



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

MIN-Fakultät  
Fachbereich Informatik  
Arbeitsbereich SAV/BV (KOGS)

# Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

## Teil 1: Grundlagen der Signalverarbeitung

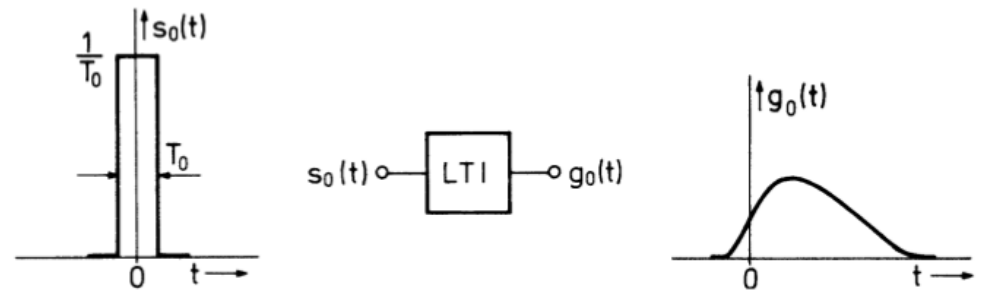
### Vorlesung 2: Faltung und Fourier-Transformation

H. Siegfried Stiehl

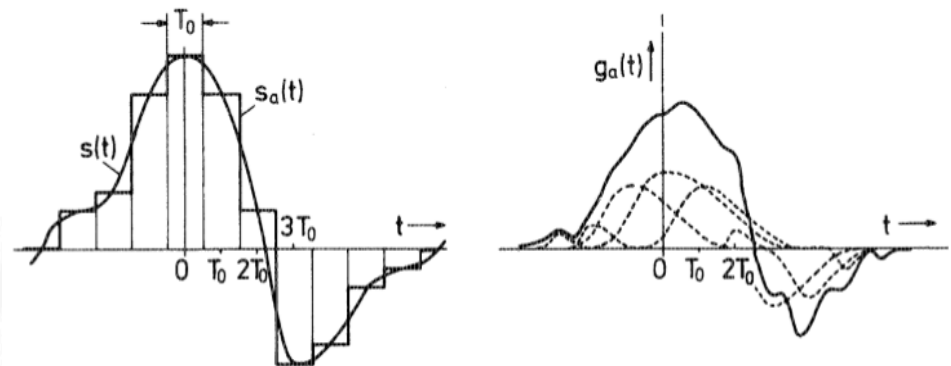
Jianwei Zhang

# Systembeschreibung mit Elementarfunktionen

Rechteckimpuls mit Breite  $1/T_0$  und Höhe  $T_0$  ergibt Systemantwort  $g_0(t)$ :



Beliebiges Eingangssignal  $s(t)$  kann durch Rechteckimpulse angenähert werden und ergibt Superposition einzelner Systemantworten:



Approximierte Eingangsfunktion:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) s_0(t - nT_0) T_0 \approx s(t)$$

Approximierte Ausgangsfunktion:

$$g_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) g_0(t - nT_0) T_0 \approx g(t)$$

# Faltungsintegral

Grenzübergang  $T_0 \rightarrow 0$ :

$s_0(t) \rightarrow \delta(t)$  Dirac-Impuls mit  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$g_0(t) \rightarrow h(t)$  Impulsantwort, Stoßantwort, Gewichtsfunktion

