



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

MIN-Fakultät
Fachbereich Informatik
Arbeitsbereich SAV/BV (KOGS)

Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

Teil 1: Grundlagen der Signalverarbeitung

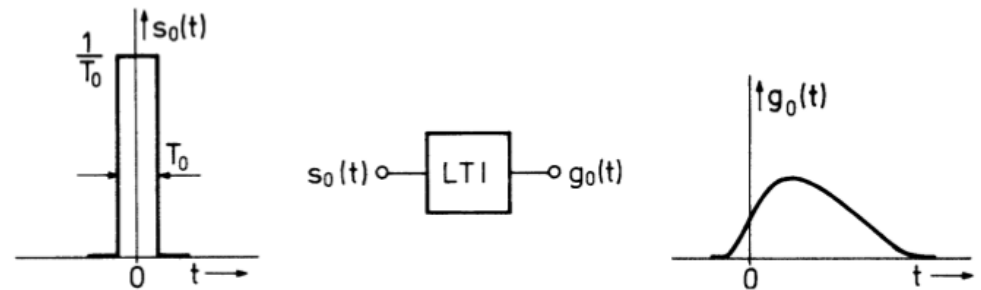
Vorlesung 2: Faltung und Fourier-Transformation

Benjamin Seppke

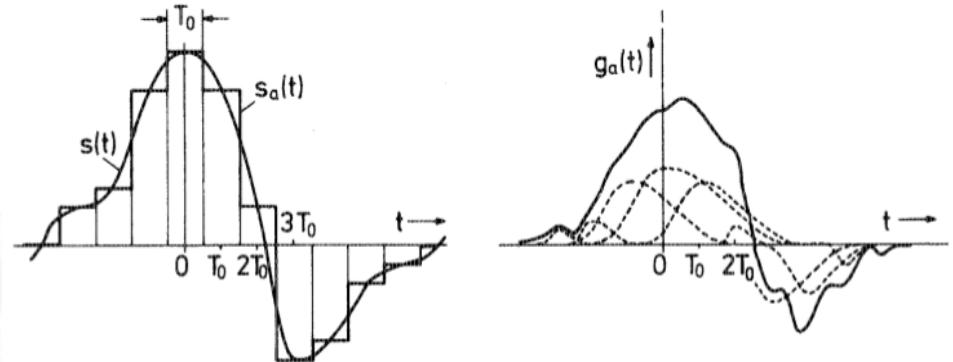
Jianwei Zhang

Systembeschreibung mit Elementarfunktionen

Rechteckimpuls mit Breite $1/T_0$ und Höhe T_0 ergibt Systemantwort $g_0(t)$:



Beliebiges Eingangssignal $s(t)$ kann durch Rechteckimpulse angenähert werden und ergibt Superposition einzelner Systemantworten:



Approximierte Eingangsfunktion:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) s_0(t - nT_0) T_0 \approx s(t)$$

Approximierte Ausgangsfunktion:

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) g_0(t - nT_0) T_0 \approx g(t)$$

Faltungsintegral

Grenzübergang $T_0 \rightarrow 0$:

$$s_0(t) \rightarrow \delta(t) \quad \text{Dirac-Impuls}$$

$$g_0(t) \rightarrow h(t) \quad \text{Impulsantwort, Stoßantwort, Gewichtsfunktion}$$

Eingangssignal als unendliche Reihe von Dirac-Impulsen

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

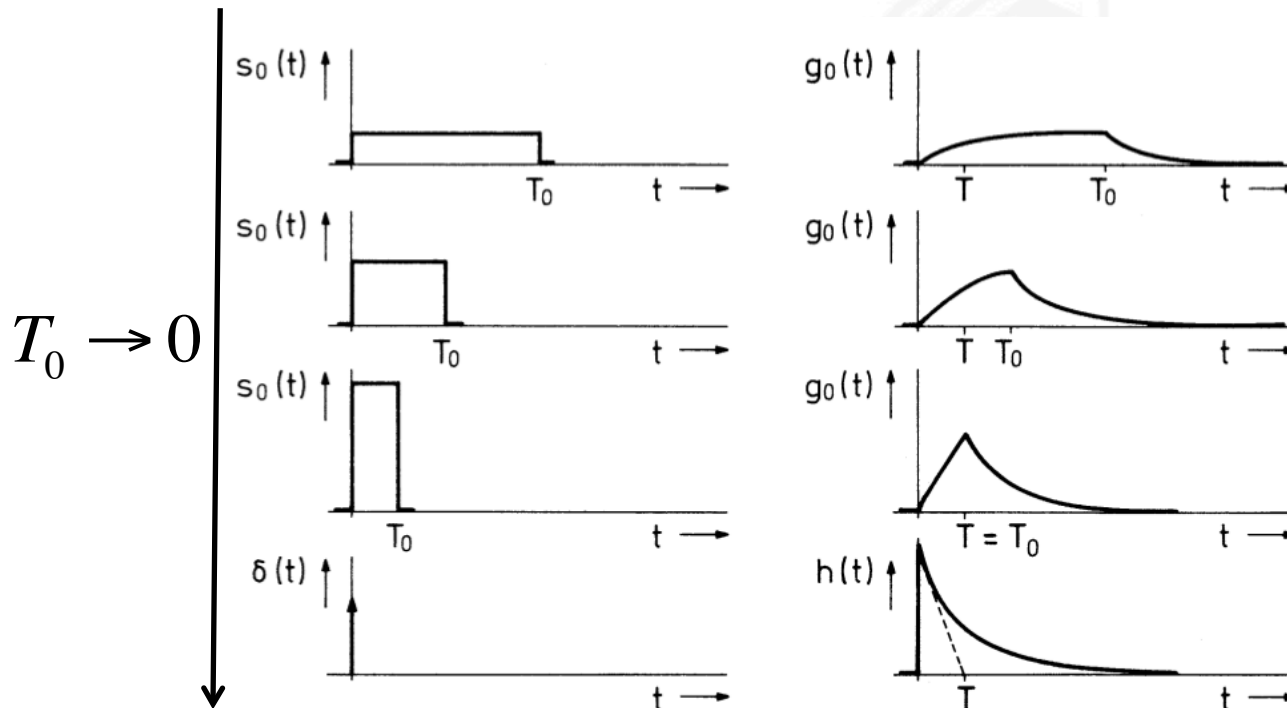
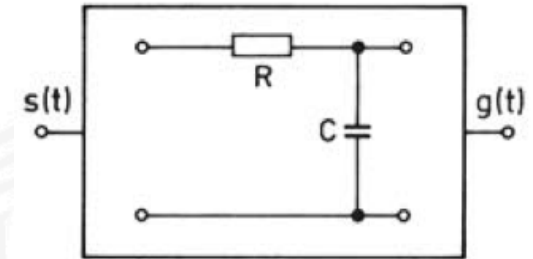
Ausgangssignal als Faltung der Impulsantwort des Systems mit dem Eingangssignal

