

Grundlagenveranstaltung „Systemtheorie“ WS 2006/07

(H.S. Stiehl, AB Kognitive Systeme, Department Informatik der Universität Hamburg)

5. Übung für Übungsgruppen

Musterlösung

(U. Köthe, Department Informatik, Universität Hamburg)

- a) Berechnen Sie mithilfe der Faltung die Reaktion eines LTI-Systems, das durch die erste Ableitung einer beliebig parametrisierten aber normalisierten Gaußschen Verteilungsfunktion charakterisiert ist (Stoßantwort des LTI-Systems). Als Eingabe können Sie eine beliebige, z.B. auch durch additives hochfrequentes Rauschen gestörte, 1-D Signalfunktion verwenden.

Stoßantwort des LTI-Systems:
$$h(t) = G'(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Als Eingangssignal dient eine Rechteckfunktion:
$$s(t) = \Pi_{\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Systemantwort $y(t)$ auf dieses Eingangssignal wird mithilfe der Faltung mit der Stoßantwort des LTI-Systems berechnet.

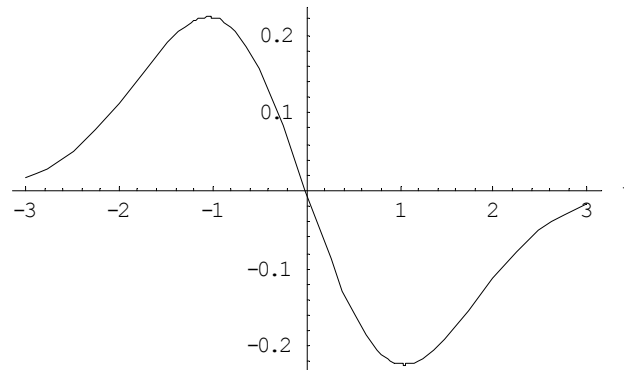
$$y(t) = G'(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot s(t - \tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot 1 d\tau, & \text{für } |t - \tau| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t - \frac{1}{2} \leq \tau \leq t + \frac{1}{2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot 0 d\tau, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} G'(\tau) d\tau = [G(\tau)]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}$$

$$= G(t + \frac{1}{2}) - G(t - \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\exp\left(-\frac{(t+\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}\right) \right)$$

Abbildung 1: Systemantwort des durch die erste Ableitung einer Gaußschen Verteilungsfunktion charakterisierten LTI-Systems bei Eingabe einer Rechteckfunktion ($\sigma = 1$).



Wie aus Abbildung 1 ersichtlich, stellt die Systemantwort eine Tiefpaß-gefilterte erste Ableitung des Eingangssignals dar. Diese Eigenschaft des LTI-Systems als differenzierender Tiefpaß ist nicht von der speziellen Beschaffenheit des Eingangssignals abhängig. In Aufgabe b) wird hierauf näher eingegangen.

Im nächsten Fall wird eine Störung des Signals durch additives hochfrequentes Rauschen berücksichtigt. Das Eingangssignal sei nun

$$\tilde{s}(t) = s(t) + N \cos(\omega t), \quad N: \text{Rauschamplitude.}$$

Als Systemantwort ergibt sich hierfür

$$G'(t) * \tilde{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot \tilde{s}(t - \tau) d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot s(t - \tau) d\tau}_{\text{bekannt}} + \underbrace{N \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot \cos(\omega(t - \tau)) d\tau}_{\text{Lösung mittels Faltungstheorem}}$$

Der erste Summand ist das Ergebnis für das ungestörte Signal, der zweite Summand ist mit dem Faltungstheorem leicht zu errechnen:

$$\begin{aligned} N \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot \cos(\omega_0(t - \tau)) d\tau & \circ - \bullet \quad j\omega \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \cdot N\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \\ & = j\omega_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2\sigma^2} \cdot N\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \\ -N\omega_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2\sigma^2} \cdot \sin(\omega_0 t) & \circ - \bullet \end{aligned}$$

