Perspektivische Abbildung von Szenengeraden

Benjamin Seppke

21. Mai 2014

1 Aufgabenstellung

Es soll gezeigt werden, dass durch die perspektivische Abbildung eine 3D-Szenengerade in eine 2D-Gerade abgebildet wird.

2 Beweis

Eine 3D-Gerade in Parameterdarstellung ist gegeben als:

$$\vec{g}(a) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Die perspektivische Abbildung eines Punktes $\vec{p}$, $\vec{p}\,'$ mit der Brennweite f ist gegeben durch:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{p}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xf}{z} \\ \frac{yf}{z} \\ f \end{pmatrix}$$

Für eine projizierte Gerade erhält man also folglich:

$$\vec{g}\,'(a) = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y(a) \\ f \end{pmatrix}$$

mit:

$$\vec{x}\,'(a) = \frac{(xa+u)f}{za+w}$$

$$\vec{y}\,'(a) = \frac{(ya+v)f}{za+w}$$

Falls diese Abbildung einer zweidimensionalen Geradengleichung entspricht, muss sich diese ausdrücken lassen als:

$$y = mx + b$$

Insbesondere mit parameterlosen Faktoren für Steigung und y-Achsenabschnitt:

$$y'(a) = mx'(a) + b$$

Berechnen wir also zunächst die Steigung m mithilfe des Steigungsdreiecks:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y(a_1) - y(a_2)}{x(a_1) - x(a_2)} \\ &= \frac{\frac{(ya_1+v)f}{za_1+w} - \frac{(ya_2+v)f}{za_2+w}}{\frac{(xa_1+u)f}{za_1+w} - \frac{(xa_2+u)f}{za_2+w}} \end{aligned}$$

Betrachten wir der Einfachheit halber nur den Zählen des Ausdrucks, so lassen sich folgende Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned} y(a_1) - y(a_2) &= \frac{(ya_1 + v)f}{za_1 + w} - \frac{(ya_2 + v)f}{za_2 + w} \\ &= (ya_1 + v)f(za_2 + w) - (ya_2 + v)f(za_1 + w) \\ &= f((ya_1za_2 + ya_1w + vza_2 + vw) \\ &\quad - (ya_2za_1 + ya_2w + vza_1 + vw)) \\ &= f(ya_1w + vza_2 - ya_2w - vza_1) \\ &= f(yw(a_1 - a_2) - vz(a_1 - a_2)) \\ &= (yw - vz)f(a_1 - a_2) \end{aligned}$$

Analog können wir auch den Nenner betrachten und erhalten nach denselben Umformungsschritten:

$$\begin{aligned} x(a_1) - x(a_2) &= \frac{(xa_1 + u)f}{za_1 + w} - \frac{(xa_2 + u)f}{za_2 + w} \\ &= (xw - uz)f(a_1 - a_2) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y(a_1) - y(a_2)}{x(a_1) - x(a_2)} \\ &= \frac{(yw - vz)f(a_1 - a_2)}{(xw - uz)f(a_1 - a_2)} \\ &= \frac{yw - vz}{xw - uz} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir einen vom Parameter a freien Wert für die Steigung der 2D-Bildgerade. Nun muss lediglich geprüft werden, ob auch ein parameterfreier y-Achsenabschnitt vorliegt. Dazu benutzen wir die 2D Geradengleichung und formen sie um zu:

$$b = y'(a) - mx'(a)$$

Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(ya+v)f}{za+w} - \frac{yw-vz}{xw-uz}\frac{(xa+u)f}{za+w} \\
&= \frac{(ya+v)f(xw-uz) - (yw-vz)(xa+u)f}{(xw-uz)(za+w)} \\
&= f\frac{(yaxw - yauz + vxw - vuz) - (ywxa + ywu - vzxa - vzu)}{(xw-uz)(za+w)} \\
&= f\frac{-yauz + vxw - ywu + vzxa}{(xw-uz)(za+w)} \\
&= f\frac{(vx-yu)za + (vx-yu)w}{(xw-uz)(za+w)} \\
&= f\frac{(vx-yu)(za+w}{(xw-uz)(za+w)} \\
&= f\frac{(vx-yu)}{(xw-uz)}
\end{aligned}$$

Und somit erhalten wir als vollständige zweidimensionale Geradengleichung, da sowohl m als auch b parameterlos sind.