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Die Transformation eines Signals durch ein System kann durch die Faltung (engl.: convolution) des Eingabesignals mit der Impulsantwort des Systems beschrieben werden.

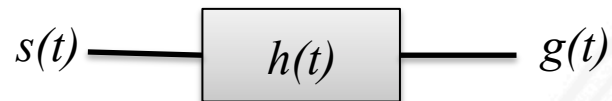
Grenzübergang für RC-Glied

- Wie antwortet ein RC-Glied auf einen Rechteckimpuls (Spannung) mit Breite $1/T_0$ und Höhe T_0 , wenn $T_0 \rightarrow 0$?



Impulsantwort als Systembeschreibung

- Systemantwort $h(t)$ bei Eingabe von $\delta(t)$ heißt "Impulsantwort" oder "Gewichtsfunktion"
- $h(t)$ charakterisiert das Verhalten des Bauelementes:



- Zusammen mit der Faltungsoperation lässt sich für jedes Eingangssignal die Systemausgabe bestimmen:

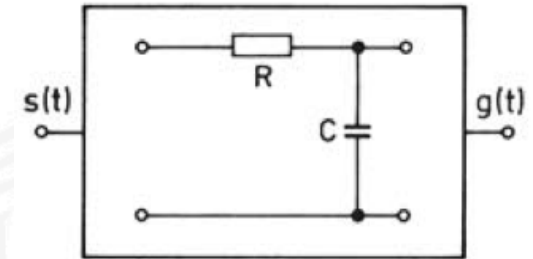
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

- Symbolische Schreibweise

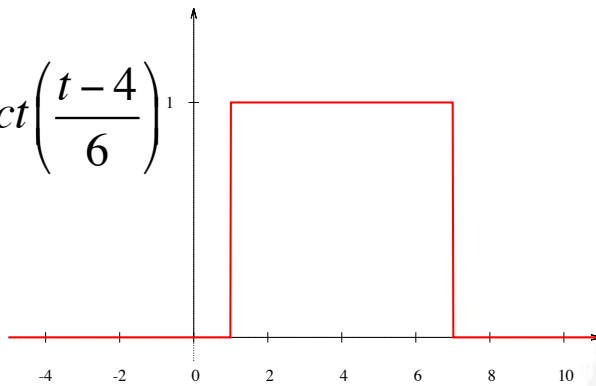
$$g(t) = s(t) * h(t)$$

Veranschaulichung der Faltung (I)

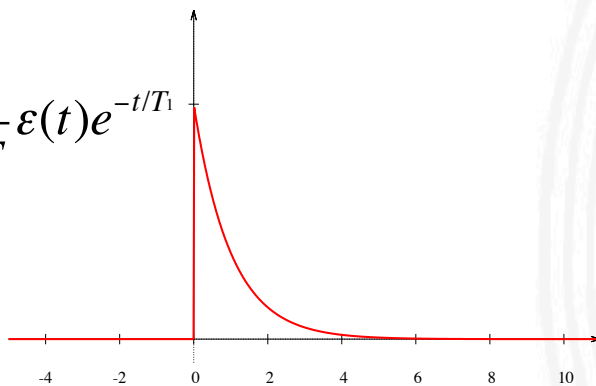
Faltung eines Rechteckimpulses $s(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ des RC-Gliedes (mit $T = RC = 1$):