Wenn die Wellenlänge des Rauschens klein gegenüber σ ist (die Frequenz ω_0 ist also groß), gilt $\omega_0 e^{-\omega_0^2 \sigma^2 / 2} \rightarrow 0$, und das Rauschen wird stark gedämpft. Ist hingegen die Wellenlänge größer als σ (also die Frequenz ω_0 klein), gilt $\omega_0 e^{-\omega_0^2 \sigma^2 / 2} \rightarrow \omega_0$, d.h. die Rauschamplitude wird um den Faktor ω_0 verstärkt. Daraus folgt, dass ein Gaußableitungsfilter schlechte Ergebnisse liefert, wenn das Signal einen Rauschanteil mit Frequenzen $\omega_0 \approx 1/\sigma$ und nicht zu vernachlässigender Amplitude N hat. Dies liegt daran, dass die Gaußableitung ein Bandpassfilter mit der Mittenfrequenz $1/\sigma$ ist. Eine analoge Aussage gilt für alle Bandpassfilter, z.B. auch die höheren Ableitungen der Gaußfunktion.

- b) Berechnung der Antwort des Gaußableitungsfilters auf die Rechteckfunktion mittels des Faltungstheorems. Die Fouriertransformierten der Gaußableitung und der Rechteckfunktion lauten:

$$-\frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \circ - \bullet \quad j\omega e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2}$$

$$\Pi_{1/2}(t) \quad \circ - \bullet \quad \text{sinc} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sin \omega/2}{\omega/2}$$

Im Frequenzbereich ist die Gaußableitung ein Bandpass mit Mittenfrequenz (Maximum) bei $\omega_B = 1/\sigma$. Die Faltung im Zeitbereich wird zum Produkt der Fouriertransformierten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) \cdot \Pi_{1/2}(t - \tau) d\tau \quad \circ - \bullet \quad j\omega \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \cdot \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2\sigma^2} \cdot 2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G'(t - \tau) \cdot (\delta(\tau + \frac{1}{2}) - \delta(\tau - \frac{1}{2})) d\tau \quad \circ - \bullet$$

wobei wir uns im letzten Schritt zunutze gemacht haben, dass das Faltungstheorem auch für die inverse Fouriertransformation gilt. Die inverse Fouriertransformation einer imaginären Sinusfunktion ist ein Paar von Deltaimpulsen mit entgegengesetztem Vorzeichen, genau wie die Fouriertransformierte einer reellen Sinusfunktion ein Paar von imaginären Deltaimpulsen ist (Symmetrie der Fouriertransformation). Das Integral ist nun sehr leicht lösbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G'(t - \tau) \cdot (\delta(\tau + \frac{1}{2}) - \delta(\tau - \frac{1}{2})) d\tau = G(t + \frac{1}{2}) - G(t - \frac{1}{2})$$

Dies ist natürlich das gleiche Ergebnis wie unter a)

c) Berechnung der Wirkung eines diskreten 1D-Laplacefilters auf eine diskretisierte Heaviside-

Funktion. Der Laplace-Operator ist definiert als $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

In 1D erstreckt sich die Summe nur über eine Koordinate, d.h. der Laplace-Operator ist identisch mit der 2. Ableitung. Ein diskretes Filter für die 2. Ableitung kann gewonnen werden, indem man ein diskretes Filter für die 1. Ableitung (z.B. die erste Differenz) mit sich selbst faltet:

$$(1, -1) \otimes (1, -1) = (1, -2, 1)$$

Die Diskretisierung der Heaviside-Funktion ist in der zweiten Zeile der folgenden Tabelle angegeben. Zur Berechnung der Faltung wird der Faltungskern unter den jeweils aktuellen Ausschnitt des Signals gelegt und das Skalarprodukt berechnet. Man beachte, dass der Faltungskern vorher am Koordinatenursprung gespiegelt werden muss, was aber bei dem symmetrischen Kern (1,-2,1) keine Änderung bewirkt. In der dritten Zeile ist eine Position des Faltungskerns mit den erforderlichen Multiplikationen und Additionen eingezeichnet:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_D(x)$	0	0	0	0,5	1	1	1
Filter			*	*	*		
			1	-2	1		
				+			
$\Delta f_D(x)$	0	0	0,5	0	-0,5	0	0

Man erkennt, dass die Antwort des Laplace-Filters an der Position des Sprungs der Heaviside-Funktion eine Nullstelle hat. Das Laplace-Filter eignet sich deshalb als Kantendetektor.

