Ähnlichkeit im Kontext der Bildsuche

Vorlesung Bildverarbeitung 2, Teil 3
Wintersemester 2001/2002
Ullrich Köthe, FB Informatik, Uni Hamburg

Ähnlichkeit

- **Motivation:**
  - keine klar definierte Semantik ⇨ Approximation des „korrekten“ Ergebnisses ⇨ Präsentation mehrerer Möglichkeiten
- **was ist Ähnlichkeit?**
  - monoton nicht-wachsende Funktionen $S \in [0, 1]$
  - Umrechnung in Distanzen: monoton nicht-fallende Funktionen
  - mathematische Axiome (Ähnlichkeitsstrukturen bzw. Metriken):
    - nützliche Eigenschaften für Berechnungen
    - Zoo der Distanzen
  - psychologische Experimente:
    - Ermittlung des menschlichen Ähnlichkeitsempfindens
    - nicht immer metrisch
    - Ziel: Modellierung der Nutzererwartungen an Ähnlichkeitssuche

Axiome der Metrik bzw. Ähnlichkeit

- **Metrik: Distanzfunktion $d(x, y) \geq 0$**

$d(x,x) = d(y,y) \equiv 0$ konstante Selbstähnlichkeit

$d(x,y) \geq d(x,x)$ Minimalität

$d(x,y) = d(y,x)$ Symmetrie

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ Dreiecksungleichung

- **Ähnlichkeitsfunktion $s(x,y) \in [0,1]$**

$s(x,x) = s(y,y) \equiv 1$ konstante Selbstähnlichkeit

$s(x,x) \geq s(x,y)$

$s(x,y) = s(y,x)$ Symmetrie

$s(x,z) \geq s(x,y) + s(y,z) - 1$

Eigenschaften

- **Metrische Axiome erlauben:**
  - Definition der Grenzwertbildung

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} d(x_i, x) = 0$$

  - Umrechnung zwischen Ähnlichkeit und Distanz:

$s(x,y) = g(d(x,y))$ ist Ähnlichkeitsfunktion $\Leftrightarrow$

$d(x,y)$ ist Metrik und

$\forall p \geq 0: \quad g(p) \geq 0, \quad g(0) = 1, \quad g'(p) \leq 0, \quad g''(p) \geq 0$

z.B.: $d = 1 - s, \quad d = -\log s$

  - Schranke für die Distanzen: $|d(x,x_1) - d(x,x_2)| \leq d(x_1,x_2)$
  - Definition effizienter Indexstrukturen und Suchverfahren
- **ist nicht zwingend für die Bildsuche**

Minkowski-Distanzen

- **Spezialfall:**
  - *x,y,z* n-dimensionale Vektoren
  - Additivität der Distanz entlang von Geraden
  - d.h.: Gleichheit bei der Dreiecksungleichung, wenn Punkte auf einer Geraden liegen

$$d(x,y)+d(y,z)=d(x,z), \text{ falls } y \text{ zwischen } x,z \text{ auf einer Geraden}$$

$$\Rightarrow d_p(x,y)=\left[\sum_i |x_i-y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{Minkowski - Distanzen } (p\geq 1)$$

$$d_{Manhattan}(x,y)=\sum_i |x_i-y_i|, \quad d_{Chessboard}(x,y)=\max_i |x_i-y_i|$$

$$d_{Euklid}(x,y)=\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2}$$

Abgeleitete Metriken (1)

- ***Apply function* Operator:**
  geg. Metrik $d(x,y)$**:** $h(d(x,y))$ ist Metrik, wenn

$$h(0)=0, \quad h(x)>0 \quad (x>0)$$

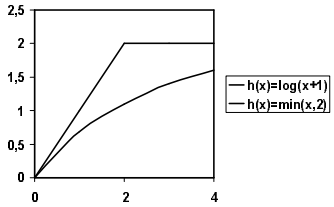
$$h'(x)\geq 0, \quad h''(c)\leq 0$$

  oder wenn $h(x)=\lim_{n\to\infty} h_n(x)$ **wobei alle** $h_n(x)$ **obige Bedingungen erfüllen**

- **z.B.:**

$$h(x)=\log(x+1)$$

$$h(x)=\begin{cases} x, & \text{wenn } x<\alpha \\ \alpha, & \text{sonst} \end{cases}$$



Abgeleitete Metriken (2)

- ***Composition* Operator**
  geg. Metriken $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$:

$$H(d_1(x,y), d_2(x,y)) \qquad \text{ist Metrik, wenn}$$

$$H(0,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial H(a,b)}{\partial a}\right|_{b=const} \geq 0, \quad \left.\frac{\partial H(a,b)}{\partial b}\right|_{a=const} \geq 0 \quad (\forall a,b)$$

$$\text{Hessesche Matrix} \begin{pmatrix} H_{aa} & H_{ab} \\ H_{ab} & H_{bb} \end{pmatrix} \text{ist negativ semidefinit}$$

oder $H(a,b) = \lim_{n\to\infty} H_n(a,b)$ **wobei alle H_n die obigen Bedingungen erfüllen**

