



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

MIN-Fakultät
Fachbereich Informatik
Arbeitsbereich SAV/BV (KOGS)

Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

Teil 1: Grundlagen der Signalverarbeitung

Vorlesung 4: Diskrete Signalverarbeitung

Benjamin Seppke

Jianwei Zhang

Diskrete Signalverarbeitung und diskrete Systeme

Computer-basierte Verarbeitung von Signalen und Realisierung von Systemverhalten erfordern diskrete Signale und diskrete Systembeschreibungen.

Wegen der ausgereiften Theorie für analoge Signale und Systeme finden Systementwicklungen dennoch vorwiegend im Analogen statt.

Auch gibt es für die meisten grundlegenden analogen Zusammenhänge genau entsprechende diskrete Zusammenhänge.

Allerdings gibt es auch zahlreiche diskrete Verfahren zur Signalverarbeitung, die heuristisch, ohne fundierte Theorie, angewendet werden.

Beispiel:

Glättungsoperator $\hat{g}_{ij} = \frac{1}{\sum w_k} \sum_{g_k \in D} w_k g_k$ mit Gewichten

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Diskrete Faltung

Kontinuierliche Signalübertragung: $g(t) = h(t) * s(t)$

Alle Signale mit Abtastwerten beschrieben:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT) \right] * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT) \right] * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT) \right] * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Daraus folgt für die Abtastwerte (nach einigen Schritten) für $T=1$ und unter der Voraussetzung **bandbegrenzter** Signale :

"Diskrete Faltung"

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)s(m)$$

Schreibweise dafür auch: $g(n) = h(n) * s(n)$

Für kausale Systeme ist die Impulsantwort = 0 für $t < 0$. Dann gilt:

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^n h(n-m)s(m)$$

Die diskrete Faltung ist die Grundlage für die computerbasierte Berechnung von Systemverhalten!

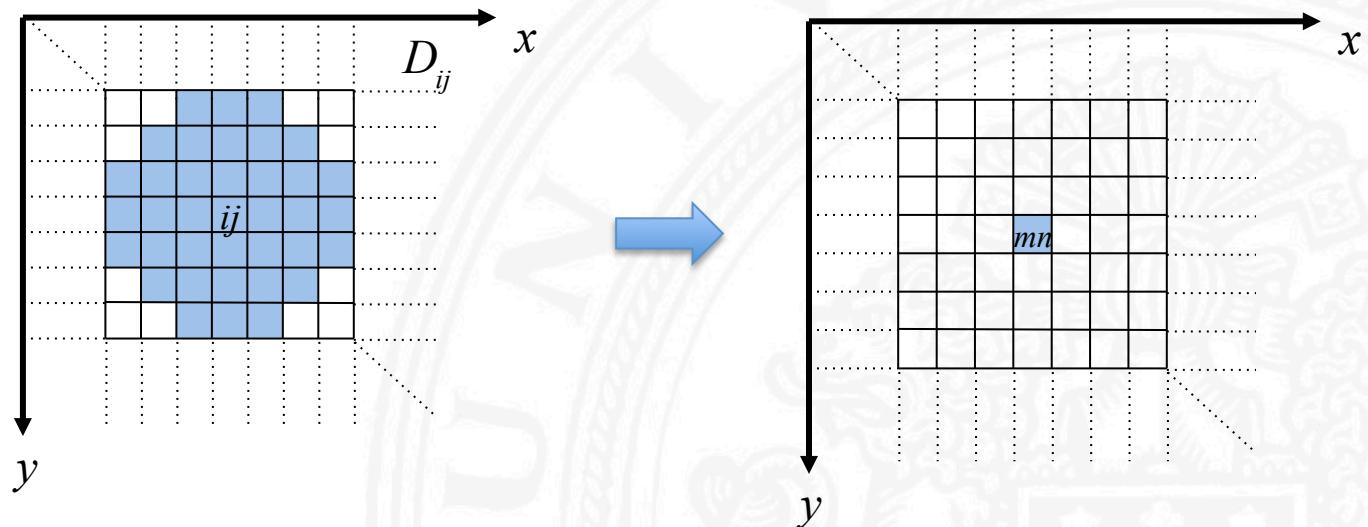
Lokale Operatoren

Bildverarbeitung realisiert Faltung häufig mit "lokalen Operatoren".