Eingangssignal als unendliche Reihe von Dirac-Impulsen

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

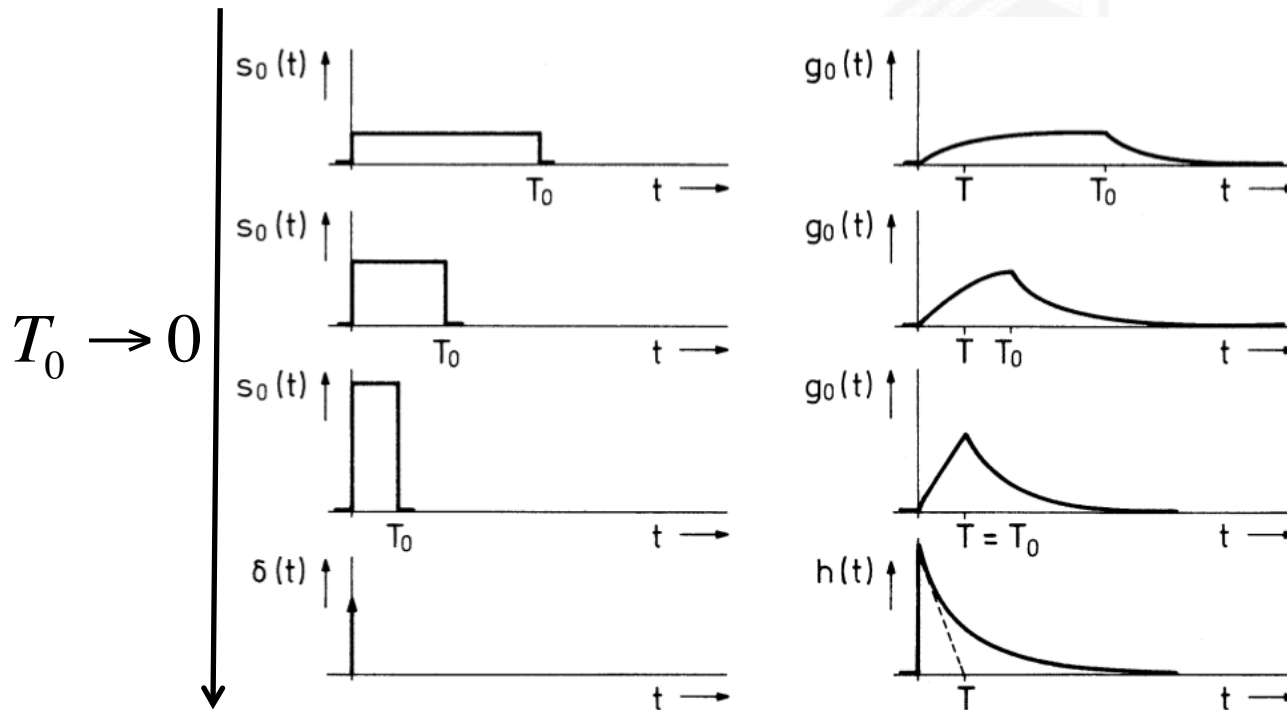
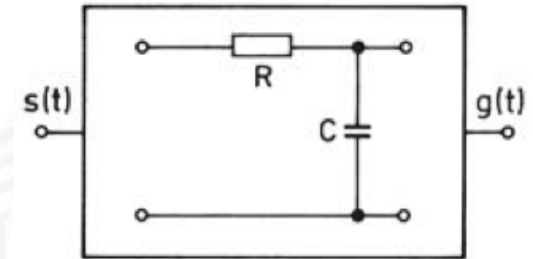
Ausgangssignal als Faltung der Impulsantwort des Systems mit dem Eingangssignal

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Die Transformation eines Signals durch ein System kann durch die Faltung (engl.: convolution) des Eingabesignals mit der Impulsantwort des Systems beschrieben werden.

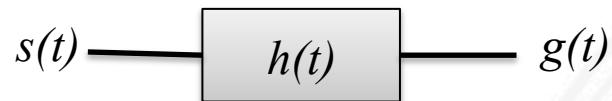
# Grenzübergang für RC-Glied

- Wie antwortet ein RC-Glied auf einen Rechteckimpuls (Spannung) mit Breite  $1/T_0$  und Höhe  $T_0$ , wenn  $T_0 \rightarrow 0$ ?



