Bei rechtseindeutigen Relationen werden jedem Element aus dem Vorbereich genau ein Element aus dem Nachbereich zugeordnet. Damit ist eine rechtseindeutige Relation eine Funktion.

Def.10: Surjektive, injektive und bijektive Abbildung

F sei eine Abbildung $F: X \rightarrow Y$ von X in Y , wobei $F \subseteq M \times M$ und $M = X \cup Y$. F ist surjektiv, wenn $Y = NACHBER.(F)$, d.h. alle Elemente von Y treten als Werte der Funktion F auf. F ist injektiv, wenn die Relation linkseindeutig ist. Eine surjektive und injektive Abbildung heißt bijektiv.

Def.11: Isomorphie von Relativen

Die Abbildung $g: G \rightarrow G'$ heißt isomorphe Abbildung des Relativs G auf das Relativ G' , wenn gilt:

$g: M \rightarrow M'$ ist bijektiv.

$\wedge (m \in M): (m_j, \dots, m_1) \in Ri \leftrightarrow (g(m_j), \dots, g(m_1)) \in Ri'$

wobei $G = [M, (R_1, \dots, R_n)]$ und $G' = [M', (R_1', \dots, R_n')]$.

Def.12: Maximale Cliques

Eine Clique ist jeder Teilgraph eines Graphen, in dem alle Knoten miteinander verbunden sind. Eine Clique ist maximal, wenn sie in keiner anderen enthalten ist.

Def.13: symmetrische Relation

Eine Relation R heißt symmetrisch, wenn gilt $R \subseteq R^{-1}$.

Def.14: homologe Relationengebilde

Zwei Relationengebilde heißen homolog, wenn sie dieselbe Stellenverteilung (siehe Definition 1) besitzen.

Def.15: R-Morphismus

Ein R-Morphismus ist eine Menge von $(p+1)$ zweistelligen Abbildungen zwischen zwei homologen (siehe Definition 14) Relationengebilden der Form

$G = [M, (R_1, R_2, \dots, R_p)]$ beziehungsweise

$G' = [M', (R_1', R_2', \dots, R_p')]$.

Die Relationen f_0 bis f_p sind definiert als

$$f_0 \subseteq M \times M', \quad f_i \subseteq R_i \times R_i', \quad i=1, \dots, p$$

Außerdem gilt:

$$\bigwedge (i=1 \dots p): ((m_1, \dots, m_r), (m_1', \dots, m_r')) \in f_i \rightarrow (m_j, m_j') \in f_0,$$

wobei $j=1, \dots, r$ und $r=r(i)$.

Def.16: Links- und rechtstotale Abbildungen

Eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ heißt links- beziehungsweise rechtstotal, wenn $M = \text{VORBER.}(f)$ beziehungsweise $M' = \text{NACHBER.}(f)$ gilt.

Def.17: R-Homomorphismus

Ein R-Morphismus (siehe Definition 15) heißt R-Homomorphismus, wenn gilt: $\bigwedge (i=1 \dots p): f_i$ ist linkstotal (siehe Definition 16).

Def.18: R-Monomorphismus

Ein R-Homomorphismus (siehe Definition 17) heißt R-Monomorphismus, wenn gilt: $\bigwedge (i=1 \dots p): f_i$ ist injektiv (siehe Definition 10).

Def.19: R-Isomorphismus

Ein R-Monomorphismus (siehe Definition 18) heißt R-Isomorphismus, wenn gilt: $\wedge (i=0..p): f_i$ ist bijektiv (siehe Definition 10).

Def.20: R-Automorphismus

Ein R-Isomorphismus (siehe Definition 19) auf sich selbst ($F : G \rightarrow G$) heißt ein R-Automorphismus.

Def.21: R-Komorphismus

Sei G^\diamond ein Teilrelativ von $G = [M, (R_1, \dots, R_p)]$:

$G^\diamond \subseteq G \leftrightarrow M^\diamond \subseteq M$ und $\wedge (i=1..p): R_i^\diamond \subseteq R_i$.

$F : G \rightarrow G'$ ist ein R-Komorphismus, wenn in G und in G' isomorphe Teilrelative $G^\diamond \subseteq G$ und $G'^\diamond \subseteq G'$ existieren. Jeder mögliche (maximale) R-Isomorphismus (siehe Definition 19) zwischen solchen Teilrelativen ist ein R-Komorphismus.

