



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

MIN-Fakultät
Fachbereich Informatik
Arbeitsbereich SAV/BV (KOGS)

Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

Teil 1: Grundlagen der Signalverarbeitung

Vorlesung 3: Zweidimensionale Fourier- Transformation und diskrete Systeme

Benjamin Seppke

Jianwei Zhang

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Definition und Eigenschaften der Fourier-Transformation lassen sich auf mehrere Dimensionen ausdehnen. Wir betrachten Anwendungen in der Bildverarbeitung und dazu die zweidimensionale Fourier-Transformation.

Achtung: Wechsel der Notation!

- statt Zeit t jetzt Ortskoordinaten x, y
- statt Frequenz f jetzt Ortsfrequenzen u, v
- statt Zeitfunktion $s(t)$ jetzt Grauwertfunktion $g(x, y)$ (auch Intensitäts- oder Bildfunktion)

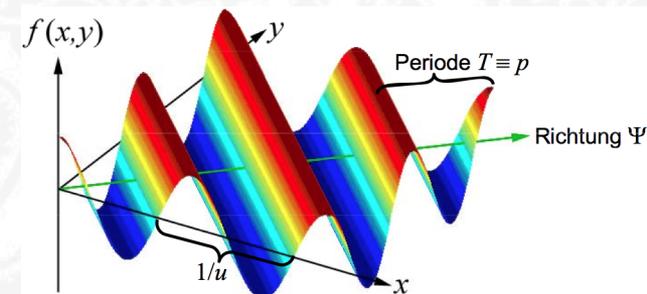
$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

Mit Sinus- und Kosinusanteilen:

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \left(\cos 2\pi(ux + vy) - j \sin 2\pi(ux + vy) \right) dx dy$$

räumliche Frequenzen
Richtung $\Psi = \arctan(v/u)$



Kenngrößen des zweidimensionalen Spektrums

Amplitudenbetragsspektrum $|G(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(u, v)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(u, v)\}^2}$

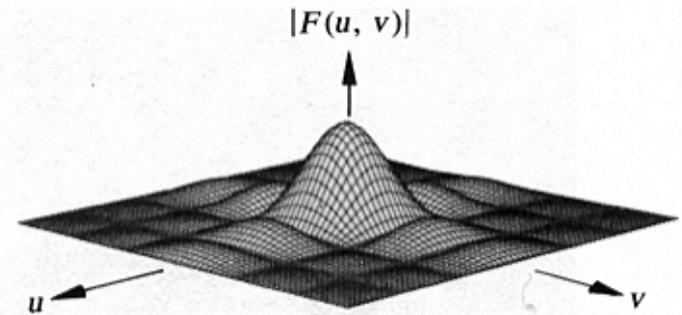
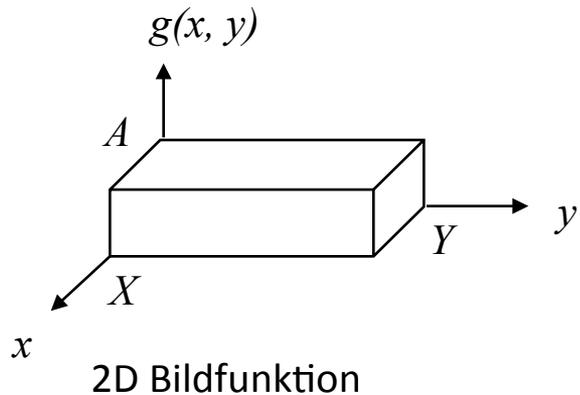
Leistungsspektrum $|G(u, v)|^2$

Phasenspektrum $\Phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(u, v)}{\operatorname{Re}(u, v)}\right)$

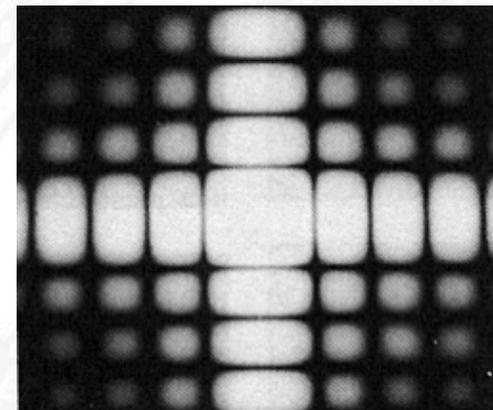
Frequenz $f = 1/p$ mit $p = \sqrt{u^2 + v^2}$