# Impulsantwort als Systembeschreibung

- Systemantwort  $h(t)$  bei Eingabe von  $\delta(t)$  heißt "Impulsantwort" (oder auch "Gewichtsfunktion")
- $h(t)$  charakterisiert das Verhalten des Bauelementes:



- Zusammen mit der Faltungsoperation lässt sich für jedes Eingangssignal die Systemausgabe bestimmen:

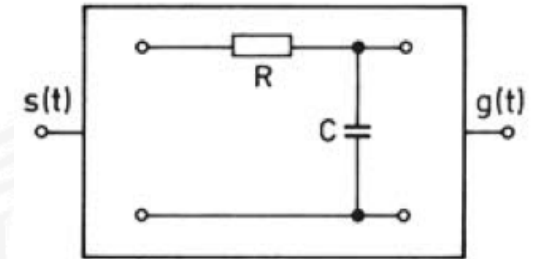
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

- Symbolische Schreibweise

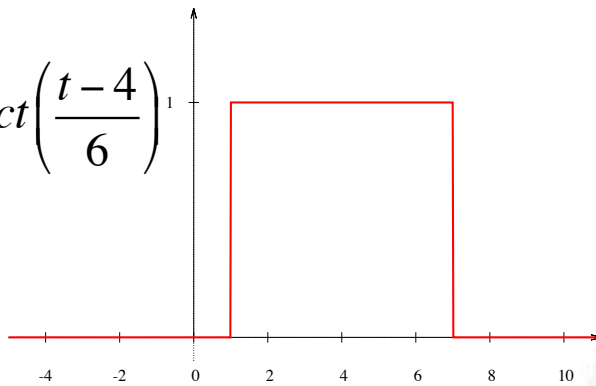
$$g(t) = s(t) * h(t) \quad \text{oder} \quad g(t) = s(t) \otimes h(t)$$

# Veranschaulichung der Faltung (I)

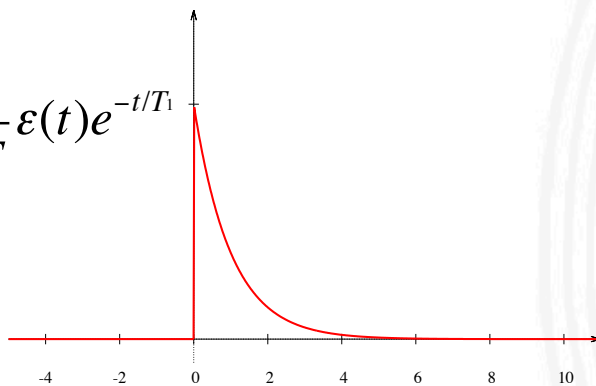
Faltung eines Rechteckimpulses  $s(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$  des RC-Gliedes (mit  $T = RC = 1$ ):



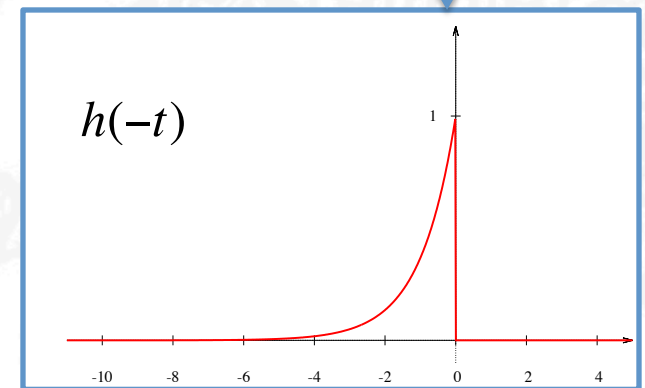
$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-4}{6}\right)$$