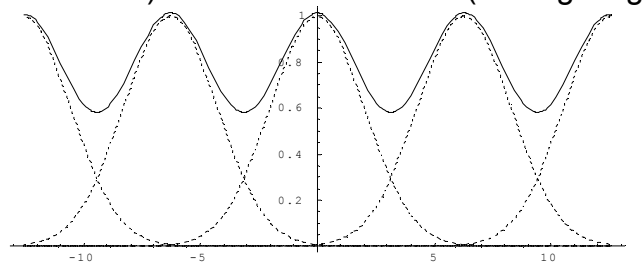
- d) Diskretisierung der Gaußfunktion: Die Diskretisierung einer Funktion wird durch die Multiplikation mit der Kammfunktion dargestellt. Die Fouriertransformierte der Kammfunktion ist ebenfalls eine Kammfunktion, aber mit dem Impulsabstand 2π :

$$\text{III}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) \quad \circ - \bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Die Fouriertransformation der abgetasteten Gaußfunktion berechnet sich aus dem Modulationstheorem:

$$\begin{aligned} G(x) \cdot \text{III}(x) \quad \circ - \bullet \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega-v)^2 \sigma^2 / 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(v - 2\pi k) dv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega-v)^2 \sigma^2 / 2} \delta(v - 2\pi k) dv \\ & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(\omega-2\pi k)^2 \sigma^2 / 2} = \mathbf{G}_D(\omega) \end{aligned}$$

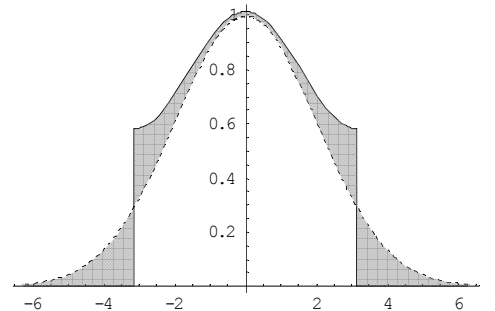
Aufgrund der Replikationseigenschaft des Deltaimpulses ist die Lösung des Integrals eine Summe von verschobenen Gaußfunktionen. Die Abbildung zeigt die einzelnen replizierten Gaußfunktionen (gestrichelte Linien) sowie deren Summe (durchgezogene Linie) für $\sigma = 1/2$:



Um aus der abgetasteten Funktion wieder eine kontinuierliche Funktion zu rekonstruieren, muss man die Fouriertransformierte mit dem idealen Tiefpassfilter multiplizieren, welches durch eine Rechteckfunktion definiert ist, die sich von $-\pi$ bis π erstreckt:

$$\text{idealLowpass}(\omega) = \Pi_{\pi}(\omega)$$

Das Produkt $\mathbf{G}_D(\omega) \cdot \Pi_{\pi}(\omega)$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Man erkennt, dass der Unterschied zur exakten Fouriertransformierten einer Gaußfunktion (gestrichelte Kurve) bei $\sigma = 1/2$ erheblich ist (graue Bereiche).



Man bezeichnet diesen Fehler als Aliasing. Er ist umso höher, je kleiner σ relativ zum Abtastabstand ist. Die Energie des Aliasings ist das Integral über das Differenzquadrat der beiden Funktionen

$$\text{Aliasingenergie} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{G}_D(\omega) \cdot \Pi_{\pi}(\omega) - e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} \right)^2 d\omega$$

Um die Stärke des Aliasings zu beurteilen, wird diese Energie ins Verhältnis gesetzt zur Energie der Gaußfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} \right)^2 d\omega$. Das Aliasingintegral kann nur numerisch gelöst werden. Für $\sigma = 0.5, 0.9, 1$ ergeben sich die Verhältnisse der Energien zu 0.05, 0.00013 bzw. 0.000018. Der zu erwartende relative Diskretisierungsfehler ist die Wurzel daraus, also 23%, 1.1% bzw. 0.42%. Für praktische Anwendungen sollte deshalb $\sigma \geq 0.9$ gewählt werden, $\sigma = 0.7$ (mit 6% Fehler) sollte auf keinen Fall unterschritten werden. Man kann außerdem leicht nachprüfen, dass der Diskretisierungsfehler bei Ableitungen der Gaußfunktion noch höher ist, weshalb hier tendenziell noch größere Filter gewählt werden müssen.