Richtung $\Psi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$

Illustration von zweidimensionaler Fourier-Transformation



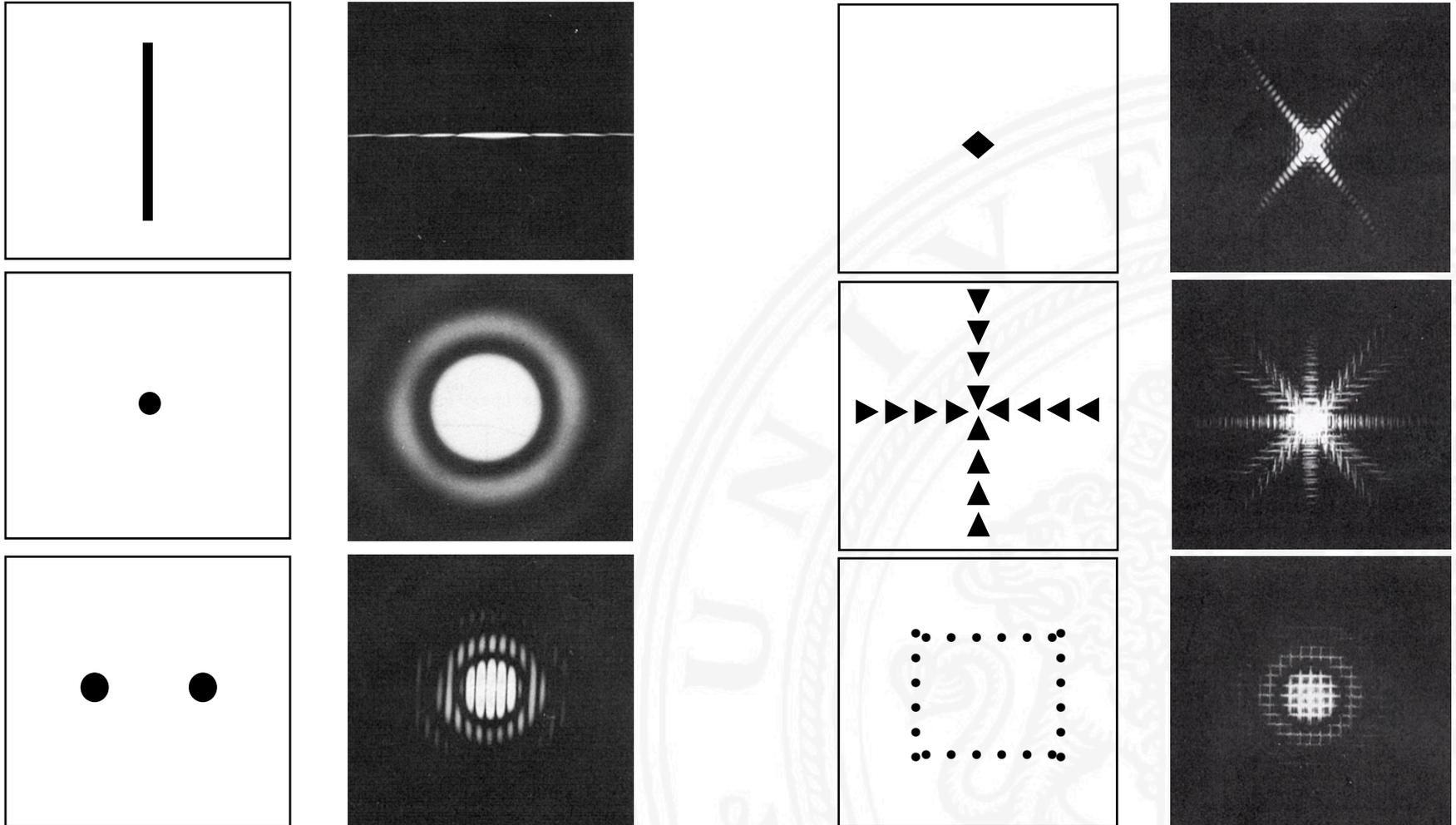
Amplitudenbetragspektrum



Amplitudenbetragspektrum in Grauwertdarstellung

Beobachtung: Große spektrale Amplituden treten in Richtungen senkrecht zu prominenten Kanten der Bildfunktion auf

Beispiele für zweidimensionale Fourier-Transformation



Faltung und Filtern

Der zweidimensionalen Faltung entspricht eine Multiplikation im Frequenzraum.

- Faltung
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, t) h(x-s, y-t) ds dt$$
- Im Frequenzraum: $F\{f(x, y)\} = F\{g(x, y)\} \cdot F\{h(x, y)\}$

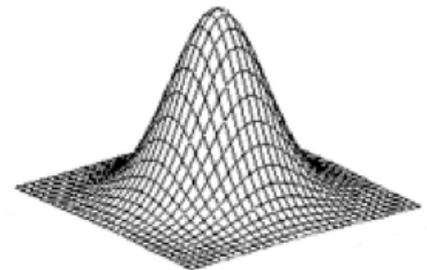
Anwendung von Filtern:

Gewünschte Bildänderungen (z.B. Weichzeichnen, Scharfzeichnen) können durch

1. Fourier-Transformation des Bildes, dann
2. Multiplikation der Fourier-Transformierten mit einem Filter $H(u, v)$, dann
3. Rücktransformation des Ergebnisses bewirkt werden.

Beispiel: Tiefpassfiltern

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad H(u, v) = F\{h(x, y)\} \sim e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$$



Gauß-Funktion im Ortsbereich ergibt Gauß-Funktion im Frequenzbereich!

Geschichte von diskreten Systemen

- Ursprünge: Analoge Signalverarbeitung in Theorie und Praxis. Aber Rückschlüsse von diskreten Werten auf kontinuierliche Zusammenhänge (z.B. Astronomie).
19. Jahrhundert: Rechenmaschine von Babbage, Hollerith-Maschine
- 1941: Konrad Zuse baut 1. Digitalrechner (Z3)
- 1943: Watson (IBM): "Ich glaube, es gibt einen weltweiten Bedarf von etwa fünf Rechnern."
- Seit 1948: (Shannon) Abtasttheorem klärt Digitalisierung, aber technische Geräte bleiben weiterhin analog
- 1970: Olson (DEC): "Es gibt keinen Grund, warum jemand einen Computer zuhause haben wollte."
- Seit ca. 1975: Diskrete Signalverarbeitung wird an Universitäten gelehrt
- 1981: IBM-PC