Erzeuge ein neues Bild \hat{g}_{mn} , indem ein linearer, lokaler Operator f auf alle Pixel eines Bildes angewandt wird:

$$\hat{g}_{mn} = f(g_1, g_2, \dots, g_K) \quad g_1, g_2, \dots, g_K \in D_{ij}$$

Beispiel für Stützfläche eines lokalen Operators



Die Pixelindizes i, j können in von 1 abweichenden Schritten inkrementiert werden. Unter welchen Voraussetzungen ist diese Operation eine Faltung?

Beispiel: Kontrastverschärfung



Bildintensitäten werden durch lokalen Operator mit 3x3 Stützfläche an Kanten verstärkt:

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1



"Unscharfes Maskieren"
Subtraktion eines unscharfen Bildes

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{1}{|D|} \sum_{g_{mn} \in D} g_{mn}$$

Diese Technik wurde früher häufig durch analoge Schaltkreise realisiert.

Behandlung von Störungen ("Rauschen")

Abweichungen von einem idealen Bildsignal werden häufig mit additivem Rauschen modelliert:



Typische Eigenschaften:

- Mittelwert 0, Varianz $\sigma^2 > 0$
- örtlich unkorreliert: $E[r_{ij}, r_{mn}] = 0$ für $ij \neq mn$
- zeitlich unkorreliert: $E[r_{ij,t_1}, r_{mn,t_2}] = 0$ für $t_1 \neq t_2$
- Gauß-Wahrscheinlichkeitsdichte: $p(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

$E[x]$ bezeichnet den
"Erwartungswert" von x

Rauschen entsteht durch einzelne Ladungsträger ("Schrotrauschen"), elektromagnetische Einkopplung, thermische Molekularbewegungen und andere Phänomene.

Neben additivem Rauschen gibt es mehrere andere Rauschmodelle.

Glättung durch Mittelung

Prinzip: $\hat{r}_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k \Rightarrow 0$ Probenmittelwert nähert sich Mittelwert der Verteilung an

Zwei grundsätzliche Wege zum "Ausmitteln" von Rauschen:

- **zeitliches Mitteln**, falls mehrere Proben $g_{ij,t}$ desselben Pixels zu verschiedenen Zeitpunkten $t = 1 \dots T$ zur Verfügung stehen
- **örtliches Mitteln**, falls $g_{mn} \approx g_{ij}$ für alle Pixel g_{mn} in einem Bereich um g_{ij}

Wie effektiv ist das Mitteln von Grauwerten?

$\hat{r}_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k$ ist Zufallsvariable, Varianz hängt von K ab

$$E[\hat{r}_K] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[r_k] = 0 \quad \text{Mittelwert}$$

$$E[(\hat{r}_K - E[\hat{r}_K])^2] = E[\hat{r}_K^2] = E\left[\frac{1}{K^2} \left(\sum_{k=1}^K r_k\right)^2\right] = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K E[r_k^2] = \frac{\sigma^2}{K} \quad \text{Varianz}$$

Beispiel: Um die Standardabweichung zu halbieren, müssen 4 Werte gemittelt werden!