$$h(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T}$$

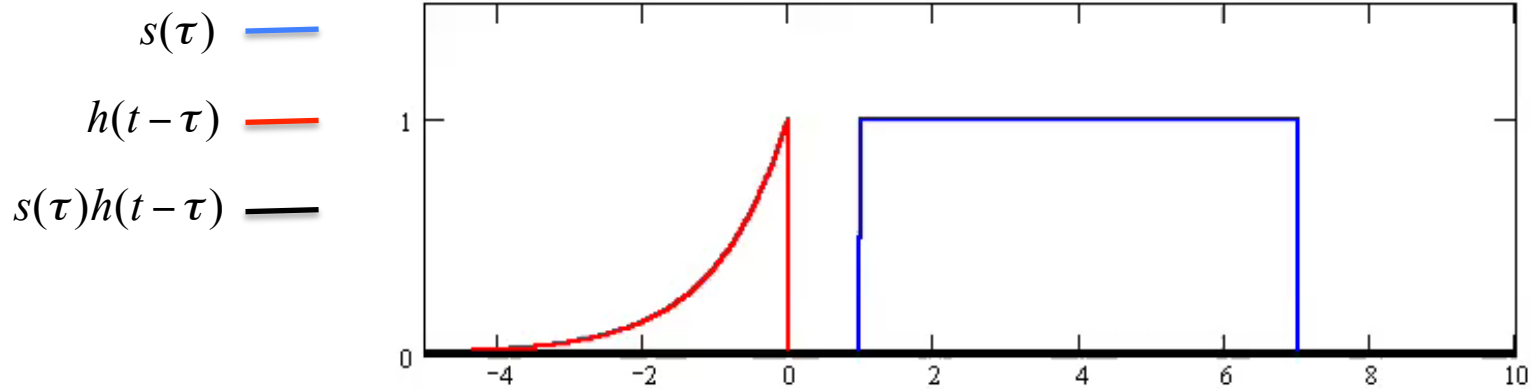


$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



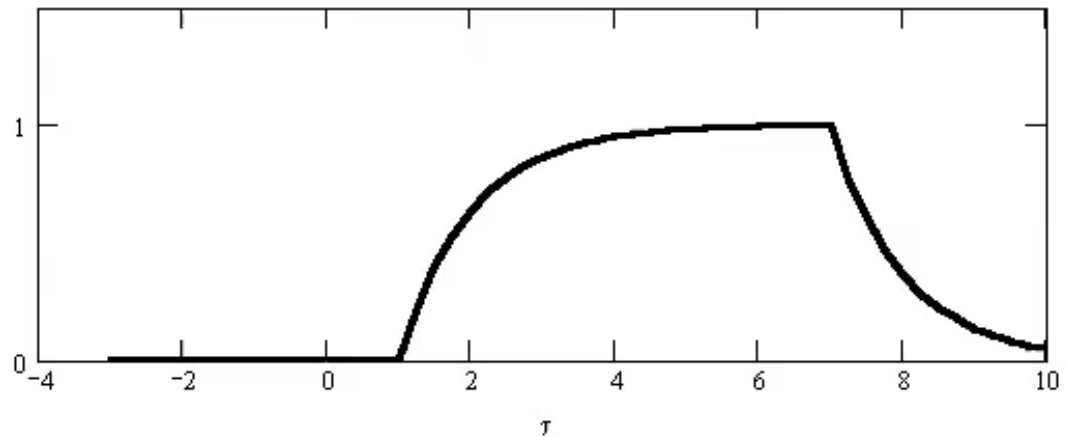
# Veranschaulichung der Faltung (II)

Komponenten des Faltungsintegrals



Systemantwort

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Quelle: <http://www2.ensc.sfu.ca/people/faculty/cavers/ENSC380/conv.html>

# Faltungsalgebra

- $\delta(t)$  ist Einselement:

$$s(t) = s(t) * \delta(t)$$

- Faltung ist kommutativ:

$$s(t) * h(t) = h(t) * s(t)$$

- Faltung ist assoziativ:

$$[f(t) * s(t)] * h(t) = f(t) * [s(t) * h(t)]$$

- Faltung ist distributiv:

$$f(t) * [s(t) + h(t)] = [f(t) * s(t)] + [f(t) * h(t)]$$

- Ableitung:

$$\frac{d}{dt}(f(t) * h(t)) = \frac{df}{dt} * h(t) = f(t) * \frac{dh}{dt}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

"Siebeigenschaft"

Ein System mit der Gewichtsfunktion  $h(t) = \delta(t)$  heißt *ideal verzerrungsfrei*.  
Es reproduziert das Eingangssignal exakt als Ausgangssignal.