Abgeleitete Metriken (3)

- **Beispiele für Kombinationsoperatoren:**

  harmonisches, geometrisches, arithmetisches Mittel:

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}, \quad H(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

  Minimum, Maximum

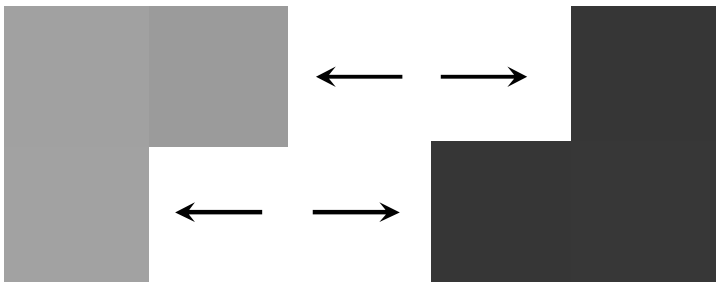
$$H(a,b) = \min(a,b), \quad H(a,b) = \max(a,b)$$

  gewichtetes Mittel, quasi-lineares Mittel

$$H(a,b) = wa + (1-w)b, \quad H(a,b) = \left(wa^{\alpha} + (1-w)b^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

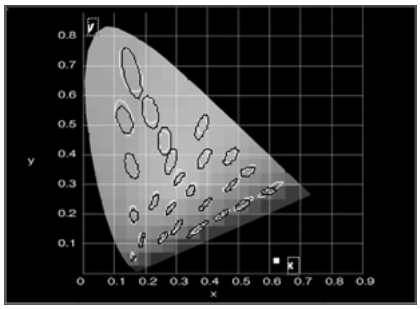
Farbähnlichkeit (1)

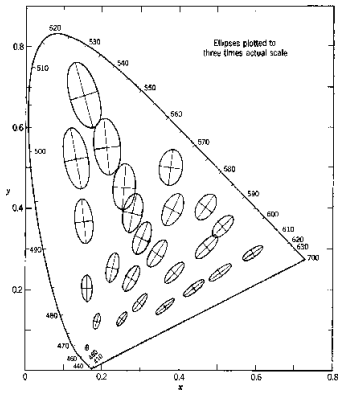
- **Messung der minimal wahrnehmbaren Farbänderung**



Farbähnlichkeit (2)

- **Messung für viele Farben und viele Richtungen**
- **Approximation durch Ellipsoide (McAdams)**



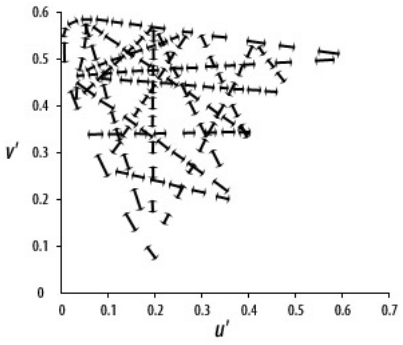


Farbähnlichkeit (3)

- **Transformation des Farbraumes so, daß Ellipsoide zu Kugeln werden**

⇨ **Euklidische Distanz approximiert menschliche Wahrnehmung**

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$



Farbähnlichkeit (4)

- **z.B. Verwendung des L*u*v*- oder L*a*b*-Farbraums**
  1. Normierung für unterschiedliche Lichtquellen
  2. Berücksichtigung der logarithmischen Rezeptor-Empfindlichkeit (Weber-Fechnersches Gesetz)
  3. affine bzw. nichtlineare Entzerrung des Farbraumes

⇨ **Verringerung der Verzerrung von 200:1 auf 6:1**

- **Verwendung des Y´PbPr-Farbraums**
  - keine Normierung für unterschiedliche Lichtquellen
  - einfacher zu berechnen
  - fast so gute Ergebnisse wie mit L*u*v* oder L*a*b*

L*u*v*- und L*a*b*-Farbraum (1)

- **Normierung für unterschiedliche Lichtquellen**
  - Transformation auf Wertebereich [0, 1]:

$$r = \frac{R}{R_{\max}}, \quad g = \frac{G}{G_{\max}}, \quad b = \frac{B}{B_{\max}}$$

  - Lichtquellenabhängige Transformation in den XYZ-Farbraum, z.B. Lichtequelle D65 (moderne Farbbildröhre):

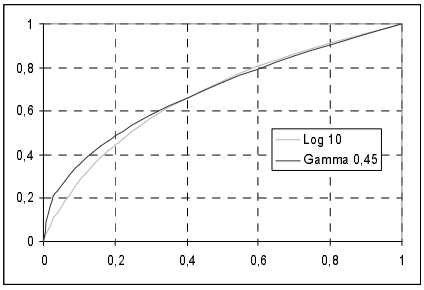
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.412453 & 0.357580 & 0.180423 \\ 0.21267 & 0.715160 & 0.072169 \\ 0.019334 & 0.119193 & 0.950227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