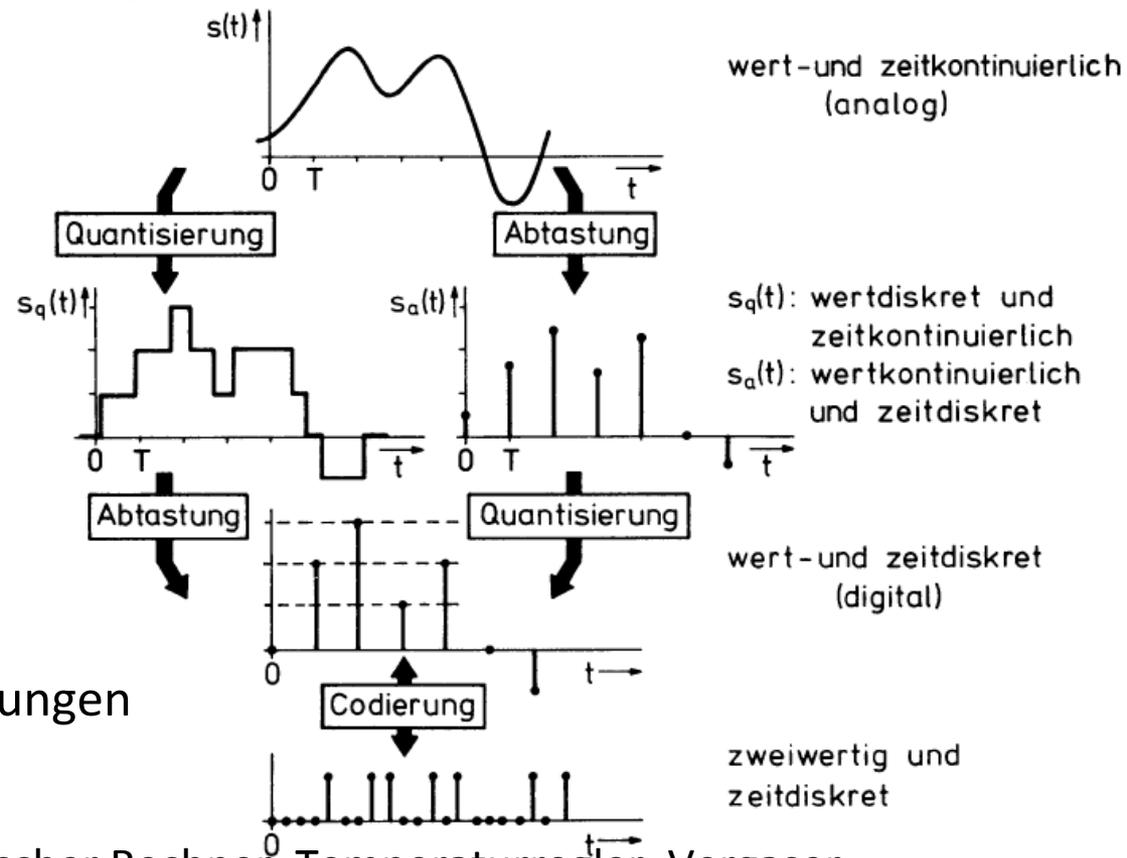
Diskrete Systeme

Vorteile gegenüber analogen Systemen:

- Störimmunität
- Stabilität
- Reproduzierbarkeit
- Flexibilität

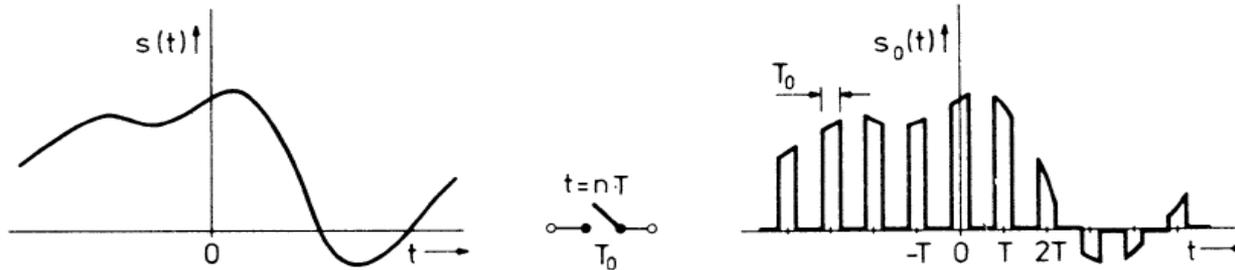
Nachteile:

- Geschwindigkeit
- Quantisierungseffekte
- Preis bei einfachen Anwendungen



Beispiele: Klingel, mechanischer Rechner, Temperaturregler, Vergaser

Ideale Abtastung eines kontinuierlichen Signals



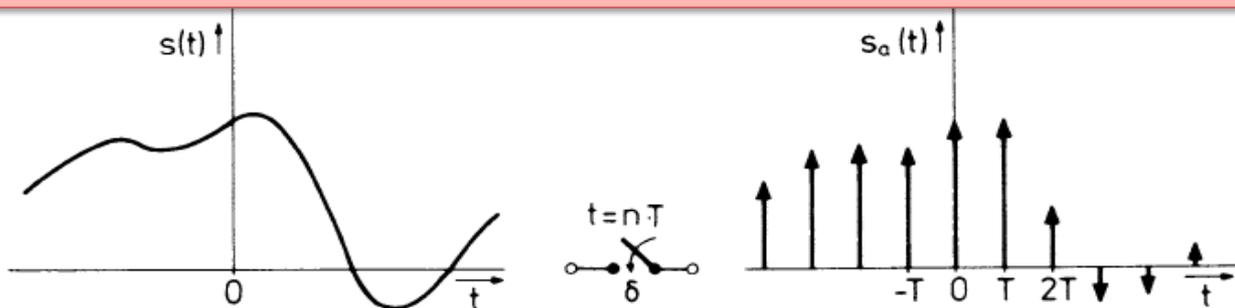
$$s_0(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT}{T_0}\right)$$

Annäherung durch Rechteckimpulse

$$s_a(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT)$$

nach Grenzübergang werden aus Rechteckimpulsen Dirac-Impulse

"Idealer Abtaster" liefert Folge von Dirac-Impulsen, die mit den Werten der kontinuierlichen Zeitfunktion skaliert sind ($T =$ Abtastperiode).



Spektrum eines abgetasteten Signals

Welche Unterschiede ergeben sich zum Spektrum des kontinuierlichen Signals?

Korrespondenzen:

$$s(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f)$$

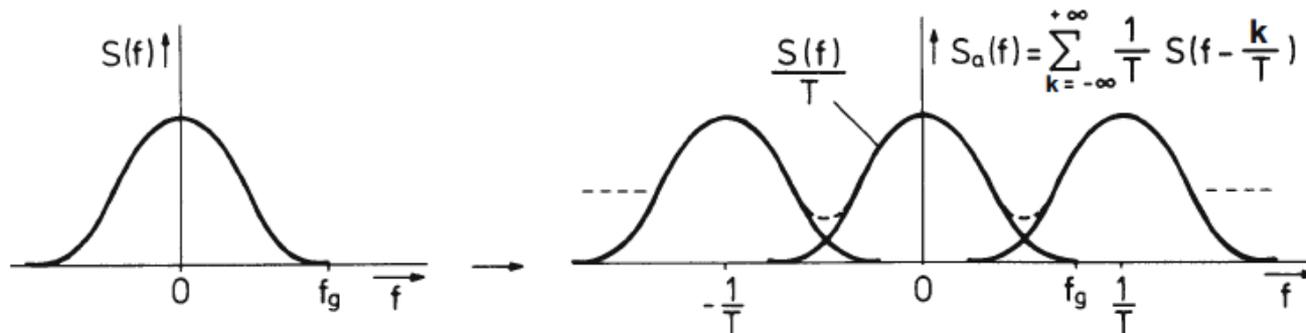
$$s_a(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_a(f)$$

$$\delta(t-nT) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \delta(f - k/T)$$



$$S_a(f) = S(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{k}{T})$$

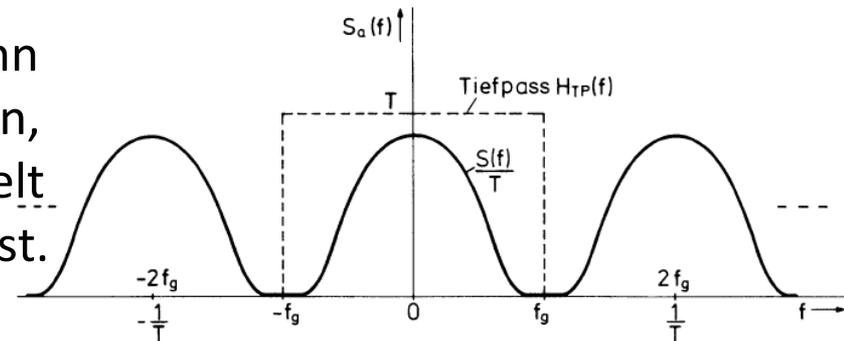
Das Spektrum des abgetasteten Signals ist die Überlagerung von Originalspektren, jeweils verschoben um ein Vielfaches der Abtastfrequenz $1/T$.