# Faltung mehrdimensionaler Funktionen

- Faltungsoperationen und ihre Eigenschaften lassen sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern.

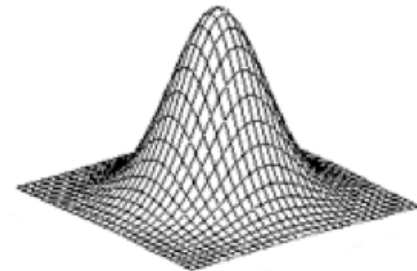
- Beispiel: zweidimensionale Faltung:

$$(f * h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) h(x - u, y - v) du dv$$

- Anwendung in der Bildverarbeitung:

$f(x, y)$  Intensitäten eines Grautonbildes

$h(x, y)$  Filter, z.B. 2d Gauß-Funktion:  $h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$



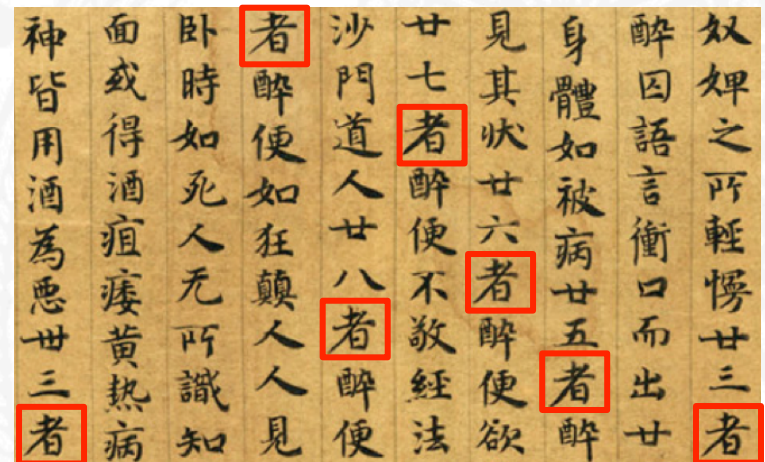
# Faltung und Kreuzkorrelation

- Kreuzkorrelation von  $f(t)$  und  $h(t)$ :

$$(f \circ h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) h(u - x, v - y) du dv$$

- Vergleiche mit  $f(t) * h(t)$ :  
Integrand  $h$  ist bei Kreuzkorrelation nicht gespiegelt!
- Ist  $f$  ein Bild und  $h$  eine Schablone, kann Kreuzkorrelation als *Schablonenvergleich* gedeutet werden.
- Wo im Bild findet sich das in der Schablone gezeigte Zeichen?

者



# Fourier Reihe

Eine periodische Funktion  $x(t)$  mit Grundfrequenz  $f_0$  und Periodendauer  $T_P = 1/f_0$  kann als Fourier-Reihe entwickelt werden:

- $a_k$  gerade Anteile von  $x(t)$
- $b_k$  ungerade Anteile von  $x(t)$
- $a_0/2$  Mittelwert von  $x(t)$
- $\omega_0$  Kreisfrequenz der Grundschiwingung  
( $\omega_0 = 2\pi f_0$ )

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Phasen- und Betragsdarstellung:

Folge der  $A_k$  ist "Amplitudenspektrum"

Folge der  $\varphi_k$  ist "Phasenspektrum"

Umrechnung:  $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$

$b_k = A_k \sin(\varphi_k)$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

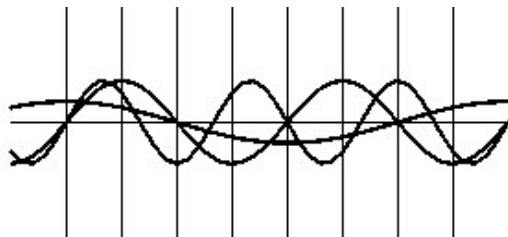
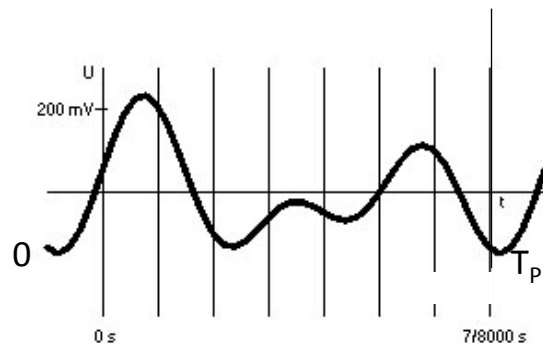
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + n\pi$$