- e) Herleitung der Fouriertransformierten der Sinusfunktion mit dem Verschiebungstheorem: Das Verschiebungstheorem lautet:

$$f(t - t_0) \quad \circ - \bullet \quad F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

wo $F(\omega)$ die Fouriertransformierte der unverschobenen Funktion $f(t)$ ist. Wenn wir die Fouriertransformierte in Real- und Imaginärteil zerlegen, erhalten wir

$$\begin{aligned} F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} &= (F_{\text{Re}}(\omega) + jF_{\text{Im}}(\omega))(\cos(\omega t_0) - j\sin(\omega t_0)) \\ &= F_{\text{Re}}(\omega)\cos(\omega t_0) + F_{\text{Im}}(\omega)\sin(\omega t_0) + j(F_{\text{Im}}(\omega)\cos(\omega t_0) - F_{\text{Re}}(\omega)\sin(\omega t_0)) \end{aligned}$$

Die Sinusfunktion mit der Frequenz ω_0 kann als verschobene Kosinusfunktion dargestellt werden, wobei $t_0 = \pi / 2\omega_0$

$$\sin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right)$$

Die Fouriertransformierte des unverschobenen Kosinus lautet $\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$.

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) & \circ - \bullet \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))e^{-j\omega t_0} \\ & = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))\left(\cos(\omega \frac{\pi}{2\omega_0}) - j \sin(\omega \frac{\pi}{2\omega_0})\right) \\ & = \pi\delta(\omega - \omega_0) \left(\underbrace{\cos(\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0})}_{=0} - \underbrace{j \sin(\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0})}_{=1} \right) + \\ & \quad \pi\delta(\omega + \omega_0) \left(\underbrace{\cos(-\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0})}_{=0} - \underbrace{j \sin(-\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0})}_{=-1} \right) \\ & = -j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

Dies entspricht selbstverständlich dem bekannten Ergebnis, das durch direkte Integration des Fourierintegrals gewonnen werden kann.

- f) Korrelation zweier Kosinusfunktionen (nur unterschiedliche Amplitude, keine Verschiebung):
Die Funktionen seien definiert durch

$$f_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) \quad f_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t)$$

Die Korrelation zweier Funktionen mit der Periode T ist definiert durch

$$C[f_1; f_2] = \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) dt$$

Hier gilt $T = 2\pi/\omega_0$, also

$$\begin{aligned} C[f_1; f_2] &= a_1 a_2 \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} (\cos(\omega_0 t))^2 dt = \frac{a_1 a_2}{2} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} (1 + \cos(2\omega_0 t)) dt \\ &= \frac{a_1 a_2}{2} \left([t]_{t=-\pi/\omega_0}^{t=\pi/\omega_0} + \left[\frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right]_{t=-\pi/\omega_0}^{t=\pi/\omega_0} \right) \\ &= \frac{a_1 a_2}{2} \left(\left[\frac{\pi}{\omega_0} - \frac{-\pi}{\omega_0} \right] + \frac{1}{2\omega_0} \underbrace{[\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)]}_{=0} \right) \\ &= a_1 a_2 \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

Die normierte Korrelation erhält man aus der Korrelation, indem man durch die Norm der Funktionen teilt

$$C_{norm}[f_1; f_2] = \frac{C[f_1; f_2]}{\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} (f_1(t))^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} (f_2(t))^2 dt}}$$

Die Integrale im Nenner haben dieselbe Struktur wie das Integral der Korrelation, und man prüft leicht, dass

$$\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} (f_1(t))^2 dt} = a_1 \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}} \quad \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} (f_2(t))^2 dt} = a_2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}}$$

und daher

$$C_{norm}[f_1; f_2] = 1$$

wie zu erwarten war, wenn die beiden Funktionen sich nur durch die Amplitude unterscheiden. Ist eine der beiden Kosinusfunktionen verschoben, erhält man die Korrelationsfunktion als Funktion der Verschiebung t_0 . Es gilt aber

$$\cos(\omega_0(t - t_0)) = \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t_0) + \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0)$$

und daher

$$C[a_1 \cos(\omega_0 t); a_2 \cos(\omega_0(t - t_0))](t_0) \\ = a_1 a_2 \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \left((\cos(\omega_0 t))^2 \cos(\omega_0 t_0) + \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0) \right) dt$$

Der erste Summand im Integranden ist wieder die Korrelation von Kosinus, gewichtet mit $\cos(\omega_0 t_0)$, während der zweite Summand proportional zur Korrelation von Kosinus mit Sinus ist. Da Kosinus und Sinus orthogonale Funktionen sind, verschwindet das Integral über den zweiten Summanden. Wir erhalten also die Korrelationsfunktion

$$C[a_1 \cos(\omega_0 t); a_2 \cos(\omega_0(t - t_0))](t_0) = a_1 a_2 \cos(\omega_0 t_0) \frac{\pi}{\omega_0}$$