Beispiel: $S(f)$ = Spektrum eines Signals mit Grenzfrequenz f_g . Das Spektrum des abgetasteten Signals ist im Grenzbereich durch die Überlagerung "verzerrt".

Rückgewinnung des kontinuierlichen Signals

Das ursprüngliche kontinuierliche Signal kann nur dann fehlerfrei zurückgewonnen werden, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch wie die Grenzfrequenz des Signals ist.



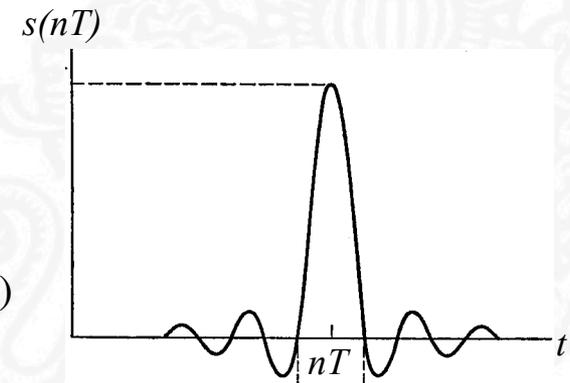
Zur Rückgewinnung müssen die Wiederholungen des Spektrums bei höheren Frequenzen ausgeblendet werden → idealer Tiefpass erforderlich.

Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpasses:

$$H_{TP}(f) = \text{rect}(f/(2f_g)) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 2f_g T \text{ sinc}(2\pi f_g t)$$

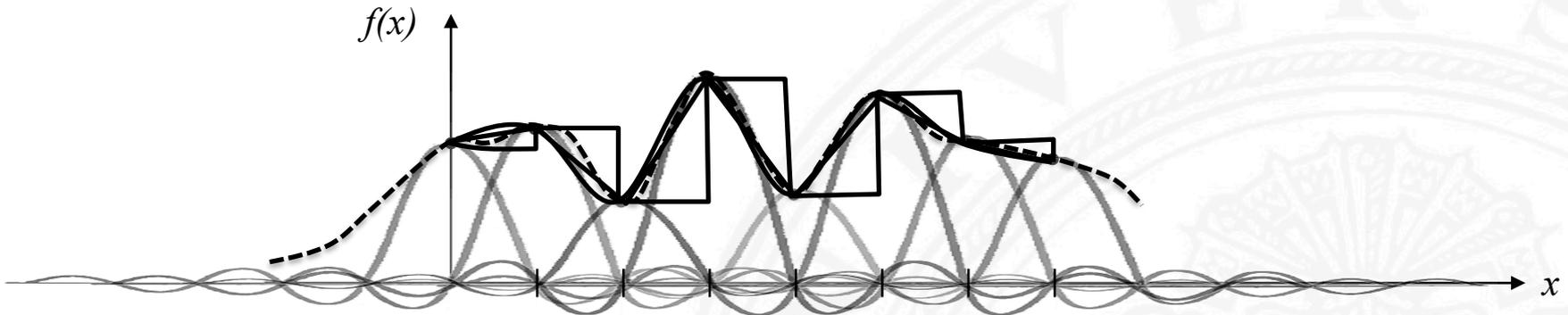
Rückgewinnung einer mit $1/T \geq 2f_g$ abgetasteten Zeitfunktion:

$$s(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t - nT) \right] * \text{sinc}\left(\pi \frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{s(nT)}_{\text{Abtastwerte}} \text{sinc}\left(\pi \frac{t - nT}{T}\right)$$



Rückgewinnung eines kontinuierlichen Signals in der Praxis

Bei Superposition von sinc-Signalen würde der Verlauf zwischen zwei Abtaststellen von allen Abtastwerten in einer unbegrenzten Umgebung beeinflusst werden \rightarrow nicht praktikabel



Verschiedene vereinfachte Interpolationsformen:

- Treppenfunktion (mit anschließender Glättung)
- Lineare Interpolation (mit anschließender Glättung)
- Spline-Interpolation (berechnete Glättung)

Digitalisierung von Bildern

Bildfunktionen müssen vor Bearbeitung durch Rechner digitalisiert werden:

- Örtliche Diskretisierung
Die Bildebene wird durch ein zweidim. Feld von Bildelementen repräsentiert
- Grauwertquantisierung
Jeder Grauwert ("Farbintensität") nimmt einen von endlich vielen Werten an
- Zeitliche Quantisierung

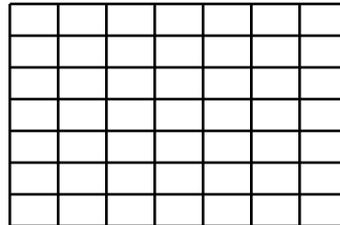
Grauwerte werden an diskreten Zeitpunkten abgetastet

$$\begin{aligned} f(x, y, t) \rightarrow & \{ \{ f_S(x_1, y_1, t_1), f_S(x_2, y_1, t_1), \dots, f_S(x_N, y_M, t_1) \}, \\ & \{ f_S(x_1, y_1, t_2), f_S(x_2, y_1, t_2), \dots, f_S(x_N, y_M, t_2) \}, \\ & \dots, \\ & \{ f_S(x_1, y_1, t_D), f_S(x_2, y_1, t_D), \dots, f_S(x_N, y_M, t_D) \} \} \end{aligned}$$

Ein einzelner Wert eines diskretisierten Bildes wird Pixel (picture element) genannt.

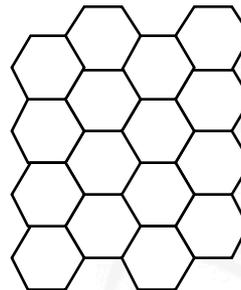
Örtliche Diskretisierung

Rechteckgitter



Der Wert einer Zelle repräsentiert die Bildintensität, die "in der Zelle" gemessen wird.