  - Transformation des Weißpunktes (r,g,b) = (1,1,1):
    (X_n, Y_n, Z_n) = (0.950456, 1.00000, 1.088754)

L*u*v*- und L*a*b*-Farbraum (2)

- **logarithmische Rezeptorempfindlichkeit: wahrgenommene Helligkeit entspricht Logarithmus der Intensität**
- **Approximation des Logarithmus durch Potenz („Gamma-Korrektur“):**

$$\text{gamma}(x) = x^{\gamma}, \quad x \in [0,1]$$
$$\approx \log_b((b-1)x+1)$$



- **L*u*v* und L*a*b*: γ = 1/3**

L*u*v*- und L*a*b*-Farbraum (3)

- **Gamma-Korrektur der Luminanz (mit γ = 1/3)**

$$L^* = \begin{cases} 116\left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{1/3} - 16, & \text{if } 0.008856 < \frac{Y}{Y_n} \quad (L^* \geq 8) \\ 903.3\frac{Y}{Y_n}, & \text{otherwise} \quad (L^* \leq 8) \end{cases}$$

L*u*v*- und L*a*b*-Farbraum (4)

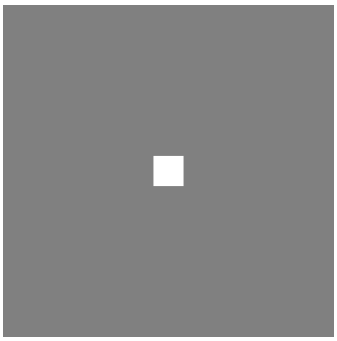
- **XYZ ⇨ L*u*v* und L*a*b* mit Referenzweißpunkt (X_n, Y_n, Z_n)**

$$u' = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z}, \quad v' = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z}$$
$$u^* = 13L^*(u' - u'_n), \quad v^* = 13L^*(v' - v'_n)$$

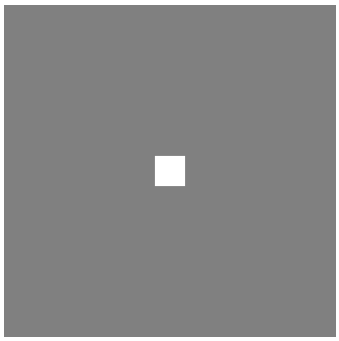
$$a^* = 500\left[\left(\frac{X}{X_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right], \quad b^* = 200\left[\left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Z}{Z_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

L*u*v*- und L*a*b*-Farbraum (5)

L*a*b* ⇨RGB



L*a*b* ⇨R´G´B´



RGB, R´G´B´ und Y´PbPr (1)

- **RGB kodiert reine Intensität ⇨ keine Berücksichtigung der logarithmischen Empfindlichkeit**

⇨ R´G´B´ als gamma-korrigiertes RGB (γ = 0.45)

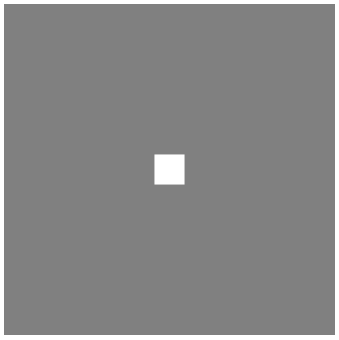
$$R' = R_{\max} r^{0.45}, \quad G' = G_{\max} g^{0.45}, \quad B' = B_{\max} b^{0.45}$$

- **Y´PbPr als affine Entzerrung von R´G´B´:**

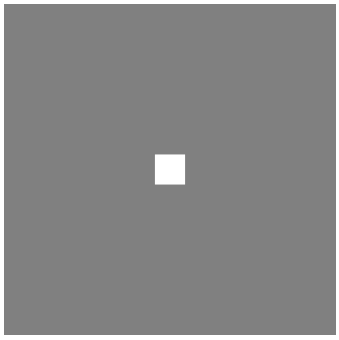
$$\begin{pmatrix} Y' \\ Pb \\ Pr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.1687358916 & 0.3312641084 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4186875892 & 0.0813124108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ g' \\ b' \end{pmatrix}$$

RGB, R´G´B´ und Y´PbPr (2)

Y´PbPr ⇨RGB



Y´PbPr ⇨R´G´B´



Probleme mit uniformen Farbräumen

- **Daten nicht gekennzeichnet: RGB oder R´G´B´ ?**
- **Entzerrung auf der Basis kleiner Differenzen: gilt Transformation auch für große Differenzen ?**
- **Entzerrung erzeugt nur näherungsweise uniformen Farbraum**
- **Abhängigkeit der Farbwahrnehmung von Lichtquelle unberücksichtigt**
- **nur Paare von Farben berücksichtigt: Kontexteffekte (z.B. Farbkonstanz) vernachlässigt**

