Die Fourier-Transformierte der Heaviside-Funktion

Benjamin Seppke

23. April 2014

1 Einführung

Die folgende Herleitung der Fourier-Transformierten der Heaviside-Funktion $\epsilon(t)$, $\mathcal{F}\{\epsilon(t)\}$, orientiert sich an dem Bericht von Burrows und Colwell, 1990 [1]. Hierbei wird zunächst ein Weg über die Verwendung der Signum-Funktion $sign(t)$ aufgezeigt, der sich auch in vielen Lehrbüchern findet. Anschließend wird ein alternativer Beweis vorgestellt, den o.g. Autoren auf Basis der verallgemeinerten Funktionentheorie beschrieben haben. Gegenüber dem Originalartikel wir die Notation der Vorlesung "Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik" für Nanowissenschaftler (Studiengang der Universität Hamburg) verwendet.

Bei beiden Beweisen ist zu beachten, dass es sich bei der Heaviside-Funktion nicht im eine Funktion im eigentlichen Sinne handelt. Vielmehr ist sie eine verallgemeinerte Funktion im Sinne der Distributionstheorie. Daher mag es sein, dass manche Umformungen etwas befremdlich erscheinen.

Auf eine detaillierte Analyse der einzelnen Bestandteile wird in dieser Beschreibung verzichtet. Sie kann in Abschnitt 2 der Originalarbeit sowie in dessen Anhang nachgelesen werden.

2 Üblicher Beweis zur Bestimmung von $\mathcal{F}\{\epsilon(t)\}$

Um die Probleme bei einem kompletten Beweis zu umgehen, verwenden viele Beweise Hilfskonstrukte und Hilfsfunktionen sowie verschiedene Theoreme der Fourier-Transformation, wie zum Beispiel das Diifferentiationstheorem und die beidseitige Transformation in den Fourier-Raum.

Wir beginnen zunächst mit einer präzisen Definition der Signum-Funktion, die der Heaviside-Funktion sehr ähnlich ist:

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen $sign(t)$ und $\epsilon(t)$ besteht durch Streckung und Verschiebung im Wertebereich:

$$sign(t) = 2\epsilon(t) - 1$$

Weiterhin gilt für die Ableitung der Signum-Funktion:

$$\frac{d}{dt}\left(sign(t)\right) = 2\delta(t)$$

Durch Anwenden der Fourier-Transformation auf beiden Seiten erhält man (nach Ausklammern des konstanten Faktors 2):

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\left(sign(t)\right)\right\} = 2\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\}$$

Mit dem Differentiationstheorem erhält man:

$$j\omega\mathcal{F}\left\{sign(t)\right\} = 2$$

Für Distributionen ist die Existenz einer Inversen nicht unbedingt gegeben und müsste vielmehr zunächst bewiesen werden. Falls für die Signum-Distribution eine Division durch $j\omega$ aber möglich ist, ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{sign(t)\right\} = \frac{2}{j\omega}$$

Mit den vorigen Zusammenhängen zwischen Signum- und Heaviside-Funktion folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sign(t) \\ \mathcal{F}\{\epsilon(t)\} &= \mathcal{F}\{\frac{1}{2}\} + \mathcal{F}\{\frac{1}{2}sign(t)\} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

Wenn man sich diese Herleitung etwas genauer anschaut, fällt auf, dass es vielleicht noch einen direkteren Weg geben könnte, um den Beweis zu führen. Allerdings führt dieser Beweis zu einer Fragestellung, die sich für den Wert von $\mathcal{F}\{\epsilon(t)\}$ ergibt.

3 Direkter Beweis zur Bestimmung von $\mathcal{F}\{\epsilon(t)\}$

Für den direkten Beweisweg fangen wir also mit direkt mit der Ableitung der Heaviside-Funktion an:

$$\frac{d}{dt}\left(\epsilon(t)\right) = \delta(t)$$

so ergibt sich für die Fourier-Transformierte:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} \\ j\omega\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} &= 1 \\ \mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} &= \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

Und dies stellt einen Konflikt zu dem vorigen Beweisweg dar! Der Widerspruch kann jedoch ausgelöst werden, wenn man ausnutzt, dass:

$$j\omega\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = 1 + j\pi\omega\delta(\omega)$$

Somit folgt anstatt des obigen Widerspruchs:

$$\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Leider dann anstatt der oberen Erweiterung auch mit einem weiteren ω erweitert werden, sodass zum Beispiel folgendes gilt:

$$j\omega\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = 1 + j\pi\omega^2\delta(\omega)$$

Somit folgt ein erneuter Widerspruch durch diese Beweisrichtung:

$$\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = \pi\omega\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Insgesamt lässt sich anhand dieser Beispiele erkennen, dass diese Beweisrichtung nicht in der Lage ist, einen eindeutigen Ergebniswert für $\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\}$ zu bestimmen. Daher muss das eindeutige Ergebnis aus dem klassischen Beweisweg herangezogen werden.

4 Interpretation des resultierenden Spektrums

Das Resultat der Fourier-Transformation der Heaviside-Funktion ist offensichtlich wieder eine Distribution, da sie zur Definition eine (skalierte) Delta-Distribution benötigt:

$$\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Burrows et. al werfen nun die Frage auf, ob es sich bei dieser Funktion um eine (zusammenhänge) Distribution handelt, oder ob man das Spektrum vielmehr auch wie folgt ausdrücken kann:

$$\mathcal{F}\left\{\epsilon(t)\right\} = \begin{cases} \pi\delta(\omega) & \omega = 0 \\ \frac{1}{j\omega} & \omega \neq 0 \end{cases} \qquad ?$$

Diese Frage wird durch die Autoren, genauso wie ein (verhältnismäßig) einfach verständlicher Weg eines kompletten Beweises im eingangs genannten Artikel gegeben. Generell treten derartige Unstimmigkeiten im Beweis von Spektren von Distributionen immer dann auf, wenn man mit ihnen so rechnet, wie man es von normalen Funktionen her gewohnt ist.

Literatur

[1] B.L. Burrows and D.J. Colwell. The fourier transform of the unit step function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(4):629–635, 1990.