Hexagonales Gitter

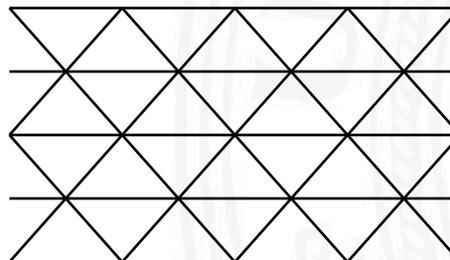


Gleiche Nachbarschaftsbeziehungen zu allen 6 angrenzenden Nachbarn einer Zelle.

Zeilen sind gegeneinander versetzt:

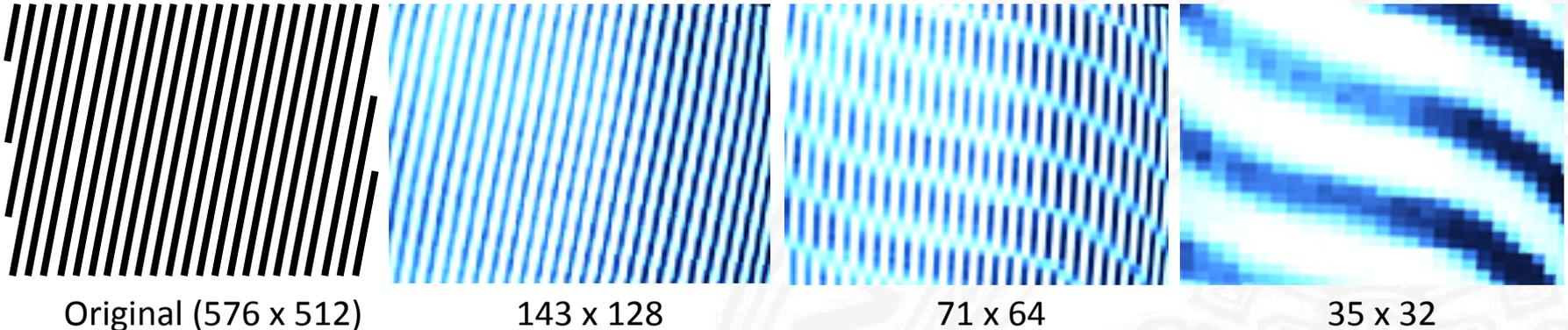


Dreiecksgitter



Alias-Effekt

Werden Bilder mit einer geringeren Frequenz als der doppelten Grenzfrequenz abgetastet, können künstliche Strukturen entstehen (engl. aliasing).



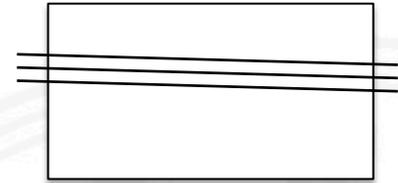
Zur Vermeidung des Alias-Effektes muss

- entweder mit einer an die Grenzfrequenz des Bildes angepassten Abtastfrequenz abgetastet werden,
- oder die Grenzfrequenz des Bildes vor Abtastung mit einem Tiefpassfilter herabgesetzt werden.

Abtastung bei TV-Signalen

PAL-Standard:

- Bildformat 3 : 4
- 5 Vollbilder (50 Halbbilder) pro Sekunde
- Zeilensprungverfahren: 1, 3, 5, ... , 2, 4, 6, ...
- 625 Zeilen pro Vollbild, davon 576 sichtbar
- 64 ms pro Zeile, davon 52 ms sichtbar
- $W = 5$ MHz Bandbreite



Wegen der zeitsequentiellen Zeilenstruktur ist nur 1D-Abtastung erforderlich.

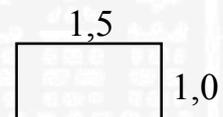
Abtastintervalle von $\Delta t = 1/(2W) = 10^{-7}s = 100 \text{ ns}$ ergeben die maximale Auflösung.

Mit $\Delta t = 100 \text{ ns}$ und einer (sichtbaren) Zeilendauer von 52 ms ergeben sich 520 Abtastwerte pro Zeile.

In der Praxis werden häufig 512 Pixel pro TV-Zeile verwendet.

- $576 \times 512 = 294912$ Pixel pro Vollbild

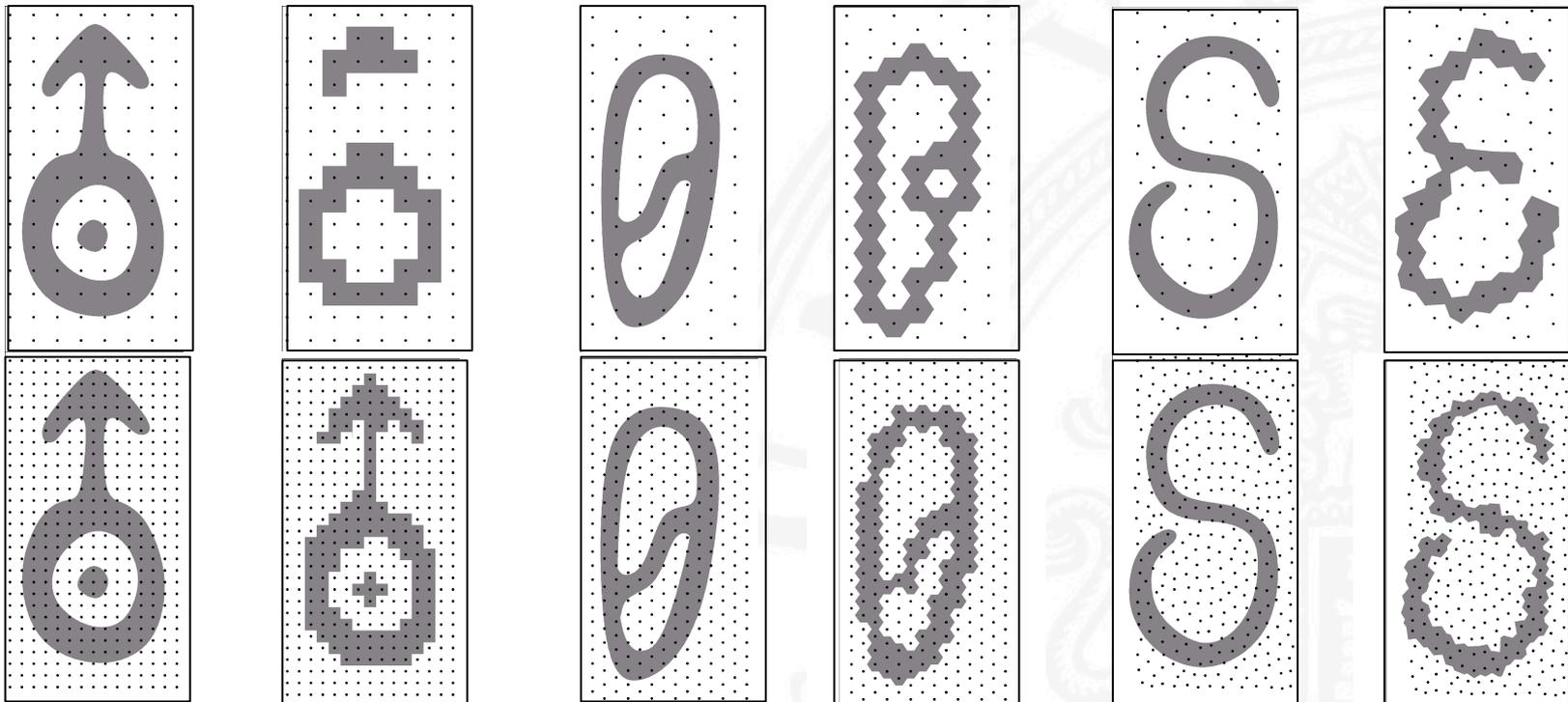
- Seitenverhältnis eines Pixels beträgt: $\frac{\text{Pixelhöhe}}{\text{Pixelbreite}} = \frac{4/512}{3/576} = 1,5$