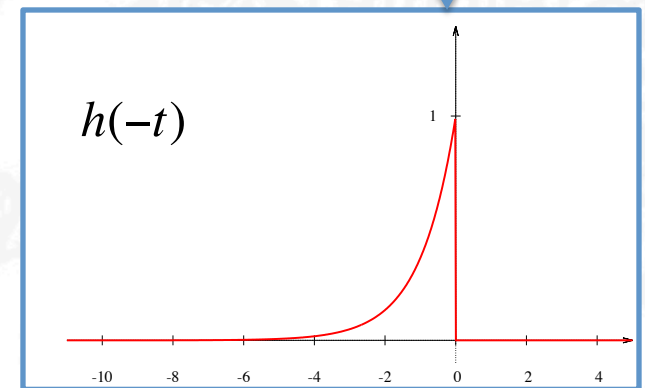
$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-4}{6}\right)$$



$$h(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$$

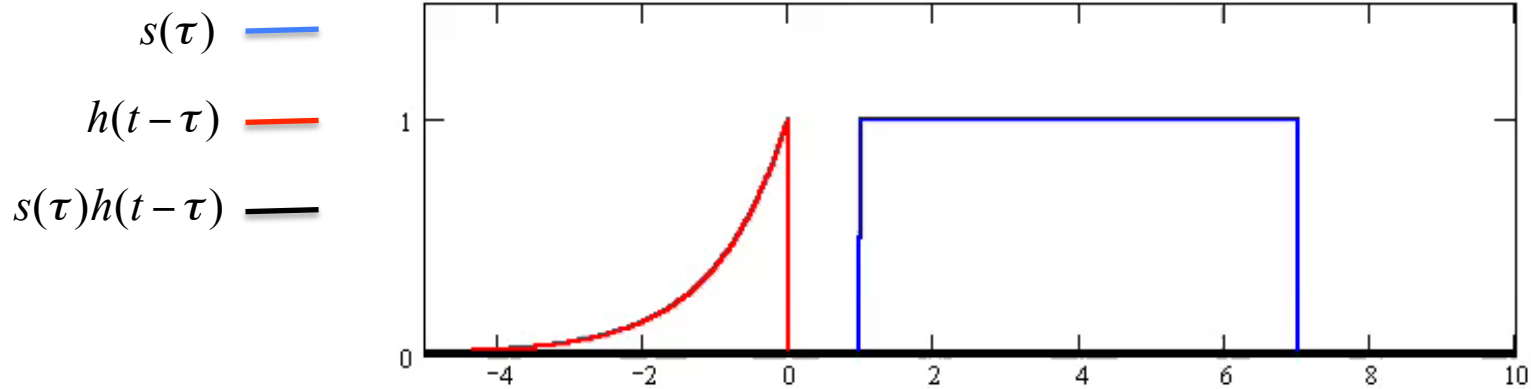


$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



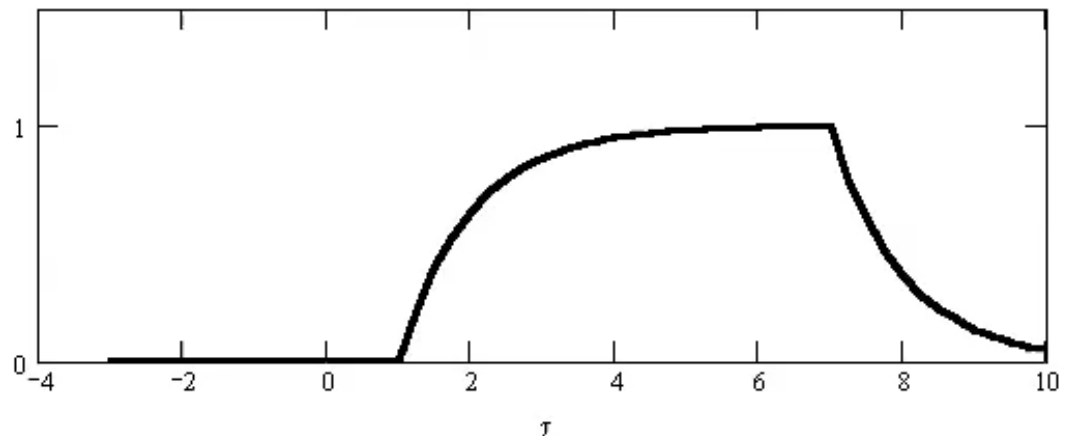
Veranschaulichung der Faltung (II)

Komponenten des Faltungsintegrals



Systemantwort

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Quelle: <http://www2.ensc.sfu.ca/people/faculty/cavers/ENSC380/conv.html>

Faltungsalgebra

- $\delta(t)$ ist Einselement:

$$s(t) = s(t) * \delta(t)$$

- Faltung ist kommutativ:

$$s(t) * h(t) = h(t) * s(t)$$

- Faltung ist assoziativ:

$$[f(t) * s(t)] * h(t) = f(t) * [s(t) * h(t)]$$

- Faltung ist distributiv:

$$f(t) * [s(t) + h(t)] = [f(t) * s(t)] + [f(t) * h(t)]$$

- Ableitung:

$$\frac{d}{dt}(f(t) * h(t)) = \frac{df}{dt} * h(t) = f(t) * \frac{dh}{dt}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

"Siebeigenschaft"

Ein System mit der Gewichtsfunktion $h(t) = \delta(t)$ heißt *ideal verzerrungsfrei*.
Es reproduziert das Eingangssignal exakt als Ausgangssignal.

Faltung mehrdimensionaler Funktionen

- Faltungsoperationen und ihre Eigenschaften lassen sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern.