Einfache Glättungsoperationen

1. Mittelung

$$\hat{g}_{ij} = \frac{1}{|D|} \sum_{g_{mn} \in D} g_{mn} \quad D \text{ ist Region um } g_{ij}$$

Beispiel einer 3x3 Region D

	ij	

2. Beseitigung von Ausreißern

$$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|D|} \sum_{g_{mn} \in D} g_{mn} & \text{wenn } \left| g_{ij} - \frac{1}{|D|} \sum_{g_{mn} \in D} g_{mn} \right| \geq S \\ g_{ij} & \text{sonst.} \end{cases} \quad S \text{ ist Schwellenwert}$$

3. Gewichtetes Mitteln

$$\hat{g}_{ij} = \frac{1}{\sum w_k} \sum_{g_k \in D} w_k g_k \quad w_k = \text{Gewichte in } D$$

Beispiel von Gewichten in 3 x 3 Region D

1	2	1
2	3	2
1	2	1



All dies sind heuristische Operationen ohne die theoretischen Fundamente von INF-N2!

Zweidimensionale Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Anwendung auf Bilder

Diskrete Fourier-Transformation:

$$G_{uv} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} e^{-2\pi j \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

für $u = 0, \dots, M-1$ und $v = 0, \dots, N-1$

Inverse Diskrete Fourier-Transformation:

$$g_{mn} = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} G_{uv} e^{2\pi j \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

für $m = 0, \dots, M-1$ und $n = 0, \dots, N-1$

Notation:

$$G_{uv} = F \{ g_{mn} \}$$

$$g_{mn} = F^{-1} \{ G_{uv} \}$$

Die Transformation basiert auf der Periodizitätsannahme:

Aber: Die periodische Fortsetzung kann Randeffekte bewirken!

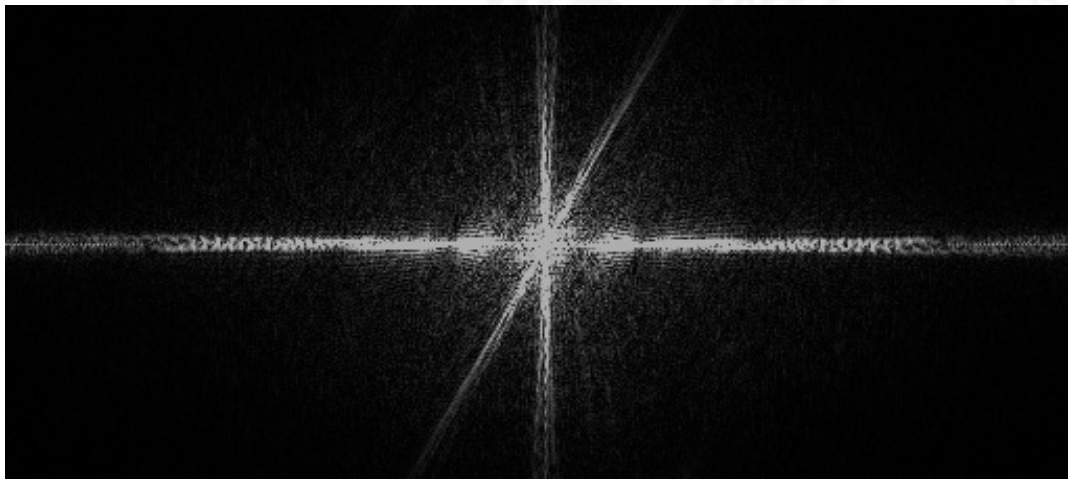


Beispiele von Amplitudenspektren (1)

Bild:



(log)-
Betrags-
spektrum:

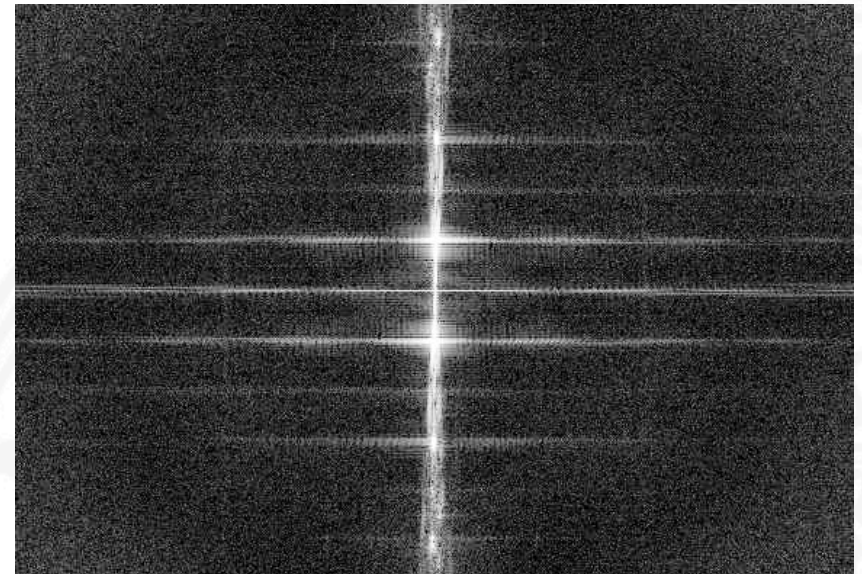


Beispiele von Amplitudenspektren (2)

Bild



(log)-Betragsspektrum



Schnelle Fourier-Transformation

Normale DFT braucht $\sim (MN)^2$ Operationen für ein $M \times N$ großes Bild.

Beispiel: $M = N = 1024$, 10^{-12} s/Operation $\rightarrow 1,1$ s.


Die **FFT (Fast Fourier Transform)** basiert auf einer rekursiven Dekomposition von g_{mn} in Subsequenzen, wobei partielle Resultate mehrfach verwendet werden:
 $\rightarrow \sim MN \log_2(MN)$ Operationen.

Das obige Beispiel benötigt mit der FFT nur 0.000021 Sekunden Rechenzeit.

Dekompositionsprinzip für die 1D-DFT (nach Cooley & Tukey, 1965):

$$G_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-2\pi j r \frac{n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ g_n^{(1)} e^{-2\pi j r \frac{2n}{N}} + g_n^{(2)} e^{-2\pi j r \frac{(2n+1)}{N}} \right\} \quad r = 0, \dots, N-1$$



$$G_r = G_r^{(1)} + e^{-2\pi j \frac{r}{N}} G_r^{(2)} \quad r = 0, \dots, N/2-1$$

$$G_{r+N/2} = G_r^{(1)} - e^{-2\pi j \frac{r}{N}} G_r^{(2)}$$

Alle G_r können in $2(N/2)^2$ anstelle von $(N)^2$ Operationen berechnet werden!

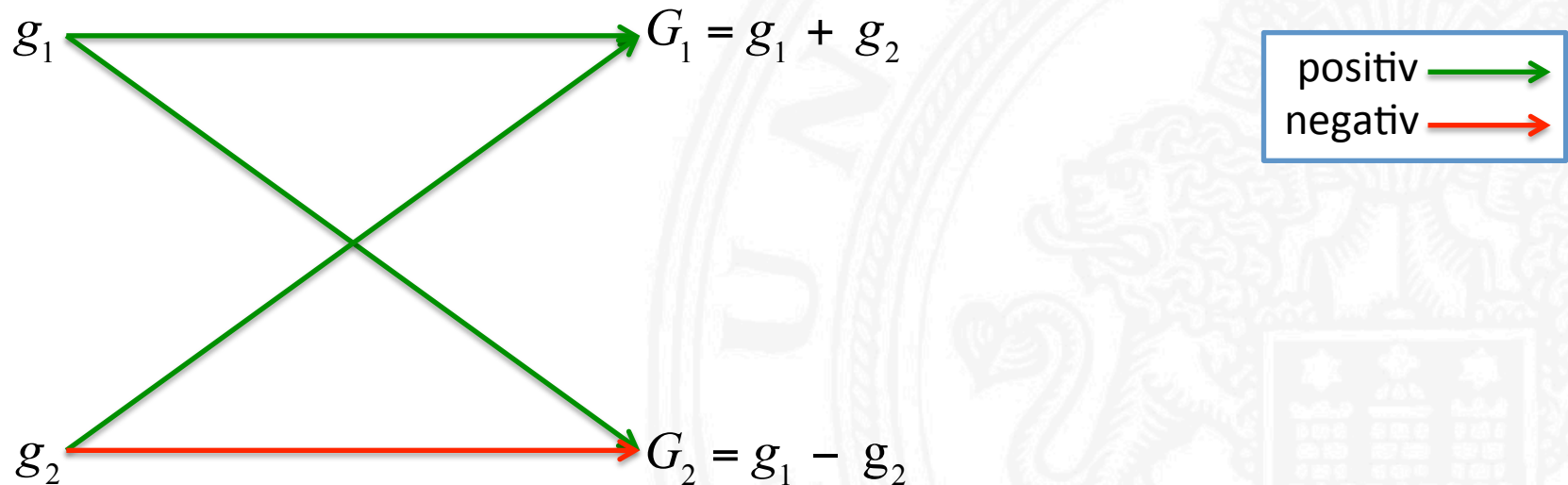
Cooley & Tukey Dekomposition (1)