- **trotzdem: zur Zeit nichts besseres**

Histogramme und Signaturen

- **Ähnlichkeitsfunktion bisher vergleicht einzelne Farben, aber wir wollen ganze Bilder (Mengen von Farben) vergleichen**
- **Beschreibung von Mengen durch**
  - Histogramme:
    - feste Quantisierung des Merkmalsraums („Bins“)
    - Anzahl der Werte pro Bin
  - Signaturen:
    - adaptive Quantisierung des Merkmalsraums („Cluster“)
    - Clusterzentrum und Anzahl der Werte pro Cluster
  - manchmal „Pseudo-Signaturen“ (z.B. Haar-Methode):
    - berücksichtige nur signifikant gefüllte Bins

Vergleich von Histogrammen: Bin-weiser Vergleich (1)

- **Bin-weiser Vergleich: einfach und schnell**
- **z.B. Minkowski-Distanzen (Metriken):**

$$D(k,l)=\sum_i |k_i-l_i|, \quad D(k,l)=\sqrt{\sum_i (k_i-l_i)^2}, \quad D(k,l)=\max_i |k_i-l_i|$$

- **Histogramm-Schnitt (keine Metrik, erlaubt partielles Matching):**

$$D(k,l)=1-\frac{\sum_i \min(k_i,l_i)}{\sum_i k_i}$$

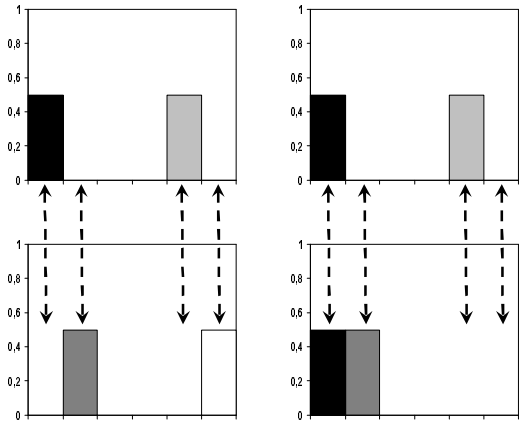
- **Jeffrey-Divergenz (keine Metrik, symmetrisch, robust gegen Rauschen und Quantisierung)**

$$D(k,l)=\sum_i \left(k_i \log\frac{k_i}{m_i} + l_i \log\frac{l_i}{m_i} \right)$$

$$m_i=\frac{k_i+l_i}{2}$$

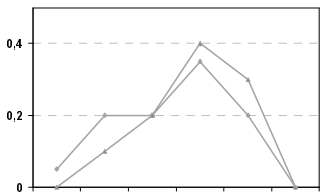
Vergleich von Histogrammen: Bin-weiser Vergleich (2)

- **Bin-weise Vergleiche entsprechen oft nicht der Wahrnehmung**
- **Bsp.: die linken Histogramme werden als ähnlich wahrgenommen, aber ihre Distanz ist größer als die der rechten**



Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (1)

- **Vergleich auf Basis der Summen-Histogramme** $\hat{k}_i = \sum_{j=0}^{i} k_j$
  - Metriken
  - nur für geordnete Daten (1D)
  - Ordnung impliziert Ähnlichkeit
  - funktioniert für adaptiv quantisierte und kontinuierliche Daten

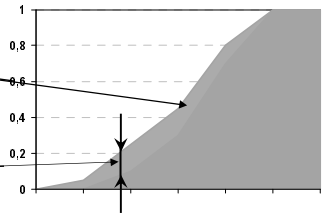


Match-Distanz:

$$D(k,l) = \sum_i \left| \hat{k}_i - \hat{l}_i \right|$$

Kolmogorov-Smirnov-Statistik:

$$D(k,l) = \max_i \left| \hat{k}_i - \hat{l}_i \right|$$



Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (2)

- **Mahalanobis-Distanz (*quadratic form distance*):**
  - Ähnlichkeitsmatrix auf Grund einer Basisdistanz für die Bins
  - ⇨ „Glättung des Histogramms“
  - Ähnlichkeitsmatrix ist symmetrisch (anti-symmetrische Anteile heben sich heraus)
  - Ähnlichkeitsmatrix positiv definit (alle Eigenwerte positiv)
  - ⇨ *quadratic form distance* ist Metrik

$$D(k,l) = \sqrt{(\vec{k} - \vec{l})^T \mathbf{A} (\vec{k} - \vec{l})}$$

Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (2)

- **Metrische Eigenschaften der Mahalanobisdistanz**
  - Eigenwertzerlegung einer positiv definiten symmetrischen Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}\, \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} \ldots \text{positive Diagonalmatrix}$$

  - Diagonalisierung der Distanz ⇨ Euklidische Distanz in linear transformiertem Raum

$$\tilde{k} = \sqrt{\mathbf{B}}\, \mathbf{D} \vec{k}, \quad \left(\vec{k} - \vec{l}\right)^T \mathbf{A} \left(\vec{k} - \vec{l}\right) = \left(\tilde{k} - \tilde{l}\right)^T \left(\tilde{k} - \tilde{l}\right)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{B}}$$