Kapitel 6

LITERATUR

[AKKOYUNLU73]

The Enumeration of Maximal Cliques of Large Graphs
E. A. Akkoyunlu
SIAM J. Comput. 2 (1973) 1-6

[AMBLER+73]

A Versatile Computer-Controlled Assembly System
A. P. Ambler, H. G. Barrow, C. M. Brown, R. M. Burstall, R. J.
Poplestone
IJCAI-73, Int. Joint Conf. Art. Intelligence, Stanford Univ. 1973, pp.
298-307

[AMBLER+75]

A Versatile System for Computer Controlled Assembly
A. P. Ambler, H. G. Barrow, C. M. Brown, R. M. Burstall, R. J.
Poplestone
Artificial Intelligence 6 (1975) 129-156

[BAIRD+KELLY74]

A Paradigm for Semantic Picture Recognition
M. L. Baird, M. D. Kelly
Pattern Recognition 6 (1974) 61-74

[BAJCSY+JOSHI78]

A Partially Ordered World Model and Natural Outdoor Scenes
R. Bajcsy, A.K. Joshi
in [HANSON+RISEMAN78a], pp. 263-270

[BALLARD+78]

An Approach to Knowledge-Directed Image Analysis
D. H. Ballard, C. M. Brown, J. A. Feldman
in [HANSON+RISEMAN78a], pp. 271-282

[BARROW+POPPELSTONE71]

Relational Descriptions in Picture Processing
H. G. Barrow, R. J. Poplestone
Machine Intelligence 6 (B. Meltzer, D. Michie, Hrsg.), University
Press Edinburgh 1971, pp. 377-396

[BARROW+72]

Some Techniques for Recognising Structures in Pictures
H. G. Barrow, A. P. Ambler, K. M. Burstall
in [WATANABE72], pp. 1-29

[BARROW+TENENBAUM76]

MSYS: A System for Reasoning about Scenes
H.G. Barrow, J.M. Tenenbaum
Techn. Note 121, Artif. Intell. Center, Stanford Research Inst., Menlo
Park, CA, April 1976

[BARTELS+81]

Modellgestützte Analyse von kranialen Computer-Tomogrammen
D. Bartels, H. Neumann, H.S. Stiehl
in [RADIG81a], pp. 195-203

[BAUMANN81]

Proc. Image Understanding Workshop, Washington, D.C., 23. April 1981
L. S. Baumann (Hrsg.)
Science Applications, Inc., 1981

[BENN+RADIG82]

Entwurf einer relationalen Datenbank zur Unterstützung der Analyse von
Bildfolgen
W. Benn, B. Radig
Mitteilung des Fachbereichs Informatik der Universität Hamburg, in
Vorbereitung

[BERTELSMEIER+RADIG77a]

Kontextunterstützte Analyse von Szenen mit bewegten Objekten
R. Bertelsmeier, B. Radig
in [NAGEL77a], pp. 101-128

[BERTELSMEIER+RADIG77b]

Context Guided Analysis of Scenes with Moving Objects
R. Bertelsmeier, B. Radig
Bericht IfI-HH-B-41/77 des Fachbereichs Informatik der Universität
Hamburg 1977

[BHAT80]

Refined Vertex Codes and Vertex Partitioning Methodology for Graph
Isomorphism Testing
K. V. S. Bhat
IEEE Trans. SMC-10 (1980) 610-615

[BINFORD81]

Survey of Model Based Image Analysis Systems
T. O. Binford
Vortrag 4. DAGM Symposium, Hamburg, 6.-8. Oktober 1981

[BOLLES79]

Robust Feature Matching Through Maximal Cliques
R. C. Bolles
SPIE 182 (1980) 140-149