Wenn die zweite Kosinusfunktion um $t_0 = \pm\pi/2\omega_0$, also eine Viertelperiode, verschoben ist, entspricht die verschobene Kosinusfunktion gerade einer Sinusfunktion, und $\cos(\omega_0 t_0) = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, so dass die Korrelationsfunktion verschwindet (orthogonale Funktionen sind unkorreliert, $C[f_1; f_2](\frac{\pm\pi}{2\omega_0}) = 0$). Eine Verschiebung um $t_0 = \pm\pi/\omega_0$, also eine halbe Periode, entspricht einer negierten Kosinusfunktion. Dann gilt $\cos(\omega_0 t_0) = \cos(\pm\pi) = -1$, die Korrelationsfunktion hat den Wert $C[f_1; f_2](\frac{\pm\pi}{\omega_0}) = -a_1 a_2 \frac{\pi}{\omega_0}$ und die normierte Korrelationsfunktion den Wert -1, wie für negativ korrelierte (anti-korrelierte) Signale zu erwarten war.

- g) Fourierreihe eines kausalen Kosinus-Signals mit freier Wahl der zeitlichen Verschiebung der Heaviside-Funktion:

Ein kausales Signal ist ein Modell für einen Einschaltvorgang: zunächst ist das Eingangssignal null, nach dem Einschalten zum Zeitpunkt t_0 hat es eine bestimmte Form. Mathematisch wird dies dargestellt durch Multiplikation eines unendlich langen Signals mit einer Heaviside-Funktion, deren Sprung bei t_0 liegt:

$$\text{causalCosine}_{t_0}(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot H(t - t_0)$$

Die Fouriertransformation der verschobenen Heaviside-Funktion lautet:

$$H(t - t_0) \quad \circ - \bullet \quad \left(\frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) e^{-j\omega t_0}$$

wobei der erste Summand den Mittelwert $\frac{1}{2}$ der Heaviside-Funktion repräsentiert, und der zweite ihre Integrationseigenschaft ($\frac{1}{j\omega}$ ist das Inverse des Differenziationsoperators $j\omega$ im

Frequenzbereich). Die Fouriertransformierte des Kosinus lautet $\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$. Dem Produkt zweier Funktionen im Zeitbereich entspricht die Faltung der Fouriertransformierten:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) \cdot H(t - t_0) \quad \circ - \bullet \quad & \pi e^{-j\omega t_0} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \left(\frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \\ & = \pi e^{-j\omega t_0} \left[\underbrace{(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \frac{1}{2} \delta(\omega)}_{=\frac{1}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))} + \underbrace{(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \frac{1}{j\omega}}_{=\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)}} \right] \end{aligned}$$

Die Faltungen sind, wie angegeben, sehr einfach auszurechnen, da die Deltadistribution das Einselement der Faltungsalgebra ist. Der zweite Teil kann noch auf den Hauptnenner gebracht werden, und wir erhalten:

$$\cos(\omega_0 t) \cdot H(t - t_0) \quad \circ - \bullet \quad \pi e^{-j\omega t_0} \left(\frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) - \frac{j2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$$

- h) Diskutieren Sie das Modell der Diskretisierung im Skript auf den Seiten V-34 und V-35 (sehr beliebte Prüfungsfrage!):
 Zeile (a) zeigt ein Modell der Bilddigitalisierung: Links ist die ideale Bildfunktion $f(x, y)$ einer Lochkamera gezeigt. Die Optik einer realen Kamera kann durch eine Aperturfunktion $a(x, y)$ modelliert werden, die auf das ideal Bild $f(x, y)$ als Tiefpassfilter wirkt. Es entsteht das immer noch kontinuierliche Bild $f'(x, y)$. Die Digitalisierung wird danach durch Multiplikation von $f'(x, y)$ mit der Kammfunktion $s(x, y)$ modelliert, und es entsteht das diskrete Bild $f''(x, y)$. Da das Bild außerdem nur endliche Größe hat, muss es danach noch mit einer zweidimensionalen Rechteckfunktion $\text{rect}(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ multipliziert werden, die die Pixel außerhalb des Bildes auf Null setzt. Damit erhalten wir das reale digitale Bild $f_d(x, y)$.