Beispiel mit zwei Werten (N=2)

$$G_1 = g_1 + e^{-2\pi j} g_2 = g_1 + g_2$$

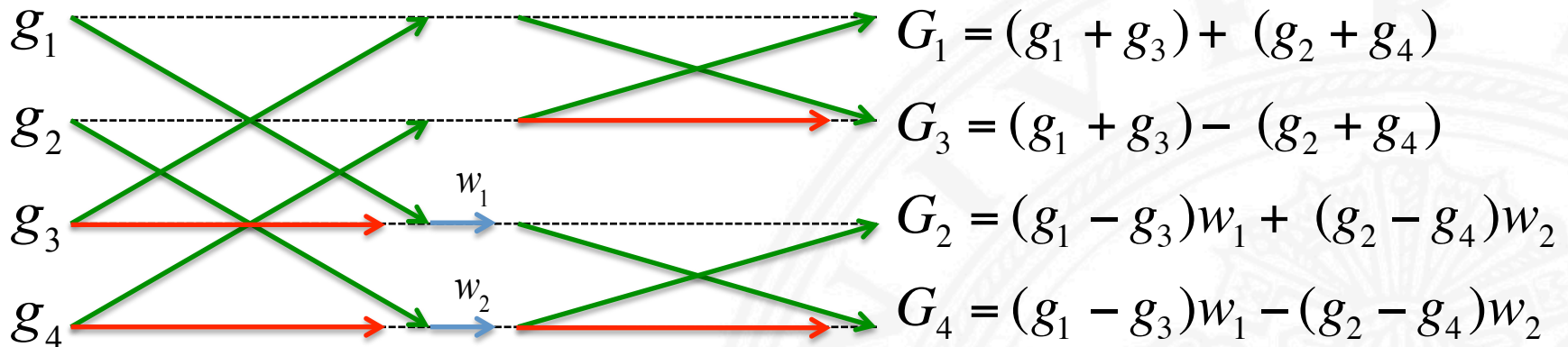
$$G_2 = g_1 - e^{-2\pi j} g_2 = g_1 - g_2$$

Grafische Darstellung:



Cooley & Tukey Dekomposition (2)

Beispiel mit vier Werten (N=4)