- [BRON+KERBOSCH73]
Finding All Cliques of an Undirected Graph
C. Bron, J. Kerbosch
Comm. ACM 16 (1973) 525-577
- [CHANG81]
Image Analysis and Image Database Management
N.-S. Chang
UMI Research Press, Ann Arbor, 1981
- [CHANG+FU80a]
Pictorial Information Systems
S. K. Chang, K. S. Fu
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980
- [CHANG+FU80b]
A Relational Database System for Images
N. S. Chang, K. S. Fu
in [CHANG+FU80a], pp. 288-321
- [CHENG+HUANG80]
Algorithms for Matching Relational Structures and their Applications
to Image Processing
J.-K. Cheng, T. S. Huang
Report TR-EE 80-53, Purdue Univ., West Lafayette, IN., Dec. 1980
- [CHENG+HUANG81]
A Subgraph Isomorphism Algorithm Using Resolution
J.-K. Cheng, T. S. Huang
Pattern Recognition 13 (1981) 371-379
- [CODD70]
A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks
E. F. Codd
Comm. ACM 13 (1970) 377-387
- [CODD82]
Relational Database: A Practical Foundation for Productivity
E. F. Codd
Comm. ACM 25 (1982) 109-117
- [DEO74]
Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science
N. Deo
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974
- [DOUGLASS81]
Interpreting Three-Dimensional Scenes: A Model Building Approach
R. Douglass
Comp. Graph. Image Proc. 17 (1981) 91-113
- [DRESCHLER81a]
Ermittlung markanter Punkte auf den Bildern bewegter Objekte und
Berechnung einer 3D-Beschreibung auf dieser Grundlage
L. Dreschler
Dissertation am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg, 1981

[DRESCHLER81b]

Zur Reproduzierbarkeit von markanten Bildpunkten bei der Auswertung von Realwelt-Bildfolgen

L. Dreschler

in [RADIG81a], pp. 76-82

[DYER+80]

Region Representation: Boundary Codes from Quadrees

L. R. Dyer, A. Rosenfeld, H. Samet

Comm. ACM 23 (1980) 171-179

[FISCHLER+ELSCHLAGER73]

The Representation and Matching of Pictorial Structures

M. A. Fischler, R. A. Elschlager

IEEE Trans. C-22 (1973) 67-92

[FOITH79]

Angewandte Szenenanalyse

J. P. Foith (Hrsg.)

2. DAGM Symposium, Oktober 1979 in Karlsruhe, Informatik Fachberichte 20, Springer-Verlag, Heidelberg 1979

[FU80]

Picture Syntax

K. S. Fu

in [CHANG+FU80a], pp. 104-127

[FU81]

Syntactic Models for Image Analysis

K. S. Fu

in [RADIG81a], pp. 271-295

[FU+CHANG81]

An Integrated Image Analysis and Image Database Management System

K. S. Fu, N. S. Chang

Proc. COMPCON Fall 1981, Sept. 15-17, Washington, D.C.

[GOOD+LANGHAM77]

Erkennung und Parametrisierung geometrischer Strukturen von LANDSAT-Bildern

W. Good, E. J. Langham

in [NAGEL77a], pp. 46-59

[GELPERIN77]

On the Optimality of A^{*}

D. Gelperin

Artificial Intelligence 8 (1977) 69-76

[GUZMAN71]

Analysis of Curved Line Drawings Using Context and Global Information

A. Guzman

Machine Intelligence 6 (B. Meltzer, D. Michie, Hrsg.), University Press Edinburgh 1971, pp.325-375

[HANSON+RISEMAN78a]

Computer Vision Systems
A.R. Hanson, E.M. Riseman (Hrsg.)
Academic Press, New York, NY, 1978

[HANSON+RISEMAN78b]

Segmentation of Natural Scenes
A.R. Hanson, E.M. Riseman
in [HANSON+RISEMAN78a], pp. 129-163

[HANSON+RISEMAN78c]

VISIONS: A Computer System for Interpreting Scenes
A.R. Hanson, E.M. Riseman
in [HANSON+RISEMAN78a], pp. 303-333

[HARALICK78]

Scene Analysis, Arrangements, and Homomorphisms
R. M. Haralick
in [HANSON+RISEMAN78a], pp.199-212

[HARALICK+SHAPIRO79]

The Consistent Labeling Problem: Part I
R. M. Haralick, L. G. Shapiro
IEEE Trans. PAMI-1 (1979) 173-184

[HARALICK+SHAPIRO80]

The Consistent Labeling Problem: Part II
R. M. Haralick, L. G. Shapiro
IEEE Trans. PAMI-2 (1980) 193-203

[HARARY69]

Graph Theory
F. Harary
Addison Wesley, Reading, MA, 1969

[HART+68]

A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths
P. E. Hart, N. Nilson, B. Raphael
IEEE Trans. SSC-4 (1968) 100-107, Corrections in SIGART Newsletter
No.17, Dec. 1972, 28-29

[HILLE81]

Methoden und Modelle in der Bildsegmentation - Eine Übersicht
G. Hille
Bericht IFI-HH-B-80/81 des Fachbereichs Informatik der Universität
Hamburg, 1981

[HOGG76]