Zeile (b) zeigt die ideale Bildfunktion und ihr Betragsspektrum. Es handelt sich offenbar um eine bandbegrenzte Bildfunktion, denn das Spektrum $|F(u, v)|$ wird oberhalb einer gewissen Frequenz null.

Zeile (c) zeigt die Bildfunktion nach der Faltung mit der Aperturfunktion und das dadurch entstehende Betragsspektrum. Man erkennt, dass die Aperturfunktion in der Tat ein Tiefpassfilter ist, denn die Funktion $f'(x, y)$ ist glatter als $f(x, y)$, und das Spektrum $|F'(u, v)|$ ist noch schmaler geworden (die Bandgrenze wurde weiter herabgesetzt).

Zeile (d) zeigt die Kammfunktion und ihre Fouriertransformierte, ebenfalls eine Kammfunktion.

Zeile (e) zeigt die Multiplikation von $f'(x, y)$ mit der Kammfunktion und das dazugehörige Betragsspektrum. Der Multiplikation im Ortsbereich entspricht eine Faltung im Zeitbereich, das Spektrum $F'(u, v)$ wird also mit der Kammfunktion gefaltet. Aufgrund der Replikationseigenschaft der Deltadistribution wird jede „Zinke“ des Kamms durch eine Kopie des Spektrums $F'(u, v)$ ersetzt. Da die Abtastung offenbar dicht genug war, überlappen sich diese Kopien im entstehenden Spektrum $F''(u, v)$ nicht. (Es wurde sogar mit einer höheren Abtastfrequenz als der erforderlichen Nyquistfrequenz gearbeitet, denn zwischen den Spektrumskopien bleiben deutliche Lücken). Das geglättete Bild $f'(u, v)$ könnte also aus dem abgetasteten Bild $f''(u, v)$ exakt rekonstruiert werden.

Zeile (f) zeigt die Rechteckfunktion und ihre Fouriertransformierte, eine sinc -Funktion. Die sinc -Funktion ist nicht bandbegrenzt.

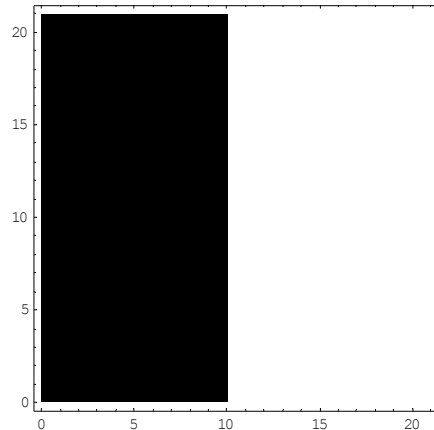
Zeile (g) zeigt das Ergebnis der Multiplikation der abgetasteten Funktion mit der Rechteckfunktion und das dazu gehörende Spektrum $F_d(u, v)$, welches durch Faltung von $F''(u, v)$ mit der si -Funktion entsteht. Aus diesem Spektrum kann die Funktion $f'(u, v)$ nicht mehr exakt rekonstruiert werden, da sich die Spektrumreplikationen jetzt überlappen. Ist allerdings die Rechteckfunktion sehr breit (großes Bild), ist die korrespondierende si -Funktion sehr schmal (hat also für hohe Frequenzen sehr kleine Werte), und der Unterschied zwischen den Spektren $F''(u, v)$ und $F_d(u, v)$ ist sehr klein. Dann kann die Funktion $f'(u, v)$ immer noch in guter Näherung rekonstruiert werden. Insbesondere wenn das Bild zusätzlich durch Rauschen verfälscht wird (was in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt wurde), ist der Rekonstruktionsfehler aufgrund endlicher Bildergröße klein gegenüber dem durch Rauschen verursachten Fehler.

- i) Überprüfung der Korrektheit der angehefteten diskreten Fouriertransformation.
 Die Rechnungen sind korrekt. Man muss dabei beachten, dass der Koordinatenursprung, wie in der Bildverarbeitung üblich, in der linken oberen Ecke des Bildes liegt, und die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach unten wachsen. Dies gilt analog für die Fouriertransformierte, deren Koordinatenursprung ebenfalls links oben ist. Dieses Feld enthält den Gleichanteil des Bildes, also die Summe aller Grauwerte. Man überlegt sich auch leicht, dass die Fouriertransformierte des gezeigten Bildes rein reell sein muss. Dazu erinnere man sich daran, dass das Bild im Ortsbereich periodisch fortgesetzt wird (immer wiederholtes Anlegen des Originalbildes). Wird ein Bild der Größe 2×2 auf diese Weise periodisch fortgesetzt, entsteht stets eine gerade Funktion, die bekanntlich eine reellwertige Fouriertransformierte hat.