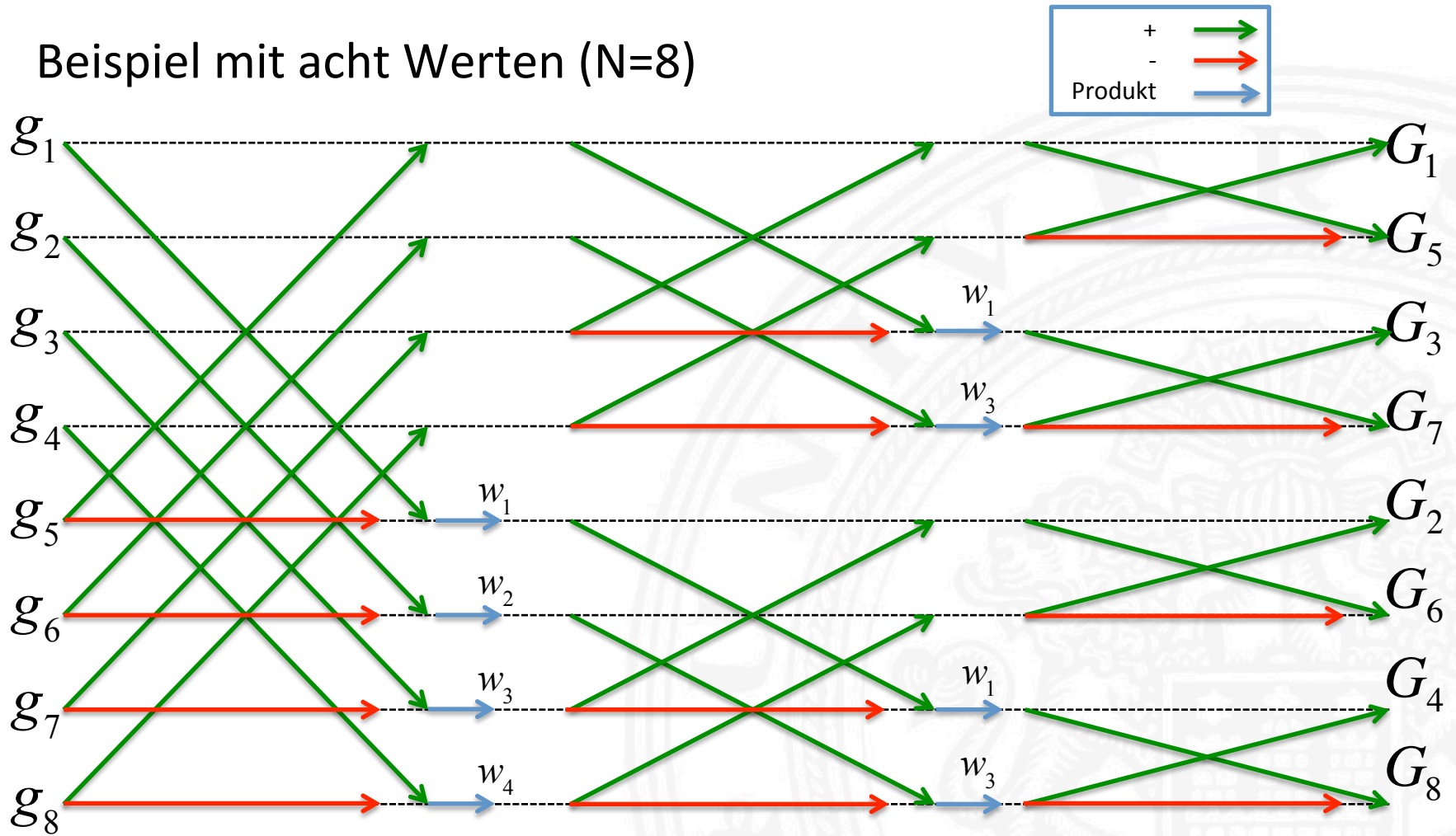
Mit Gewichtskoeffizienten:

$$w_1 = e^{-2\pi j \frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}\pi j}$$

$$w_2 = e^{-2\pi j \frac{3}{4}} = e^{-\frac{3}{2}\pi j}$$

Cooley & Tukey Dekomposition (3)

Beispiel mit acht Werten (N=8)