  - diagonal dominante Matrix mit positiven Einträgen ist stets positiv definit, z.B. für kleines σ:

$$\mathbf{A}_{ij} = e^{-\frac{d(k_i, l_j)}{\sigma}}$$

Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (3)

- **Falls A nicht positiv definit: sei $d(P_i,P_j)$ eine L_1- oder L_2-Norm, dann**

$$(\vec{k}-\vec{l})^T \mathbf{H}(\vec{k}-\vec{l}) \le 0, \quad \text{wenn} \quad h_{ij} = d(P_i,P_j)$$

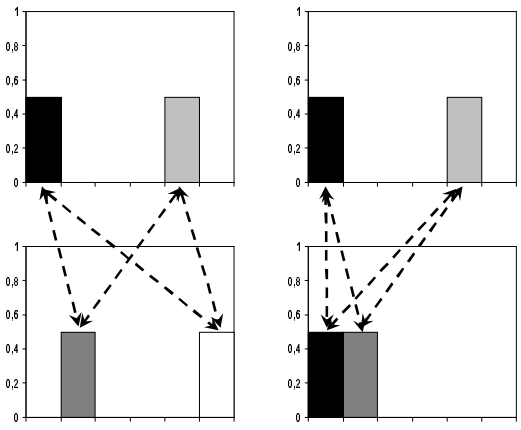
$$\text{und} \quad \sum_i (k_i - l_i) = 0 \qquad (\text{Histogramme gleicher Masse})$$

- **wenn A geeignet aus H abgeleitet wird, ist *quadratic form distance* zumindest nicht-negativ (Hafner et al. 95 - keine Aussage zur Dreiecksungleichung), z.B.:**

$$\mathbf{A}_{ij} = 1 - \frac{d(k_i,l_j)}{\max\limits_{i,j} d(k_i,l_j)}, \quad \text{vermutlich auch} \quad \mathbf{A}_{ij} = e^{-\frac{d(k_i,l_j)}{\sigma}}$$

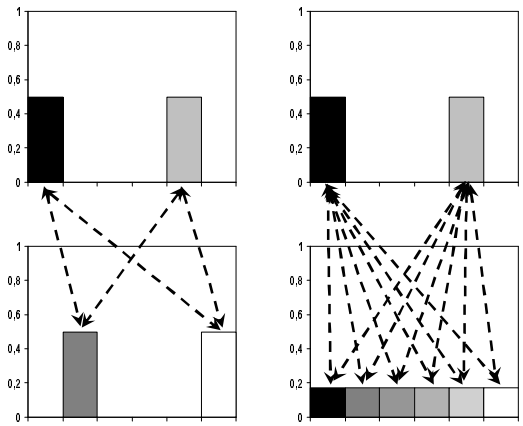
Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (3)

- **Mahalanobis-Distanz entspricht der Wahrnehmung besser: linke Histogramme haben geringere Distanz, wie gewünscht**



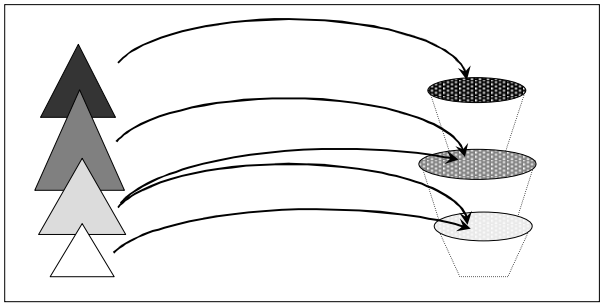
Vergleich von Histogrammen: Berücksichtigung der Bin-Ähnlichkeit (4)

- gibt auch Fälle, wo Mahalanobis-Distanz nicht der Wahrnehmung entspricht: die linken Histogramme sind ähnlicher, aber ihre Distanz ist größer als rechts



Vergleich von Histogrammen: *Earth Mover Distance* (1)

- Rubner 99
- Interpretiere Distanz-Berechnung als Transport-problem: Bestimme minimale Kosten, um das eine Histogramm in das andere zu transformieren



Earth Mover Distance (2)

- **formale Definition auf Basis der Grunddistanz** $d(k,l)$:

Voraussetzung: $\sum_i k_i = \sum_j l_j = 1$

$$Work(k,l,\mathbf{F}) = \sum_i \sum_j d(k_i, l_j) f_{ij}, \quad \text{wobei}$$

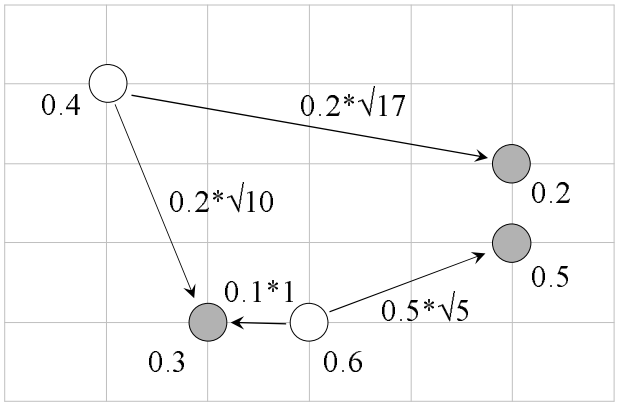
$$\mathbf{F} = [f_{ij}], \quad f_{ij} \geq 0 \quad (\text{von } k_i \text{ nach } l_j \text{ transportierte Masse}),$$