Visual Perception in the Changing Environment: A Paradigm for
Real-Time Analysis
D.C. Hogg
Report 29, Univ. of Western Ontario, Dept. of Comp. Science, Oct. 1976

[HOROWITZ+PAVLIDIS78]

A Graph-Theoretic Approach to Picture Processing
S. L. Horowitz, T. Pavlidis
Comp. Graph. Image Proc. 7 (1978) 282-291

[HUANG81]

Image Sequence Analysis
T. S. Huang (Hrsg.)
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981

[JACOBUS+80]

Detection and Analysis of Matching Graphs of Intermediate-Level Primitives
C.J. Jacobus, R.T. Chien, J.M. Selander
IEEE Trans. PAMI-2 (1980) 495-510

[JAIN+NAGEL79]

On the Analysis of Accumulative Difference Pictures from Image Sequences of Real World Scenes
R. Jain, H.-H. Nagel
IEEE Trans. PAMI-1 (1979) 206-214

[JOHNSTON76]

Cliques of a Graph - Variations on the Bron-Kerbosch Algorithm
H. C. Johnston
Int. J. Comp. Inf. Sciences 5 (1976) 209-238

[KOZEN78]

A Clique Problem Equivalent to Graph Isomorphism
D. Kozen
SIGACT News 10 (1978) 50-52

[KRAASCH+ZACH78]

SERF - Eine Untersuchung zur Segmentation und symbolischen Beschreibung von Fernsehbildern
R. Kraasch, W. Zach
Mitteilung IfI-HH-M-59/78 des Fachbereichs Informatik der Universität Hamburg 1978

[KRAASCH+ZACH79]

Dreidimensionale Beschreibung einfacher bewegter Gegenstände
R. Kraasch, W. Zach
Diplomarbeit am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg, 1979

[KRAASCH+79]

Automatische dreidimensionale Beschreibung bewegter Gegenstände
R. Kraasch, B. Radig, W. Zach
in [FOITH79], pp. 208-215

[KELLY71]

Edge Detection by Computer Using Planning
M. D. Kelly
Machine Intelligence 6 (B. Meltzer, D. Michie, Hrsg.), University Press Edinburgh 1971, pp. 379-409

[LEVINE+YOUSSEF78]

An Automatic Picture Processing Method for Tracking and Quantifying
the Dynamic of Blood Cell Motion

M.D. Levine, Y.M. Youssef

Report 78-4R, McGill Univ., Dept. of Electr. Engg., Febr. 1978

[MISRA74]

Necessary Subproblems in Maximal Clique Construction

J. Misra

7th Hawai Int. Conf. on System Sciences, Honolulu 8-10 Jan. 1974, pp.

124-128

[MÜHLE+RADIG81]

Entwurf eines Datenbanksystems zur Unterstützung der Analyse von
Bildfolgen

K. Mühle, B. Radig

in [RADIG81a], pp. 144-150

[NAGEL77a]

Digitale Bildverarbeitung

H.-H. Nagel (Hrsg.)

GI/NTG Fachtagung, März 1977 in München, Informatik-Fachberichte 8,
Springer-Verlag Heidelberg 1977

[NAGEL78]

Analysis Techniques for Image Sequences

H.-H. Nagel

IJCPR-78, Int. Joint Conf. Pattern Recognition, Kyoto 1978, pp.

186-205

[NAGEL81]

Image Sequence Analysis: What Can We Learn from Applications

H.-H. Nagel

in [HUANG81], pp. 19-228

[NEUMANN78]

Interpretation of Imperfect Object Contours for Identification and
Tracking

B. Neumann

IJCPR-78, Int. Joint Conf. Pattern Recognition, Kyoto 1978, pp.

691-693

[NEUMANN+RADIG80]

Strategien zur Analyse von Szenen mit Bewegung

B. Neumann, B. Radig

German Workshop on Artificial Intelligence, Bad Honnef 1980

[NEUMANN81]

3D-Information aus mehrfachen Ansichten

B. Neumann

in [RADIG81a], pp. 93-111

[OSTEEN74]

Clique Detection Algorithms Based on Line Addition and Line Removal

R. E. Osteen

SIAM J. Appl. Math. 26 (1974) 126-135

[PAVLIDIS77]

Structural Pattern Recognition

T. Pavlidis

Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977

[RADIG78]

Auswertung von digitisierten Fernsehbildern zur Beschreibung bewegter Objekte

B. Radig

Dissertation am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg, 1978,
Bericht IfI-HH-B-59/79