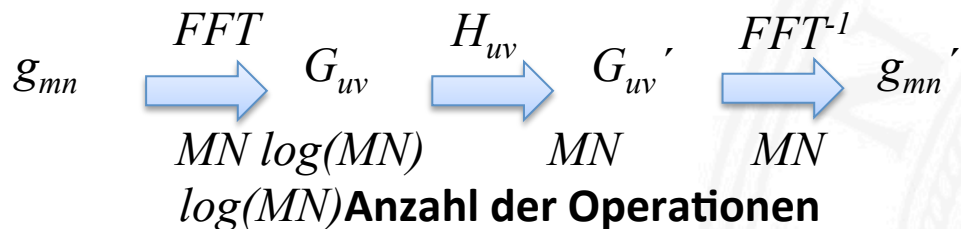


Diskrete Faltung mithilfe der FFT

Faltung kann durch Transformation in den Frequenzraum mit der FFT insgesamt effizienter ausgeführt werden!

$$g'_{ij} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} h_{i-m, j-n} \quad (MN)^2 \text{ Operationen erforderlich}$$

Anwendung der FFT und Filtern im Frequenzraum:



Beispiel mit $M = N = 512$:

- normale Faltung braucht $\sim 10^{10}$ Operationen
- Faltung mithilfe der FFT braucht $\sim 10^7$ Operationen

Diskrete Faltung bei maskierten Bildsignalen

Szenario: Nur für eine Teildomäne von D liegen valide Intensitätswerte vor

- Beispiele:
 - Wolken-Verdeckung in Satellitenbildern,
 - Segmentierte Bereiche
 - Sensorfehler
- Problem: Randbereiche des Faltungskerns (vgl. Titmarsh 1926)
- Diskrete Faltung kann in diesen zu unerwünschten Effekten führen:
 1. Auslassen der Randbereiche
 - Sehr viel kleinerer Ergebnis-Wertebereich!
 2. Null-Setzen der Randbereiche und Faltung
 - Einführung fehlerhafter Werte!
- Durch iterative Algorithmen auch globale Fehlerfortpflanzung möglich!

Gesucht: Ein Verfahren, welches die „maskierten“ Pixel als „keine Information“ behandelt, und nicht als „keine Intensität“!

Normalisierte Faltung (1)

Vorschlag von Knutsson und Westin (1993):

$$I' = K * I \quad \longrightarrow \quad I' = K *_{M,A} I = \begin{cases} \frac{A \cdot K * (I \cdot M)}{A \cdot K * M} & \text{falls } A \cdot K * M \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei sind:

- K Faltungskern
- I Bild
- A Anwendbarkeitskern
- M Bildmaske

Beispiel:

$$I = \{250, 225, 200, 175, 150, 125, 100, 75, 50, 25, 0\}$$

$$M = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$K = \{1, 2, 4, 8, 4, 2, 1\} / 22$$