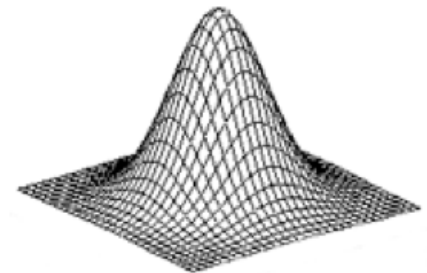
- Beispiel: zweidimensionale Faltung:

$$(f * h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) h(x - u, y - v) du dv$$

- Anwendung in der Bildverarbeitung:

$f(x, y)$ Intensitäten eines Grautonbildes

$h(x, y)$ Filter, z.B. 2d Gauß-Funktion: $h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$



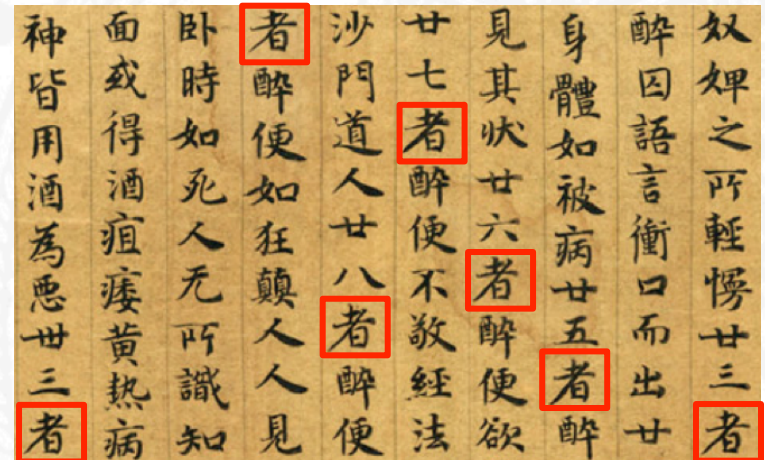
Faltung und Kreuzkorrelation

- Kreuzkorrelation von $f(t)$ und $h(t)$:

$$(f \circ h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) h(u - x, v - y) du dv$$

- Vergleiche mit $f(t) * h(t)$:
Integrand h ist bei Kreuzkorrelation nicht gespiegelt!
- Ist f ein Bild und h eine Schablone, kann Kreuzkorrelation als *Schablonenvergleich* gedeutet werden.
- Wo im Bild findet sich das in der Schablone gezeigte Zeichen?

者



Fourier-Reihe

Eine periodische Funktion $x(t)$ mit Grundfrequenz f_0 und Periodendauer $T_P = 1/f_0$ kann als Fourier-Reihe entwickelt werden:

- a_k gerade Anteile von $x(t)$
- b_k ungerade Anteile von $x(t)$
- $a_0/2$ Mittelwert von $x(t)$
- ω_0 Kreisfrequenz der Grundschiwingung
($\omega_0 = 2\pi f_0$)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Phasen- und Betragsdarstellung:

Folge der A_k ist "Amplitudenspektrum"

Folge der φ_k ist "Phasenspektrum"

Umrechnung: $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$

$$b_k = A_k \sin(\varphi_k)$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

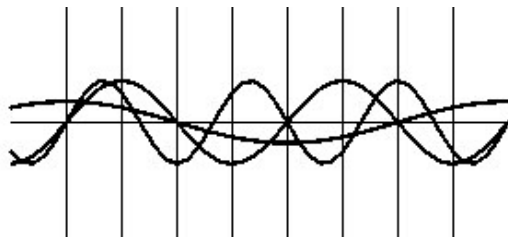
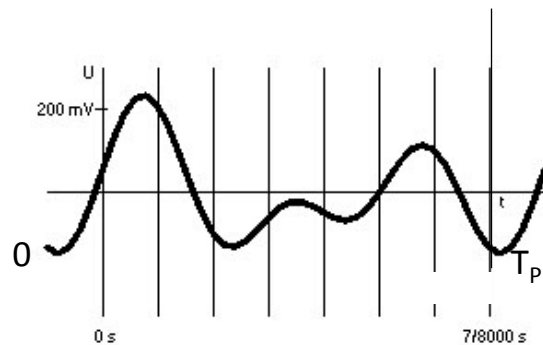
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + n\pi$$

wichtige Größen zur
Charakterisierung
von Systemen

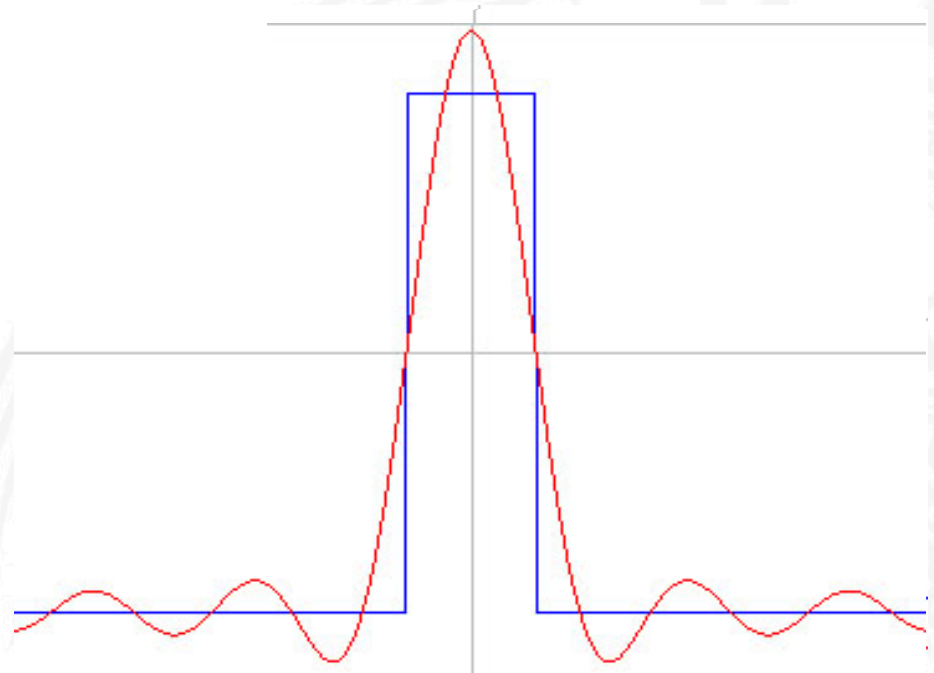
Annäherung durch begrenzte Zahl von Fourier-Koeffizienten