Formerhaltende Abtastung bei Binärbildern

Problem:

- Durch Abtastung können neue Strukturen entstehen (topologische Veränderungen)
- Shannon's Abtasttheorem hilft nicht, weil Binärbilder nicht bandbegrenzt sind.



Formerhaltende Abtastung

Abtasttheorem zur Formerhaltung:

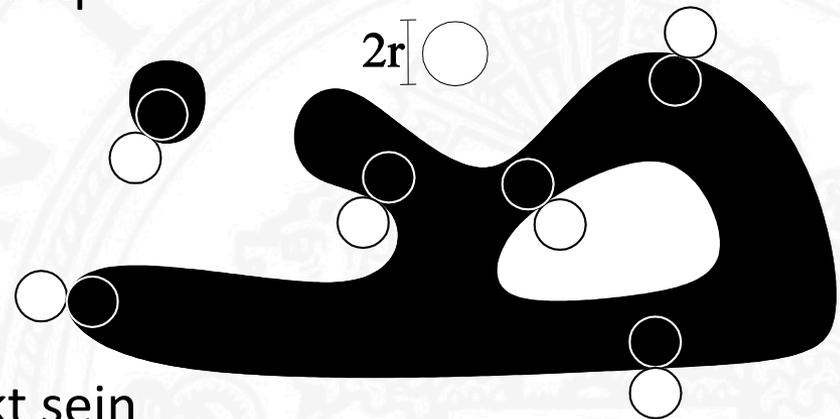
Die Form eines r -regulären Bildes bleibt bei Abtastung mit einem beliebigen Abtastgitter erhalten, wenn die Abstände der Abtastpunkte nicht größer als r sind.

Stellinger, Köthe 2003

"Abstand von Abtastpunkten" = maximaler Abstand von einem Abtastpunkt zum nächstgelegenen Abtastpunkt

" r -reguläres Binärbild":

Tangential berührende Kreise mit Radius $2r$ schneiden keine Kontur

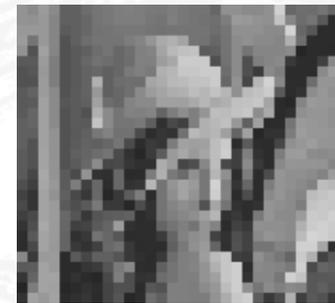
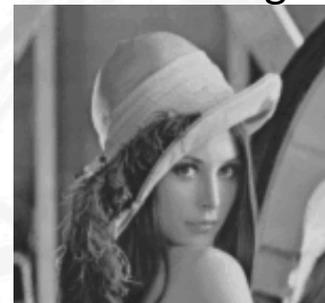
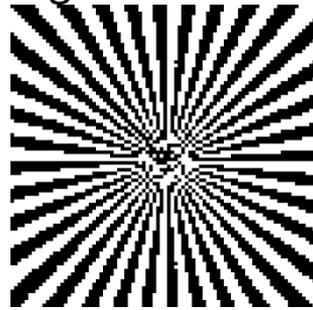
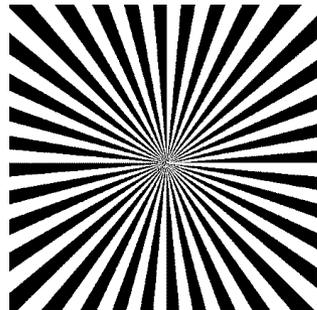


- Krümmung muss auf $1/r$ beschränkt sein
- Dicke muss auf $2r$ beschränkt sein
- Teile müssen mindestens Abstand von $2r$ haben

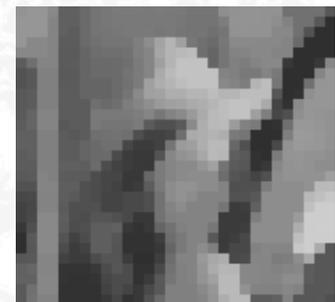
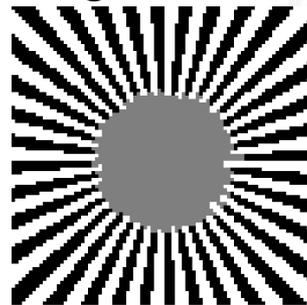
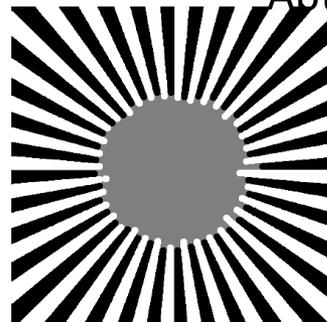
"Formerhaltendes" Abtasten beliebiger Grautonbilder

Das Theorem für topologieerhaltendes Abtasten kann auf Grautonbilder angewandt werden, wenn es für alle Binärbilder gilt, die aus dem Grautonbild durch Schwellwertvergleich erzeugt werden können ("Niveaumengen").