$$\sum_j f_{ij} = k_i, \quad \sum_i f_{ij} = l_j, \quad \sum_i \sum_j f_{ij} = 1$$

$$EMD(k,l) = \min_{\mathbf{F}} \quad Work(k,l,\mathbf{F})$$

Earth Mover Distance (3)

- **Beispiel: EMD = 2.675**



Earth Mover Distance (4)

Falls Signaturen *k* und *l* unterschiedliche Masse haben

- füge bei der kleineren (o.B.d.A. *k*) ein Hilfs-Bin hinzu

$$\hat{k} = \{k, k_{slack}\}, \quad \sum_i \hat{k}_i = 1$$

- normiere EMD (andernfalls werden kleine Signaturen bevorzugt):

$$EMD(k,l) = \frac{\min_{\mathbf{F}} \; Work(k,l,\mathbf{F})}{\sum_i k_i}$$

Earth Mover Distance (5)

- **Metrische Eigenschaften: EMD ist Metrik, wenn die Basisdistanz eine Metrik ist**
  - Symmetrie, Nicht-Negativität trivial
  - Dreiecksungleichung: betrachte 3 Histogramme *k, l, m* mit optimalen Verschiebungen $\underline{kl}$, $\underline{lm}$, $\underline{km}$ sowie $\underline{klm} = \underline{kl} \circ \underline{lm}$

$$\begin{aligned} EMD(k,m) &= \sum_{i,j} \underline{km}_{ij}\, d(k_i, m_j) \\ &\le \sum_{i,r,j} \underline{klm}_{irj}\, d(k_i, m_j) \\ &\le \sum_{i,r,j} \underline{klm}_{irj}\, (d(k_i, l_r) + d(k_i, m_j)) \\ &= \sum_{i,r} \underline{kl}_{ir}\, d(k_i, l_r) + \sum_{r,j} \underline{lm}_{rj}\, d(l_r, m_j) \\ &= EMD(k,l) + EMD(l,m) \end{aligned}$$

Earth Mover Distance (6)

- **Berechnung:**
  1. Bestimmung einer erlaubten Lösung des Transportproblems (Nord-West Algorithmus, Russel´s Methode)
  2. Optimierung der Rohlösung mit spezialisiertem Simplexverfahren

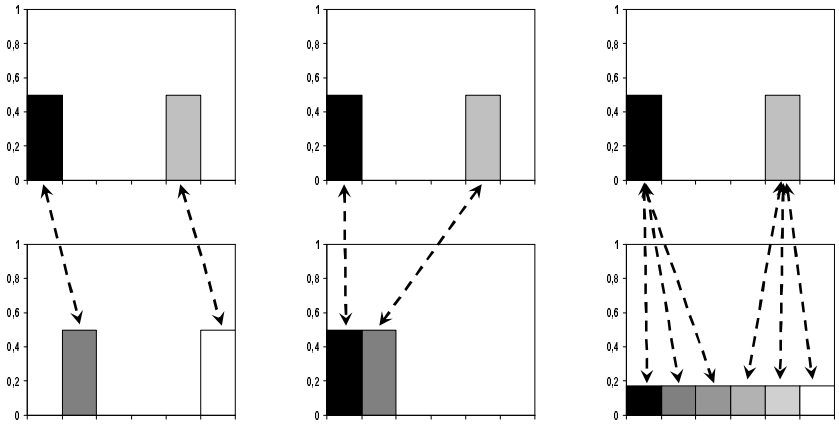
  ⇨Komplexität (mit optimalen Algorithmen): $O(n^3 \log(n))$

	l_1	l_2	l_3	l_4	
k_1	5	10			0
k_2		5	15	5	0
k_3				5	0
	0	0	0	5	

Earth Mover Distance (7)

- **Eigenschaften:**
  - Anwendbar auf Signaturen und Histogramme
  - Matching/Transport gute Approximation für Ähnlichkeitswahrnehmung, löst die Probleme, die bei anderen Distanzen aufgetretenen waren
  - Unterstützung partieller Matches (Signaturen ungleicher Masse, z.B. bei Verdeckung)
  - relativ effiziente Berechnung (da *n* relativ klein)
  - Metrik

Earth Mover Distance (8)



Earth Mover Distance (9)

- **Optimierungen – Spezialfälle**
  - für 1D Histogramme entspricht die EMD der Matching-Distanz
  - untere Schranke:

    $EMD(k,l) \geq d(\bar{k},\bar{l}), \quad \bar{k},\bar{l}$ ...Schwerpunkte der Signaturen
  - robuste EMD, falls (1- γ) Ausreißer:

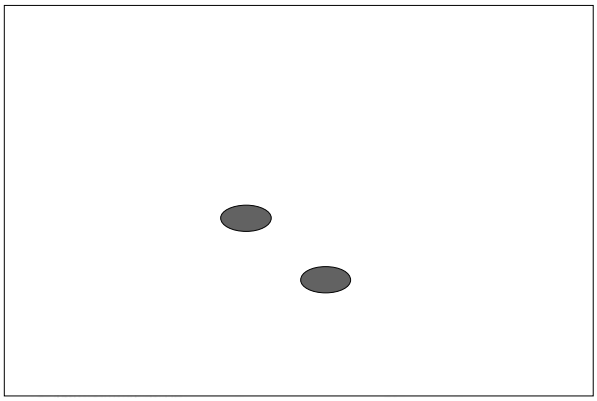
    $$\sum_{i,j} f_{ij} = \gamma < 1$$
  - robuste EMD, falls Transport um maximal τ Einheiten möglich:

    $$\tau - EMD(k,l) = \max_{\mathbf{F}} \quad \sum_{i,j} f_{ij} \left[d(k_i,l_j) \leq \tau \right]$$

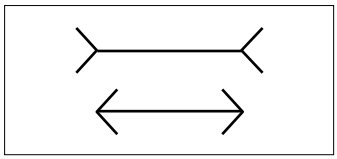
    $$\text{mit} \quad \left[d(k_i,l_j) \leq \tau \right] = \begin{cases} 1, & \text{falls } d(k_i,l_j) \leq \tau \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Psychologische Erforschung der Ähnlichkeitswahrnehmung (1)

- **Ähnlichkeitswahrnehmung ist abhängig vom Kontext**



Psychologische Erforschung der Ähnlichkeitswahrnehmung (2)



Psychologische Erforschung der Ähnlichkeitswahrnehmung (3)

- **Ähnlichkeitswahrnehmung ist abhängig vom Blickwinkel**

Ähnlichkeitsmodell von Thurstone-Shepard

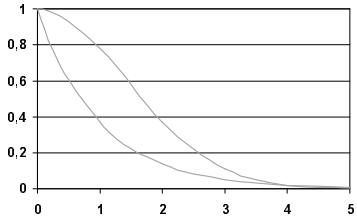
- **VP lernen Antwort R_i für Stimulus S_i**
  - Messung der Verwechslungswahrscheinlichkeit und Berechnung der „Generalisierungsmatrix“

$$p_{ij} = P\left[R_j \middle| S_i\right], \quad g_{ij} = \sqrt{\frac{p_{ij}p_{ji}}{p_{ii}p_{jj}}}$$

  - Anpassung des „Generalisierungsmodells“ an die Daten

$$g_{ij} = g(d(S_i, S_j))$$

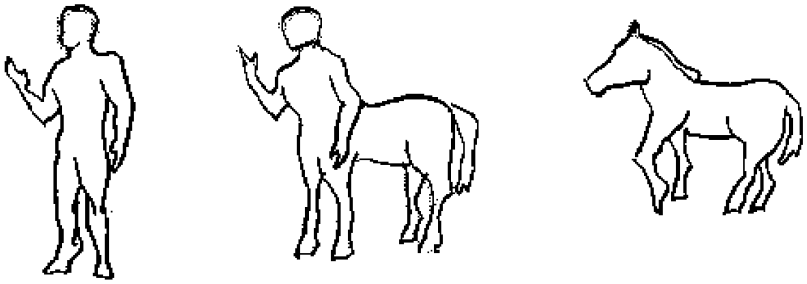
  - Distanz als Minkowski-Metrik
  - Sättigung des Abstandes
  - exponentielle Generalisierungs-funktion (vgl. Weber-Fechner!)



Tversky´s Experimente (1)

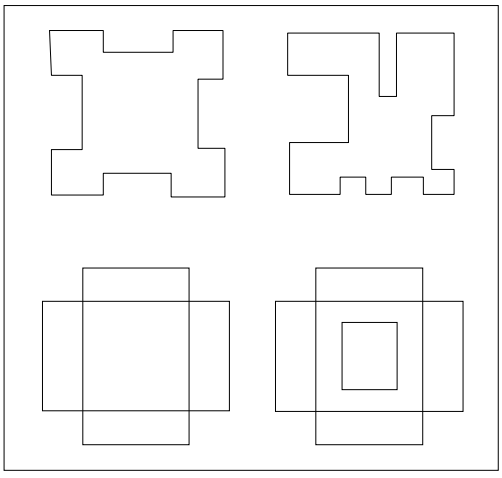
- **Ähnlichkeitswahrnehmung ist nicht metrisch**

  Verletzung der Dreiecksungleichung: Kuba ähnelt der Sowjetunion, Jamaica ähnelt Kuba, aber Jamaica ähnelt der Sowjetunion nicht



Tversky´s Experimente (2)