Originalsignal



sinusförmige Komponenten summieren sich zum Originalsignal

Annäherung eines Rechteckimpulses durch 1 ... 5 sinusförmige Komponenten



Online Demonstration von Näherungen durch Fourier-Reihen:
<http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/>

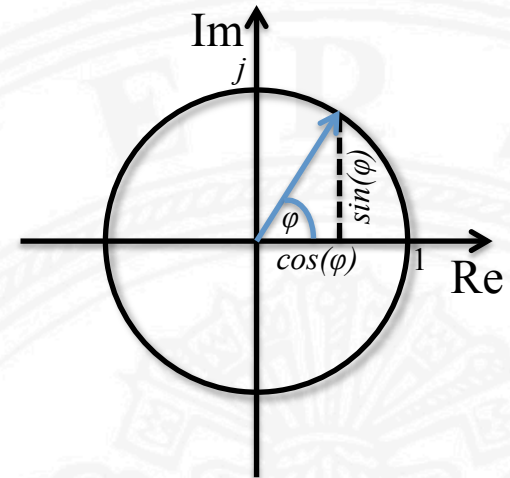
Komplexwertige Darstellung der Fourier-Reihe (I)

Mit der Euler'schen Formel $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$ erhält man

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}.$$

Dies ermöglicht folgende Umformung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}}{2} \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega_0 t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned}$$



Daraus ergibt sich die **Fourier-Reihe in komplexer Darstellung:**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Komplexwertige Darstellung der Fourier-Reihe (II)

Genauere Betrachtung der komplexwertigen Koeffizienten c_k :

- Die Koeffizienten lassen sich komplex konjugiert unterscheiden:

- Für $k > 0$: $c_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{A_k}{2} (\cos(\varphi_k) + j \sin(\varphi_k)) = \frac{1}{2}(a - jb)$

- Für $k < 0$: $c_k^* = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$

- $x(t)$ ist stets reellwertig, kann als Summe gegenläufig drehender Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} dt = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{c_k e^{jk\omega_0 t}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{c_k^* e^{-jk\omega_0 t}}$$

linksdrehend rechtsdrehend

Umrechnung zwischen verschiedenen Darstellungen der Fourier-Reihe

Von komplexen zu reellen Koeffizienten:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2 \operatorname{Re}(c_k)$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2 \operatorname{Im}(c_k)$$

$$A_k = 2\sqrt{c_k \cdot c_{-k}} = 2|c_k| = 2|c_{-k}|$$

$$\varphi_k = \operatorname{ang}(c_k) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)}\right)$$

Von reellen zu komplexen Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$c_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k}$$

$$c_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$$

Es werden stets nur Koeffizienten mit derselben Frequenz miteinander verrechnet!

Amplituden- und Phasenspektrum

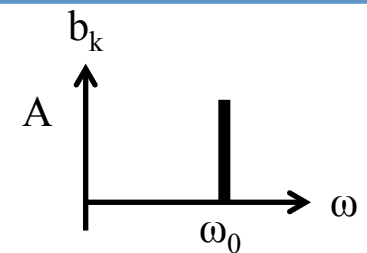
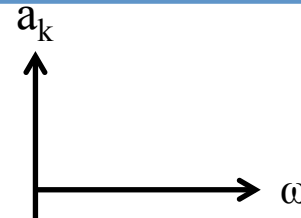
Aus den Bestimmungsgleichungen von A_k und ϕ_k folgt: Periodische Signale haben ein diskretes Spektrum mit Spektrallinienabstand $1/T_p$

Trivialbeispiel:

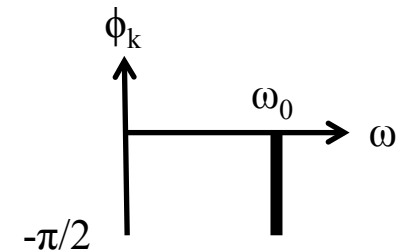
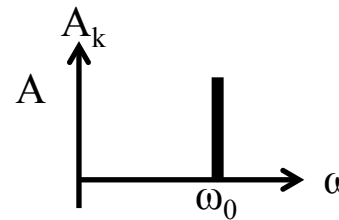
Spektrum von:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

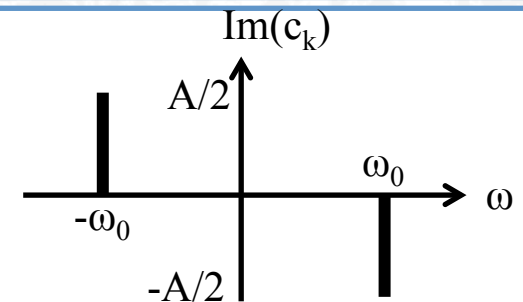
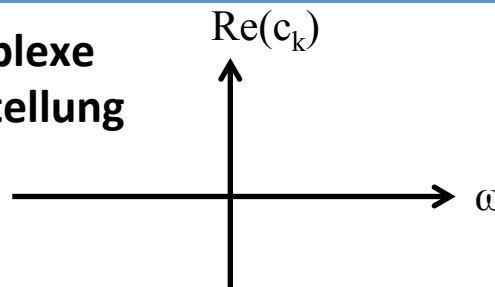
Sinus-Kosinus-Darstellung