Abtastung und Rekonstruktion von nicht-r-regulären Bildern



Abtastung und Rekonstruktion von r-regulären Bildern



Vergleich mit Shannon's Abtasttheorem

	Shannon's Abtasttheorem	Formerhaltendes Abtasttheorem
notwendige Bildeigenschaft	bandbegrenzt mit Bandbreite W	r -regulär
Gleichung	$\left(\frac{r'}{\sqrt{2}} = \right) d < \frac{1}{2W}$	$r' < r$
rekonstruiertes Bild	identisch mit Originalbild	dieselbe Form wie Originalbild
Vorfiltern	Bandbegrenzung durch Tiefpassfilter (kann aber Form verändern!)	Regularisierung: ungelöstes Problem
2D Abtastgitter	Rechteckgitter	beliebige Gitter
Dimensionalität	1D (generalisierbar zu n -D)	2D (teilweise generalisierbar zu n -D)

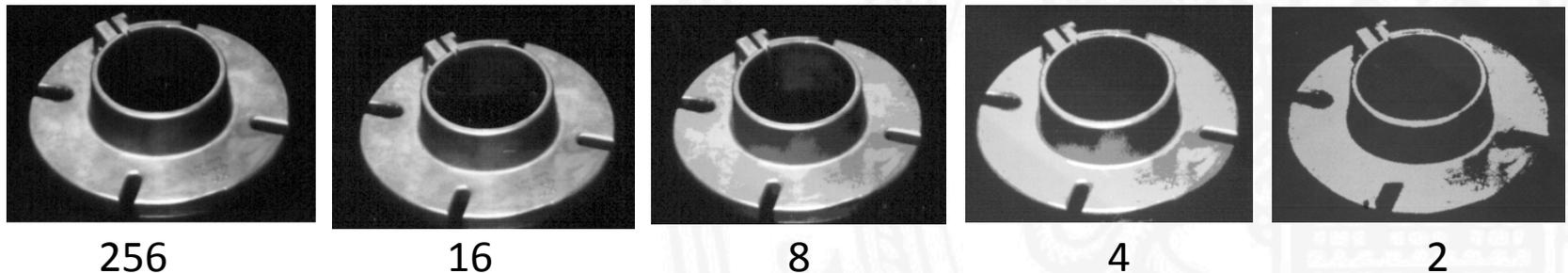
Quantisierung von Grauwerten

Quantisierung transformiert kontinuierliche Werte einer Grauwertfunktion in diskrete Werte.

Typischer Wertebereich: $2 \dots 2^{12}$ Quantisierungsebenen

Weniger als 2^9 Quantisierungsebenen können beim Betrachten durch das menschliche Auge künstliche Konturen erzeugen.

Beispiel:



Quantisierungskennlinien

Uniforme Quantisierung:

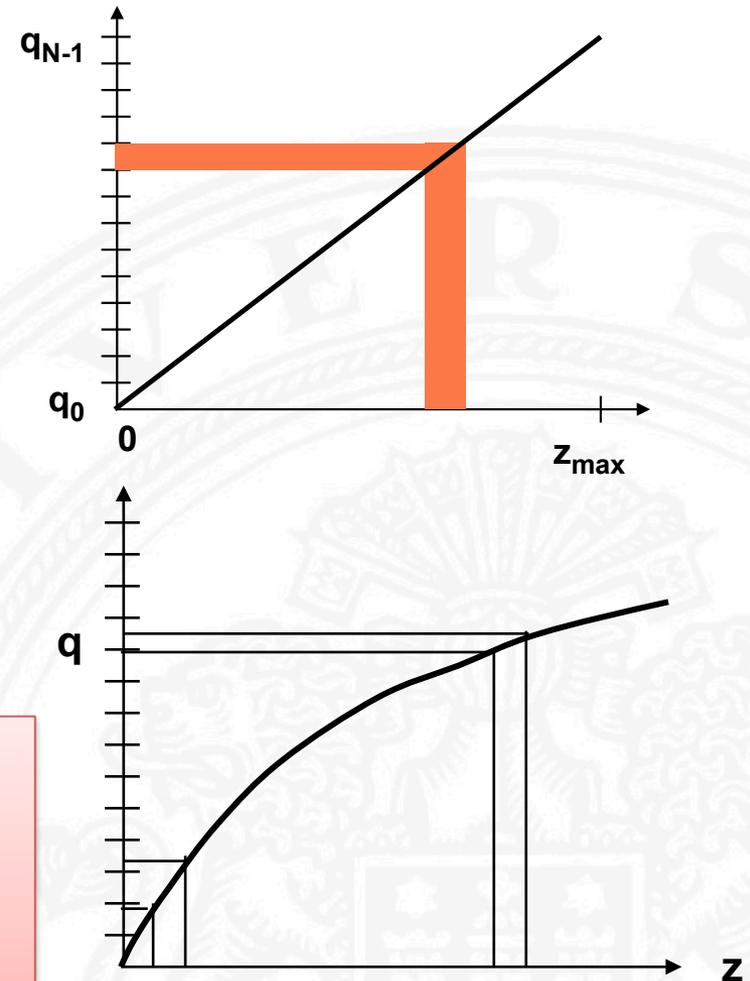
- Diskrete Werte haben gleiche Abstände auf der kontinuierlichen Grauwertskala.
- Uniforme Quantisierung kann Quantisierungsebenen "vergeuden", wenn unwichtige Grauwertbereiche unnötig hoch aufgelöst werden.

Quantisierung mit logarithmischer Kennlinie:

- Niedrige Grauwerte werden in mehr diskrete Grauwerte abgebildet als hohe Grauwerte

Anmerkung:

Bei Menschen hängt subjektive (wahrgenommene) Helligkeit annähernd logarithmisch von der gemessenen Helligkeit ab. Dies kann durch entsprechende Kennlinien berücksichtigt werden.



Optimale Quantisierung (1)

Annahme:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(z)$ für kontinuierliche Grauwerte ist bekannt, es stehen N diskrete Grauwerte zur Verfügung.

Ziel:

Wähle die diskreten Grauwerte q_n und die Grenzen der Diskretisierungsintervalle z_n derart, dass der mittlere Quantisierungsfehler d_q minimiert wird.