[RADIG+80]

Matching Symbolic Descriptions for 3-D Reconstruction of Simple Moving Objects

B. Radig, R. Kraasch, W. Zach

ICPR-80, Int. Conf. Pattern Recognition, Miami Beach 1980, pp.
1081-1084

[RADIG81a]

Modelle und Strukturen

B. Radig (Hrsg.)

4. DAGM Symposium Oktober 1981 in Hamburg, Informatik-Fachberichte 49,
Springer-Verlag Heidelberg 1981

[RADIG81b]

Inferential Region Extraction in TV-Sequences

B. Radig

IJCAI-81, Int. Joint Conf. Art. Intelligence, Vancouver 1981, pp.
719-721

[RADIG81c]

Image Region Extraction of Moving Objects

B. M. Radig

in [HUANG81], pp. 311-351

[RADIG+NAGEL81]

Evaluation of Image Sequences: A Look Beyond Applications

B. Radig, H.-H. Nagel

in [SIMON+HARALICK81], pp. 525-560

[ROSENFELD+KAK76]

Digital Picture Processing

A. Rosenfeld, A.C. Kak

Academic Press, New York, NY, 1976

[SAMET80]

Region Representation: Quadrees from Boundary Codes

H. Samet

Comm. ACM 23 (1980) 163-170

[SCHMIDT77]

Type Concepts for Database Definition: An Investigation Based on Extensions to Pascal

J. W. Schmidt

Bericht IFI-HH-B-37/77 des Fachbereichs Informatik der Universität

Hamburg, 1977

[SHAPIRO+HARALICK81]

Structural Descriptions and Inexact Matching
L. G. Shapiro, R. M. Haralick
IEEE Trans PAMI-3 (1981) 504-519

[SIMON+HARALICK81]

Digital Image Processing
J. C. Simon, R. M. Haralick (Hrsg.)
Reidel, Dordrecht, 1981

[SEN GUPTA+PALIT79]

On Clique Generation Using Boolean Equations
A. Sen Gupta, A. Palit
Proc. IEEE 67 (1979) 178-180

[STIES+76]

Organization of Object Data for an Image Information System
M. Sties, B. Sanyal, K. Leist
3rd Intern. Joint Conf. on Pattern Recogn. 1976, Coronado, CA, pp.
863-869

[TANIMOTO+PAVLIDIS75]

A Hierarchical Data Structure for Picture Processing
S. Tanimoto, T. Pavlidis
Comp. Graph. Image Proc. 4 (1975) 104-119

[TENENBAUM+BARROW77]

Experiments in Interpretation Guided Segmentation
J.M. Tenenbaum, H.G. Barrow
Artificial Intelligence 8 (1977) 241-274

[TOU+GONZALES74]

Pattern Recognition Principles
J.T. Tou, R.C. Gonzales
Addison-Wesley, Reading, MA. 1974

[TSAI+FU79]

Error-Correcting Isomorphisms of Attributed Relational Graphs for
Pattern Analysis
W. H. Tsai, K. S. Fu
IEEE Trans. SMC-9 (1979) 757-768

[TURNER74]

Computer Perception of Curved Objects Using a Television Camera
K. J. Turner
Ph.D. Thesis, Univ. of Edinburgh, 1974

[UHR72]

Layerd Recognition Cone Networks that Preprocess, Classify and
Describe
L. Uhr
IEEE Trans. C-21 (1972) 758-768

- [UHR+DOUGLASS79]
A Parallel-Serial 'Recognition Cone' System for Perception: Some Test Results
L. Uhr, R. Douglass
Pattern Recognition 11 (1979) 29-39
- [ULLMAN79]
The Interpretation of Visual Motion
S. Ullman
MIT Press, Cambridge, Mass. 1979
- [WAHLSTER77]
Die Repräsentation von vagem Wissen in natürlichsprachlichen Systemen der Künstlichen Intelligenz
W. Wahlster
Diplomarbeit am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg, 1977
- [WATANABE72]
Frontiers of Pattern Recognition
S. Watanabe (Hrsg.)
Academic Press, New York, NY, 1972
- [WINSTON75a]
The Psychology of Computer Vision
P. H. Winston (Hrsg.)
McGraw-Hill, New York, 1975
- [WINSTON75b]
Learning Structural Descriptions from Examples
P. H. Winston
in [WINSTON75a], pp. 157-210
- [ZADEH65]
Fuzzy Sets
L. A. Zadeh
Information and Control 8 (1965) 338-353
- [ZADEH73]
Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes
L. A. Zadeh
IEEE Trans. SMC-3 (1973) 28-44
- [ZUCKER78]
Vertical and Horizontal Processes in Low Level Vision
S.W. Zucker
in [HANSON+RISEMAN78a], pp. 187-195