Betrags-Phasen-Darstellung

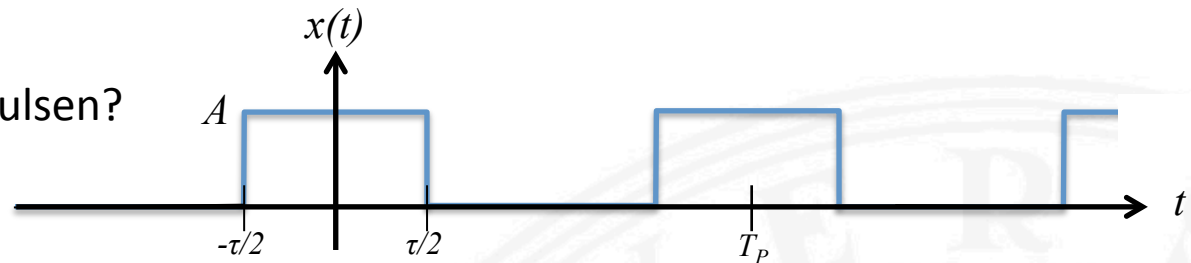


Komplexe Darstellung



Periodische Pulsreihe

Was ist das Spektrum von periodischen Rechteckimpulsen?



Mit der Bestimmungsgleichung von c_k :

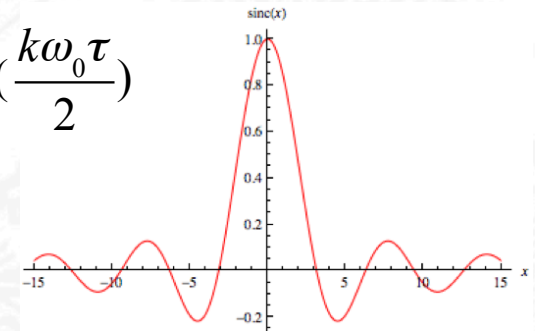
$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_P} \frac{1}{-jk\omega_0} \left(e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2} \right)$$

Mit der Euler'schen Formel:

$$c_k = \frac{A}{T_P} \frac{1}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 \tau / 2) = \frac{A\tau}{T_P} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right)$$

Eigenschaften:

- Periodisches Zeitsignal, daher Linienspektrum
- Zeitfunktion gerade, daher reelles Spektrum
- Einhüllende (Envelope) des Spektrums hat Verlauf $\operatorname{sinc}(x)/x$
- Nullstellen von $\operatorname{sinc}(k\omega\tau/2)$ bei $f = n/\tau$ für $|n| > 1$



$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ (auch: } si(x)\text{)}$$

Theorem von Parseval

Signalleistung im Frequenzbereich ist gleich der Signalleistung im Zeitbereich:

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Herleitung:

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t)^2 dt = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t)x^*(t) dt \quad \text{mit} \quad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} \quad \text{Trick: Deutung von } x(t) \text{ als komplexe Funktion}$$

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* (c_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Die Signalleistung eines periodischen Zeitsignals kann in die Beiträge der harmonischen Bestandteile zerlegt werden!

Fourier-Transformation

Anpassung der Fourier-Reihenentwicklung an nicht-periodische Signale durch Grenzübergang $T_P \Rightarrow \infty$

- Abstand der Spektrallinien $1/T_P \Rightarrow 0$
- Das Ergebnis existiert, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ (hinreichend, nicht notwendig)

Grenzübergang:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T_P/2}^{T_P/2} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right) e^{jk\omega_0 t}$$

$X(j\omega)$ ist die Fourier-Transformierte von $x(t)$

$T_P \Rightarrow \infty$ bewirkt $\omega_0 \Rightarrow d\omega \Rightarrow 0$ und $k\omega_0 \Rightarrow \omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{d\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier-Transformation: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Inverse Fourier-Transformation: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

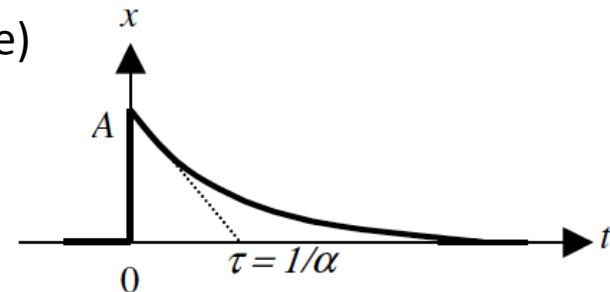
Schreibweisen für die Fourier-Transformation

In dieser Vorlesung:	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
In der Physik üblich:	$X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
Korrespondenzpaar:	$x(t) \text{ } \circ \text{---} \circ \text{ } X(j\omega)$	oder $x(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } X(j\omega)$
Operatoren F und F^{-1}:	$X(j\omega) = F\{x(t)\}$	$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$

Beispiele von Fourier-Transformationen

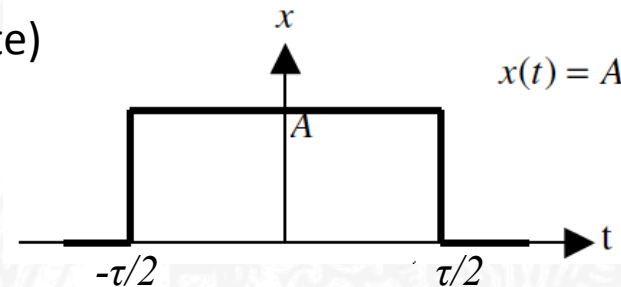
1. Was ist das Spektrum (die Fourier-Transformierte) von $Ae^{-\alpha t}$ ($t > 0$)?