Vorgehen:

$$\text{Minimiere: } d_q^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{z_n}^{z_{n+1}} (z - q_n)^2 p(z) dz$$

durch Nullsetzen der Ableitungen:

$$\frac{\delta}{\delta z_n} d_q^2 = (z_n - q_{n-1})^2 p(z_n) - (z_n - q_n)^2 p(z_n) = 0 \quad \text{für } n=1 \dots N-1$$

$$\frac{\delta}{\delta q_n} d_q^2 = -2 \int_{z_n}^{z_{n+1}} (z - q_n) p(z) dz = 0 \quad \text{für } n=0 \dots N-1$$

Optimale Quantisierung (2)

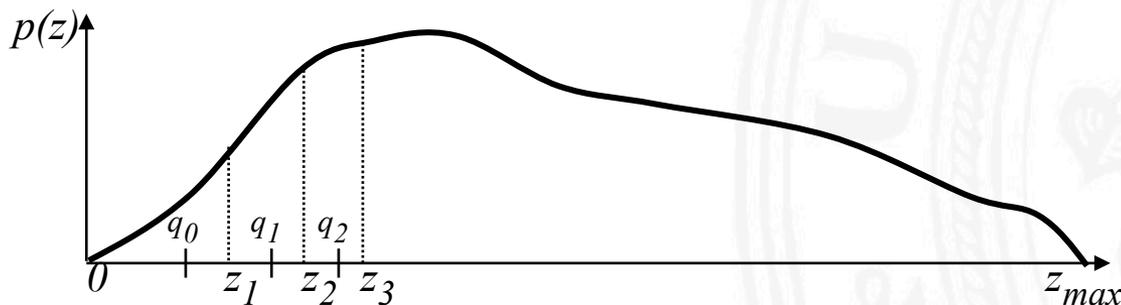
Lösung für optimale Intervallgrenzen:

$$z_n = \frac{1}{2}(q_{n-1} + q_n) \quad \text{für } n=1 \dots N-1 \text{ wenn } p(z_n) > 0$$

Jede Intervallgrenze muss genau in der Mitte zwischen benachbarten Quantisierungswerten liegen.

$$q_n = \frac{\int_{z_n}^{z_{n+1}} zp(z) dz}{\int_{z_n}^{z_{n+1}} p(z) dz} \quad \text{für } n=0 \dots N-1$$

Jeder Quantisierungswert liegt auf der Schwerpunktskoordinate der korrespondierenden Fläche der Grauwertverteilung.



Optimale Quantisierung kann durch einen iterativen Algorithmus bestimmt werden, der mit arbiträrem z_1 beginnt.

Binarisierung

Bei vielen Anwendungen ist es nützlich, nur zwischen zwei diskreten Grauwerten zu unterscheiden, "schwarz" and "weiß", oder "1" und "0", "Objekt" und "Hintergrund".

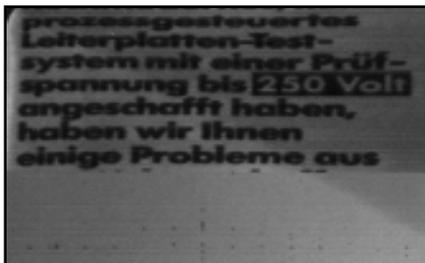
Beispiel: Objekt von Hintergrund trennen ("segmentieren")

Binarisieren = Bild in Binärbild transformieren

Binarisieren kann bei kontinuierlichem oder höher aufgelöstem Grautonbild erfolgen, auch bei verarbeiteten Bildern, z.B. Gradientenbetragsbildern.

Schwellenwertvergleich:
$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } g(x, y) < T \\ 1 & \text{für } g(x, y) \geq T \end{cases}$$
 T ist Schwellenwert

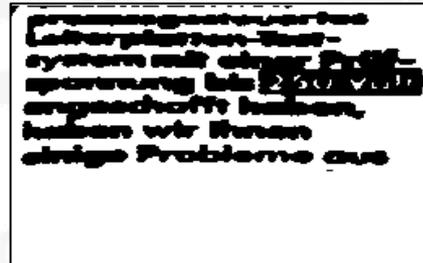
Grauwerte 0 – 255



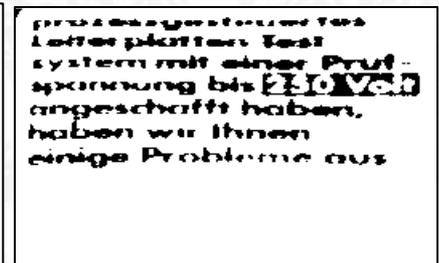
Schwellenwert 64



Schwellenwert 32



Schwellenwert 16



Schwellenwertbestimmung durch Probieren

Ein Schwellenwert, der Objekt und Hintergrund perfekt trennt, existiert nicht immer.

Auswahl durch Probieren:

Wähle Schwellenwert, bis eine Bildeigenschaft erfüllt ist, z.B.

- Verhältnis von schwarzen zu weißen Pixeln $q = \frac{\# \text{ wei\ss e Pixel}}{\# \text{ schwarze Pixel}} \Rightarrow q_0$
- Linienbreite $\text{Linienbreite} \Rightarrow d_0$
- Zahl der zusammenhängenden Komponenten $\text{Komponentenzahl} \Rightarrow n_0$

Bei logarithmischer Suche kann die Zahl der Probeversuche klein gehalten werden.

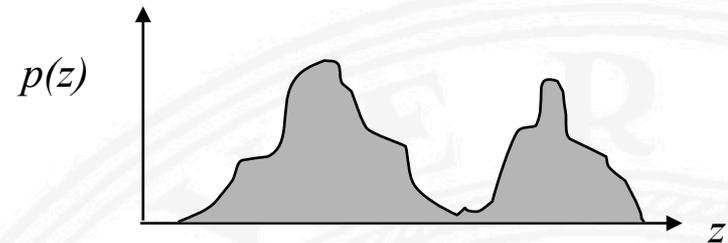
Beispiel:

Um einen Schwellenwert $0 \leq T \leq 255$ auszusuchen, braucht man höchstens 8 Versuche zur Bestimmung der besten Annäherung an q_0 .

Schwellenwertbestimmung aufgrund der Grauwertverteilung

Eine Grauwertverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte oder Histogramm) kann bimodal sein:

Was ist ein plausibler Schwellenwert?



Zwei übliche Methoden zur Bestimmung eines plausiblen Schwellenwertes:

1. Suche das „Tal“ zwischen zwei „Hügeln“
2. Passe Hügelsschablonen an und bestimme (deren) Schnittpunkt.