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1 Monien, B.
Beziehungen zwischen Zeitkomplexitätsklassen und Kellerautomaten
mit Zählern
X/71, 36 p
- 2 Kupka, I., Wilsing, N.
A Formal Framework for Dialog Languages
XII/72, 64 p
- 3 Kupka, I., Wilsing, N.
Syntax und Semantik des Dialogsprachenkonzepts HDL
I/73, 54 p
- 4 Kupka, I., Wilsing, N.
An Approach to Formal Semantics of Dialog Languages
/73, 46 p
- 5 Brunnstein, K., Schmidt, J. W.
Teilnehmersysteme
II/73, 167 p
- 6 Monien, B., Weicker, R.
Ueber die Effizienz von Tabulator-Turingmaschinen mit beschränkter
Markenzahl im Vergleich zu anderen Maschinenmodellen
X/73, 34 p
- 7 Woehl, K.
PREVAN - ein Vorcompiler zur Vektoranalysis
X/73, 67 p
- 8 Monien, B.
Komplexitätsklassen von Automatenmodellen und beschränkte Rekursion
II/74, 95 p
- 9 Nagel, H.-H.
On Processes, High Level Languages and Structured Programs for
Computer Networks
V/74, 30 p
- 10 Fleischhauer, G.
Beziehungen zwischen den Zeitkomplexitätsklassen verschiedener
Automatenmodelle
IX/74, 42 p
- 11 Grosse-Lindemann, C.-O., Nagel, H.-H.
Postlude to a Pascal-Compiler Bootstrap on a DECSys-10
X/74, 28 p
- 12 Hoepner, M.
Ueber den Zusammenhang von Szilardsprachen und Matrixgrammatiken
XII/74, 119 p

- 13 Friesland, G., Sengler, H.-E.
Zur Uebertragung von Compilern durch Selbstcompilation am
Beispiel des Pascal-Compilers
XII/74, 190 p
- 14 Monien, B.
Rekursive und grammatikalische Charakterisierung der
Exponentialzeitsprachen und ein neuer Beweis des
Kleene'schen Normalformtheorems
III/75, 24 p
- 15 Heibey, H.-W.
Ein Modell zur Behandlung mehrdimensionaler Strukturen unter
Beruecksichtigung der in ihnen definierten Lagerrelationen
V/75, 140 p
- 16 Heibey, H.-W., Lutterbeck, B., Schueler, U., Sengler, H.-E.
Nichttechnische Auswirkungen bei der EDV-Anwendung
V/75, 64 p
- 17 Hoepner, M.
Durch Mischoperationen definierte Sprachfamilien
VII/75, 26 p
- 18 Kupka, I., Oberquelle, H., Wilsing, N.
An Experimental Language for Conversational Use
IX/75, 105 p
- 19 Kudlek, M.
Reducing Operators for General Formal Systems
XI/75, 21 p
- 20 Opp, M.
Charakterisierungen erkennbarer Termengen in absolut
freien universellen Algebren
I/76, 109 p
- 21 Schaeffler, G.
Stochastische OL-Systeme
II/76, 66 p
- 22 Juers, J.
Indexgrammatiken mit eingeschaenckter Regelanwendung
II/76, 39 p
- 23 Nagel, H.-H.
Experiences with Yakimovsky's Algorithm for Boundary and Object
Detection in Real World Images
III/76, 23 p
- 24 Wittig, T.
Semantische Analyse von Saetzen zur Erfassung
eines Sachverhaltes
V/76, 137 p
- 25 Brunnstein, K., Lewandowski, U., Schmidt, J. W.
Rechner fuer den Schuleinsatz - Ein Schulrechnerkatalog
X/75, 260 p