- **Ähnlichkeitswahrnehmung ist nicht metrisch**
  - Verletzung der Symmetrie: VP bevorzugen „rechtes Muster ähnelt linkem“ gegenüber „linkes Muster ähnelt rechtem“



Ähnlichkeitsmodell von Krumhansl

- **Ähnlichkeit hängt nicht nur von Distanz der Stimuli ab, sondern auch von der Dichte der Stimuli in deren Nähe:**

$$\theta(x,y) = d(x,y) + \alpha\, h(x) + \beta\, h(y), \quad h(x) - \text{Dichte}$$

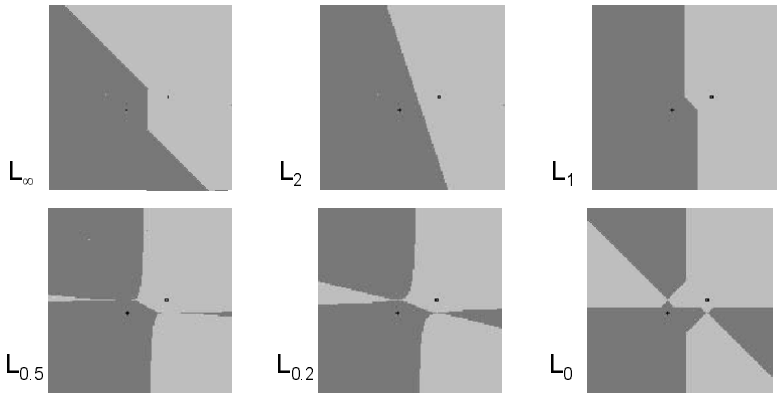
  - höhere Dichte = typischere Stimuli
  - keine konstante Selbstähnlichkeit: typische Stimuli (hohe Dichte) haben geringe Selbstähnlichkeit (werden leicht verwechselt)

$$\theta(x,x) = (\alpha + \beta)\, h(x)$$

  - wenn $\alpha < \beta$: untypisches ist typischem ähnlicher als umgekehrt (Verletzung der Symmetrie - vgl. Tversky)
  - Dreiecksungleichung gilt

Nicht-Metrische Distanzen nach Jacobs et al. (1)

Voronoi-Diagramme für metrische und nicht-metrische Distanzen (Minkowski-Distanzen mit p = ∞,2,1,0.5,0.2,0)



Nicht-Metrische Distanzen nach Jacobs et al. (2)

- **Robuste Vergleiche führen oft auf nicht-metrische Distanzen (robust geg. Ausreißer, Verdeckung)**
- **Beispiel: Hausdorff-Distanz**

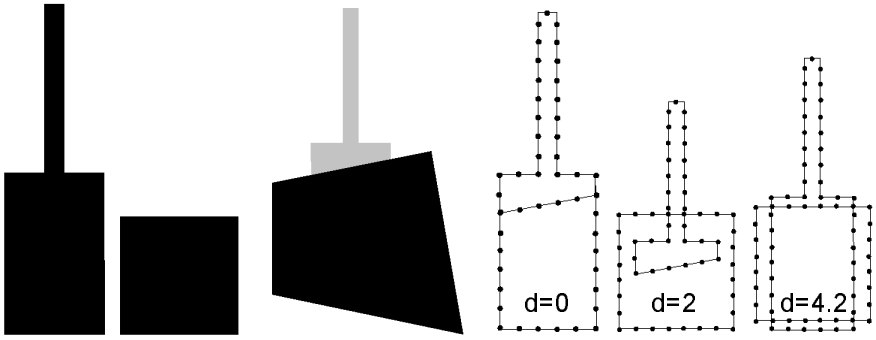
$$d(x,y) = \max\left(\max_{i \in x} \min_{j \in y} \|i - j\|, \max_{j \in x} \min_{i \in y} \|j - i\| \right)$$

- **robuste Hausdorff-Distanz: Ersetzung der max-Operation durch 60%-Quantil**

$$d(x,y) = \max\left(\operatorname{med}_{i \in x}^{60} \min_{j \in y} \|i - j\|, \operatorname{med}_{j \in x}^{60} \min_{i \in y} \|j - i\| \right)$$

Nicht-Metrische Distanzen nach Jacobs et al. (3)

- **Verwendung zu Erkennung von verdeckten Objekten**
- **Dreiecksungleichung gilt nicht**



Zusammenfassung und Bewertung

- **existiert ein riesiger Zoo von Distanzen/ Ähnlichkeitsfunktionen**
  - unterschiedliche Komplexität der Berechnung
  - geeignete Auswahl für jede Anwendung
  - experimenteller Vergleich: siehe später
- **viele offene Fragen**
  - metrische oder nicht-metrische Distanzen?
  - allgemeine Eigenschaften der nicht-metrischen Distanzen
  - Modellierung des menschlichen Ähnlichkeitsempfindens
  - Kombination verschiedener Distanzen (siehe später)
- **in der Praxis oft Verwendung von heuristischen Distanzen**