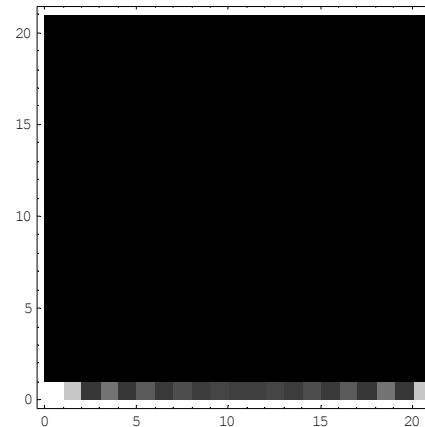
- j) Berechnung der Fouriertransformierten von zwei Binärbildern mit einer vertikalen bzw. diagonalen Sprungkante:

Diese Teilaufgabe löst man am besten mit einem Computerprogramm, das die diskrete Fouriertransformation unterstützt, z.B. Mathematica.

```
vertikal = Table[If[x<10, 0, 1],{y,0,20},{x,0,20}];
ListDensityPlot[vertikal, Mesh -> False];
spektrumVertikal = Fourier[vertikal];
ListDensityPlot[Abs[spektrumVertikal], Mesh -> False];
```



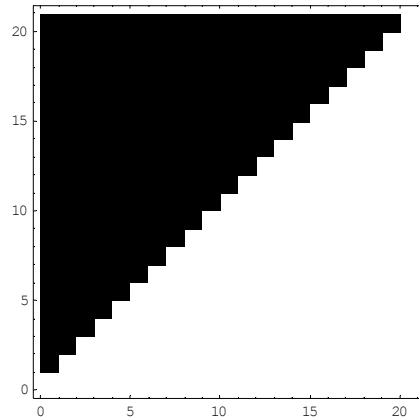
Originalbild



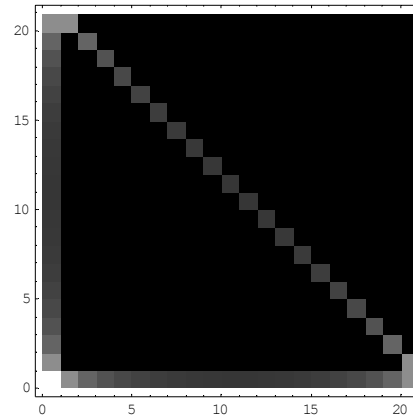
Betragsspektrum

Man erkennt, dass das Spektrum nur eine Zeile ungleich null hat. Dies gilt immer, wenn das Bild nur eine eindimensionale Struktur wie z.B. eine einzelne Kante enthält. Man beachte, dass sich der Koordinatenursprung unten links befindet, und die y-Achse wächst nach oben. Bei einer diagonalen Kante erhalten wir folgendes:

```
diagonal = Table[If[x<y, 0, 1],{y,0,20},{x,0,20}];
ListDensityPlot[diagonal, Mesh -> False];
spektrumDiagonal = Fourier[diagonal];
ListDensityPlot[Abs[spektrumDiagonal], Mesh -> False];
```



Originalbild



Betragsspektrum

Jetzt hat das Spektrum drei Linien ungleich null, obwohl das Originalbild auch nur eine einzelne Kante enthält. Wieso erhalten wir nicht, wie oben, eine einzelne Kante enthält. Man erkennt aber, dass die Kante in Wirklichkeit gar nicht gerade ist, sondern Treppenartefakte aufweist. Diese bewirken, dass das Bild nicht nur eine, sondern drei unterschiedliche Richtungen aufweist (horizontal, vertikal und diagonal). Folglich zeigt das Spektrum auch drei Linien.

Man kann das Problem durch Anti-Aliasing vermeiden, d.h. indem man die Kante glättet. Dann hat man kein Binärbild mehr, aber dafür ein bandbegrenztes Spektrum. Dies wird z.B. beim Rendering von Schrift routinemäßig gemacht.