- 26 Albrecht, M.
Automatische Erkennung von Organgrenzen in Leber-Szintigrammen
und Erfassung von Parametern zur Beschreibung des Leber-
Abbildes im Szintigramm
III/76, 82 p
- 27 Nagel, H.-H.
Formation of an Object Concept by Analysis of Systematic
Time Variations in the Optically Perceptible Environment
VII/76, 36 p
- 28 Oberquelle, H.
Grundbegriffe zur Beschreibung von Dialogen und
dialogfaehigen Systemen
IX/76, 60 p
- 29 Krieg, B.
Petrietze und Zustandsgraphen
I/77, 100 p
- 30 Bruegge, B., Gisch, B., Kahl, T., Linde, H.,
Mittelstein, M., Westphal, H.
Concurrent PASCAL - Compiler fuer Kleinrechner
XII/76, 190 p
- 31 Schmidt, J. W.
Some High-Level Language Constructs for Data
of Type Relation : An Investigation Based on PASCAL Extensions
I/77, 18 p
- 32 Jain, R., Militzer, D., Nagel, H.-H.
Separating Non-stationary from Stationary Scene Components
in a Sequence of Real World TV-Images
III/77, 18 p
- 33 Nagel, H.-H.
Analysing Sequences of TV-Frames : System Design Considerations
III/77, 44 p
- 34 Valk, R.
Self-Modifying Nets
VII/77, 36 p
- 35 Hoepner, M., Opp, M.
Renaming and Erasing in Szilard Languages
V/77, 37 p
- 36 Ullrich, G.
Der Entwurf von Steuerstrukturen fuer parallele
Ablaeufe mit Hilfe von Petri-Netzen
XII/76, 268 p
- 37 Schmidt, J. W.
Type Concepts for Database Definition :
An Investigation Based on Extensions to PASCAL
V/77, 22 p

- 38 Wahlster, M.
Zur Repraesentation von vagem Wissen in natuerlich-
sprachlichen Systemen der kuenstlichen Intelligenz
VII/77, 190 p
- 39 Damm, F.-E.
Entwurf einer Dialogsprache zum computergestuetzten
Ableiten und Beweisen
V/77, 142 p
- 40 Bonk, M.
Rudimentaere Klassen
III/77, 69 p
- 41 Bertelsmeier, R., Radig, B.
Context-Guided Analysis of Scenes with Moving Objects
IV/77, 18 p
- 42 Neumann, B.
Identifikation von gestoerten Objektansichten unter
Verwendung geradliniger Konturapproximation
XII/77, 34 p
- 43 Materna, W.
Ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion von
repraesetativen Modellen
XII/77, 187 p
- 44 Dreschler, L., Nagel, H.-H.
Using 'Affinity' for Extracting Images of Moving
Objects from TV-Frame Sequences
II/78, 20 p
- 45 Froelich, R.
Zwei neue Verfahren zur Aufwandsminderung diskreter
Simulation von Rechensystemen
II/78, 157 p
- 46 Fischer, H., Jarke, M., Meyer, D., Schmidt, J. W., Ullmer, W.
A Structered Framework for the Implementations of Relations
II/78, 22 p
- 47 Seehusen, J.
Ein nichtlineares Optimierungsverfahren mit Restriktionen zur
Dimensionierung von Rechnerkonfigurationen
IV/78, 164 p
- 48 Jain, R., Nagel, H.-H.
On a Motion Analysis Process for Image Sequences from Real World Scenes
IV/78, 37 p
- 49 Friede, D.
Ueber deterministische kontextfreie Sprachen und rekursiven Abstieg
VI/78, 102 p
- 50 Dehning, W., Essig, H., Maass, S.
Zur Anpassung virtueller Mensch-Rechner-Schnittstellen an Benutzer-
erfordernisse im Dialog - dargestellt am Beispiel von Datenbanksystemen
VII/78, 272 p