$$A = 1$$



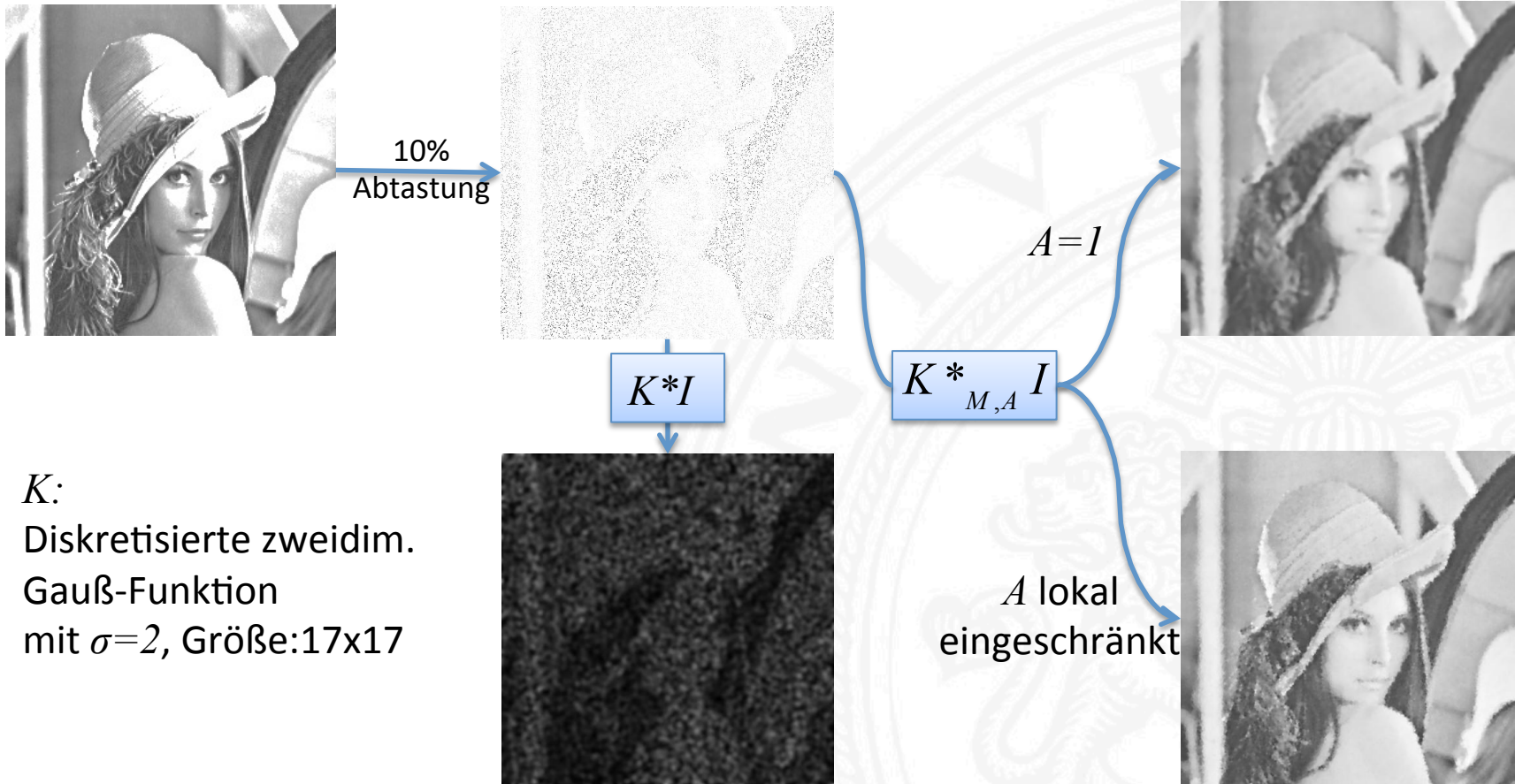
$$K * I = \{ , , , 175, 150, 125, 100, 75 , , , \}$$

$$K * (I \cdot M) = \{ , , , 159.09, 114.77, 52.27, 21.59, 6.82 , , , \}$$

$$K *_{M,A} I = \{ , , , 184.21, 168.33, 164.29, 158.33, 150 , , , \}$$

Normalisierte Faltung (2)

Beispiel von Knutsson und Westin



K :
 Diskretisierte zweidim.
 Gauß-Funktion
 mit $\sigma=2$, Größe: 17×17

Normalisierte Faltung (3)

Fazit: Normalisierte Faltung

- vereinigt Maske mit Faltung,
- lässt sich (immer noch) durch FFT beschleunigen
- ermöglicht auch Berechnung von Werten „unter“ der Maskierung, falls mindestens Pixel innerhalb der aktuellen Faltungsumgebung liegt
→ eignet sich daher auch zur Rekonstruktion
- kann verwendet werden, um bestehende Verfahren auf Masken zu erweitern.



**Einschränkung auf bestimmte Faltungskerne!
Differenzielle Faltungskerne erfordern eine besondere
(normalisierte differentielle) Faltung!**