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$



2. Was ist das Spektrum (die Fourier-Transformierte) des Rechteckimpulses $x(t) = A \text{rect}(T/\tau)$?

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \\ &= A\tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \end{aligned}$$



Interpretation der Fourier-Transformation

- Fourier-Transformierte ist "Spektrale Dichte", kurz Spektrum
- Für Spannungssignal $x(t)$ hat $X(j\omega)$ die Einheit Vs ("Volt pro Frequenzeinheit")

Faltungstheorem

Zeitverschobene Zeitfunktion

$$F\{x(t - \tau)\} = X(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

Zeitverschiebung hat keinen Einfluss auf das Amplitudenspektrum, nur auf das Phasenspektrum.

Faltung

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \\ Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[X_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} \right] d\tau \\ &= X_1(j\omega) X_2(j\omega) \end{aligned}$$

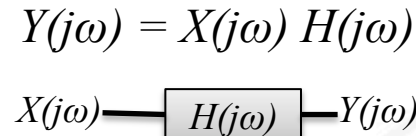
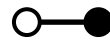
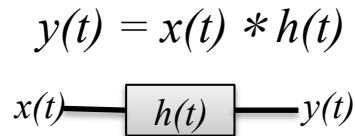
Faltungstheorem

Einer Faltung im Zeitbereich entspricht eine Multiplikation im Frequenzbereich

Die Wirkung eines Bauteiles (Systems) kann als voneinander unabhängige Wirkungen auf die harmonischen Bestandteile des Eingangssignals gedeutet werden.

Frequenzgang eines Systems

Zur Beschreibung von Systemverhalten gibt es die Korrespondenz:



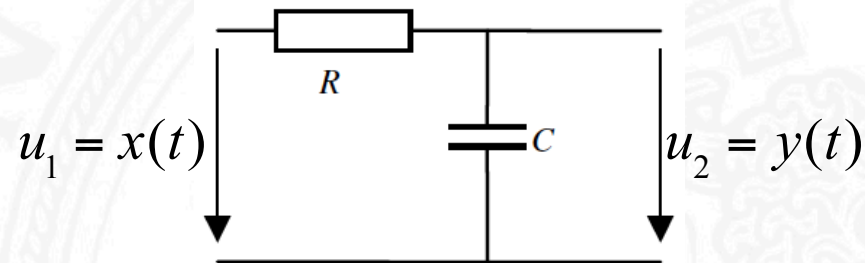
$H(j\omega)$ heißt Frequenzgang des Systems

Beispiel: Beschreibung des RC-Gliedes als Spannungsteiler ($RC = T$):

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



"Verzögerungsglied 1. Ordnung"

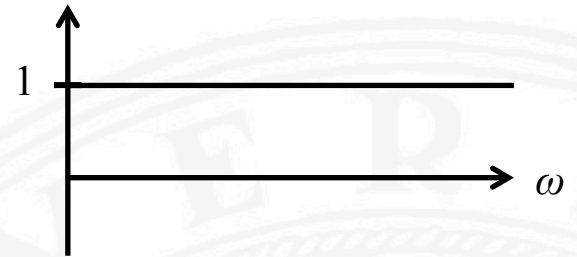


$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t)$$

Fourier-Transformation des Dirac-Impulses

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j\omega 0}}_{=1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Der Dirac-Impuls enthält alle Frequenzen mit gleichem Anteil.
- Als Eingangssignal eines Systems "prüft" er das Übertragungsverhalten aller Frequenzen.
- Praktisch ist ein Dirac-Impuls nicht realisierbar, dafür aber mathematisch elegant.
- Rücktransformation: $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} 1 d\omega$
- Symmetrie: Wenn $x(t) \equiv 1$, folgt: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} 1 dt$
- Durch Vergleich erhält man: $F\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$ Signal enthält nur die Frequenz $\omega=0$ "Gleichanteil"



Differentiation und Integration im Zeitbereich

Differentiationstheorem

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega F\{x(t)\} = j\omega X(j\omega)$$

Wichtiger Zusammenhang zur Behandlung von Differentialgleichungen!

Herleitung: Rücktransformation von $j\omega X(j\omega)$ ergibt $d/dt x(t)$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

Entsprechend lässt sich das Integrationstheorem ableiten:

$$F\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \underbrace{\pi X(0) \delta(\omega)}_{\text{Effekt der Integrationskonstanten}}$$

Effekt der Integrationskonstanten

Beobachtung: Differentiation verstärkt hohe Frequenzen des Spektrums

Symmetrien von Zeit- und Frequenzbereich

Zeitsignal $x(t)$	Spektrum $X(j\omega)$
reell	konjugiert komplex
reell und ungerade	imaginär und ungerade
reell und gerade	reell und gerade
imaginär und gerade	imaginär und gerade
imaginär und ungerade	reell und ungerade
konjugiert komplex	reell

Bei den meisten Anwendungen sind die Zeitfunktionen reell.

Eigenschaften von geraden und ungeraden Funktionen lassen sich häufiger ausnutzen als es solche Funktionen gibt:

Jede Funktion kann in einen geraden und ungeraden Teil zerlegt werden.

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_g(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ x_u(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \end{cases}$$

Signaldauer und Bandbreite

Technisch wichtiger Zusammenhang zwischen Dauer und Bandbreite eines Signals:

Signaldauer = Dauer des Zeitsignals (bis zu einer Schwelle)

Bandbreite = maximale Frequenz des Signalspektrums (bis zu einer Schwelle)

Die über einen Nachrichtenkanal mit Bandbreite B in der Zeit T maximal übertragbare Informationsmenge beträgt $I = T B \log_2(1 + P_S/P_N)$.