- 51 Brodie, M. L.
The Application of Data Types to Databases
XII/78, 20 p
- 52 Meyer, D.
Entwurf und Implementation von PASCAL-Erweiterungen fuer die
Bearbeitung relationaler Datenbanken
VI/78, 104 p
- 53 Hoffmann, H.-J., Kupka, I.
Arbeiten mit interaktiven Systemen, erlaeutert am Vorgang des
Programmierens
- Theoretische Konzepte und Gesichtspunkte der Realisierung -
X/78, 30 p
- 54 Kupka, I., Maluszynski, J.
A Dialog Language with an ALGOL 68-Like Kernel.
Draft Description
XII/78, 43 p
- 55 Kowalk, W.
Reduktion paralleler Programme
XII/78, 152 p
- 56 Scheffe, P.
Foundations of Reasoning with Uncertain Facts and Vague Concepts
IX/78, 51 p
- 57 Boley, H.
Five Views of FIT Programming
IX/79, 200 p
- 58 Corbelin, H., Jobmann, M.
Simulation mit adaptiven Modellen
I/79, 206 p
- 59 Radig, B.
Auswertung von digitisierten Fernsehbildern zur Beschreibung
bewegter Objekte
III/79, 167 p
- 60 Schmidt, J. W.
Parallel Processing of Relations : A Single-Assignment Approach
VI/79, 11 p
- 61 Heibey, H.-W., Kuehn, M., Lutterbeck, B., Toepel, M.
Technologische Gestaltung von Mensch-Computer-Schnittstellen
VIII/79, 164 p
- 62 Oberquelle, H.
Objektorientierte Informationsverarbeitung und
benutzergerechtes Editieren, Teil 1 : Grundlagen
IX/79, 164 p
- 63 Oberquelle, H.
Objektorientierte Informationsverarbeitung und
benutzergerechtes Editieren, Teil 2 : Eine Anwendungsstudie
IX/79, 158 p

- 64 Jantzen, M.
Eigenschaften von Petrinetzsprachen
IX/79, 147 p
- 65 Essig, H.
Benutzerfreundlichkeit/Benutzerakzeptanz
XI/79, 31 p
- 66 Schmidt, J.W., Mall, M.
PASCAL/R Report
I/80, 46 p
- 67 Jantzen, M.
The Power of Synchronizing Operators on Strings
III/80, 53 p
- 68 Jantzen, M.
On a Special Monoid with Single Defining Relation
IV/80, 8 p
- 69 Heinemann, B.
Teilklassen der selbst-modifizierenden Netze
V/80, 114 p
- 70 Shafer, S. A.
MOOSE User's Manual - Implementation Guide - Evaluation
IV/80, 34 p
- 71 Nebel, B.
Weiterfuehrende Arbeiten am COPANET-Compiler :
Realisierung der verdeckten Interechner-Kommunikation im COPANET.
VI/80, 121 p
- 72 Musstopf, G., Winter, M.
Mikroprozessor-Trainingsystem MITRAS
VII/80, p
- 73 Lamersdorf, W., Schmidt, J. W.
Specification of PASCAL/R. The Semantic Specification Method VDM.
VII/80, 57 p
- 74 Lamersdorf, W., Schmidt, J. W.
Specification of PASCAL/R. The Formal Semantic Specification Using VDM
VII/80, 48 p
- 75 Oberquelle, H.
Communication by Graphic Net Representations
III/81, 87 p
- 76 Kupka, I.
Partial Algebras for Representing Semantics of Information Processing
VII/80, 206 p
- 77 Kowalk, W.
Verkehrsanalyse in endlichen Zeitraeumen
IX/80, 164 p

- 78 Jarke, M., Schmidt, J. W.
Evaluation of First-Order Relational Expressions in PASCAL/R
VI/81, 84 p
- 79 Koch, J., Schmidt, J. W.
Type Derivation for First-Order Relational Expressions
VI/81, 23 p
- 80 Hille, G.
Methoden und Modelle in der Bildsegmentation
VI/81, 117 p
- 81 Schoett, O.
Ein Modulkonzept in der Theorie Abstrakter Datentypen
VII/81, 152 p
- 82 Rieger, N.
Implementation und Vergleich approximativer Verfahren
zur Analyse von geschlossenen Warternetzen
IX/81, 216 p
- 83 Dreschler, L.
Ermittlung markanter Punkte auf den Bildern bewegter Objekte
und Berechnung einer 3D-Beschreibung auf dieser Grundlage
X/81, 203 p
- 84 Olnhoff, T.
Funktionale Semantikbeschreibung von Anfrage-Operationen in einem
drei-schichtigen relationalen Datenbanksystem
II/82, 205 p
- 85 Franke, C.
Analyse der Last in einem Vielbenutzersystem
II/82, 220 p
- 86 Maluszynski, J.
Two-level Grammars - an Equational Approach
III/82, 33 p
- 87 Cram, Mall, M., Schmidt, J.W.
Evaluation of Acoustics Survey Data from the 1 st BIOMASS Experiment :
Report on an Interdisciplinary Data Management Project
/82, p
- 88 Lamersdorf, W., Schmidt, J. W.
Relational Data Model : A Definition and its Formalization
/82, p
- 89 Jantzen, M., Kudlek, M.
Homomorphic Images of Sentential Form Languages
Defined by Semi Thue Systems
/82, p