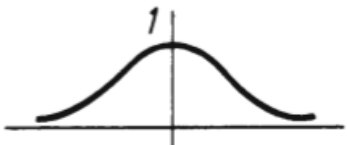
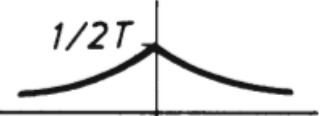
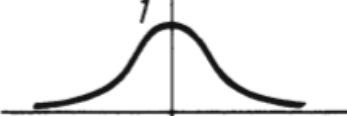


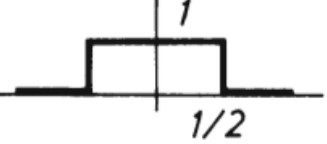
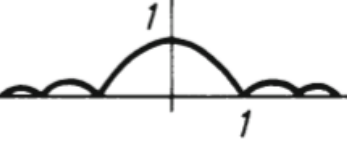
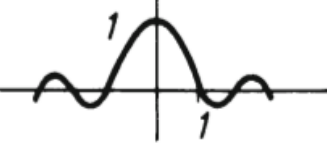
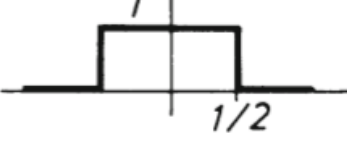
(P_S = Signalleistung P_N = Störleistung P_S/P_N = Signal-Rausch-Verhältnis)

Kurzdauernde Signale haben breite Spektren, schmale Spektren können nur durch langdauernde Signale erzeugt werden.

Schnell ändernde Signale haben ein breites Spektrum.

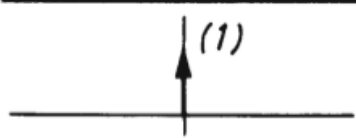
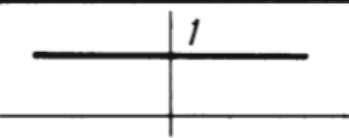
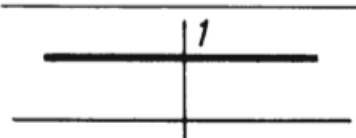
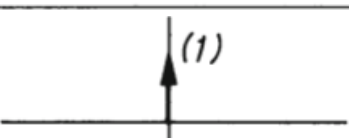
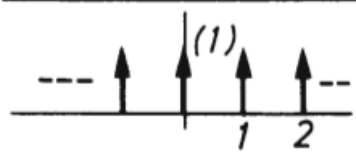
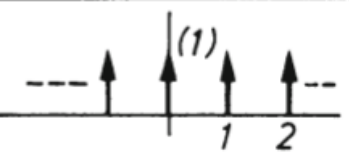
Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist die Unschärfe-Relation der Signalverarbeitung!

Tabelle von Fourier-Transformationen (1)

$s(t)$	$S(f)$	$ S(f) $
	$\frac{1}{1+j2\pi Tf}$ Exponentialimpuls $(T>0)$	
	$\frac{1}{1+(2\pi Tf)^2}$ Doppelpotentialimpuls $(T>0)$	
	$-j \frac{2\pi Tf}{1+(2\pi Tf)^2}$ $\frac{1}{2T} \text{sgn}(t)e^{- t /T}$ $(T>0)$	
	$\text{si}(\pi f)$ Rechteckimpuls	
	$\text{rect}(f)$ si-Funktion	

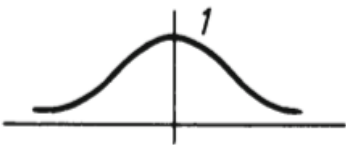
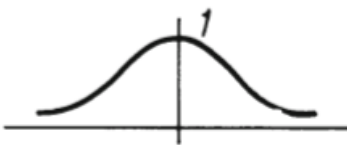
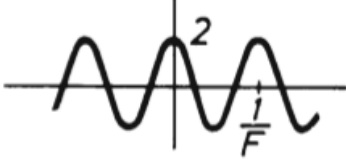
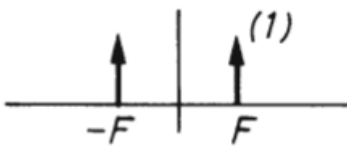
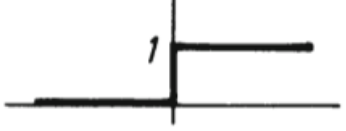

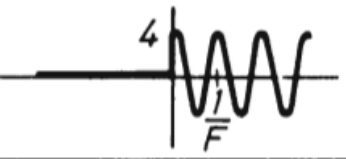

aus Ohm & Lüke: Signalübertragung

Tabelle von Fourier-Transformationen (2)

$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$\delta(t)$ Dirac-Impuls	1	
	1 Gleichstrom	$\delta(f)$	
	$\text{III}(t)$ Dirac-Impuls- folge	$\text{III}(f)$	

aus Ohm & Lücke: Signalübertragung

Tabelle von Fourier-Transformationen (3)

$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$e^{-\pi t^2}$ Gauß-Impuls	$e^{-\pi f^2}$	
	$2 \cos(2\pi Ft)$ cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
	$\varepsilon(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	
	$4\varepsilon(t) \cdot \cos(2\pi Ft)$ geschaltete cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F) - \frac{j}{\pi} \frac{2f}{f^2 - F^2}$	

aus Ohm & Lüke: Signalübertragung