wichtige Größen zur  
Charakterisierung  
von Systemen

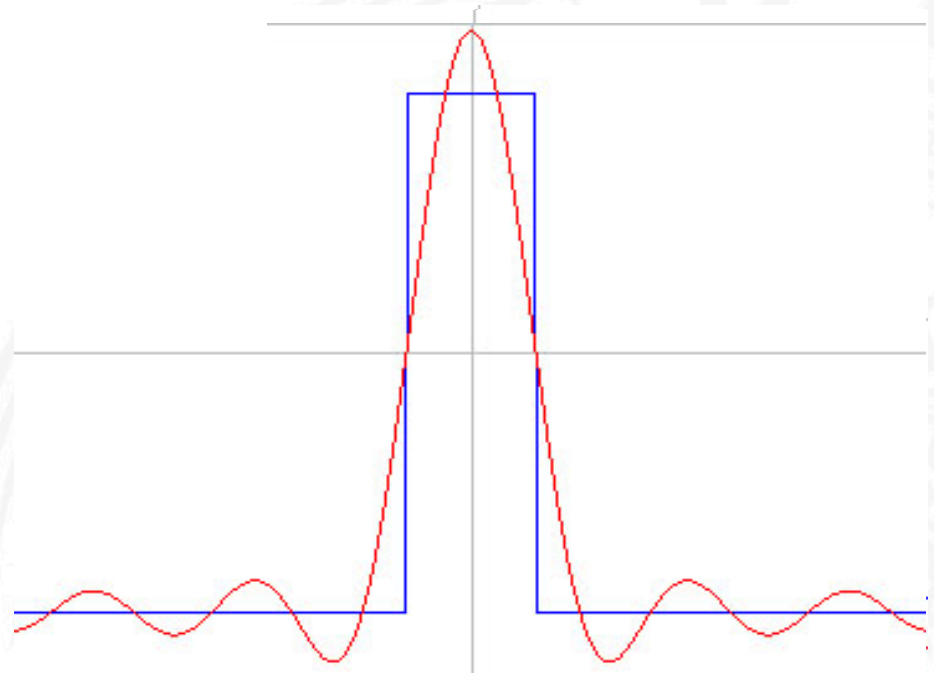
# Annäherung durch begrenzte Zahl von Fourier-Koeffizienten

Originalsignal



sinusförmige Komponenten summieren sich zum Originalsignal

Annäherung eines Rechteckimpulses durch 1 ... 5 sinusförmige Komponenten



Online Demonstration von Näherungen durch Fourier-Reihen:  
<http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/>

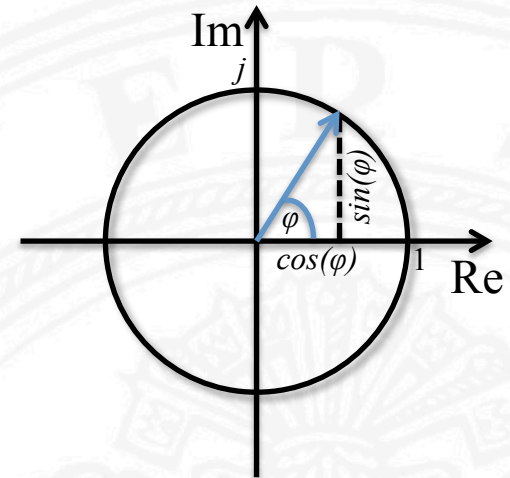
# Komplexwertige Darstellung der Fourier-Reihe (I)

Mit der Euler'schen Formel  $e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$  erhält man

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}.$$

Dies ermöglicht folgende Umformung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}}{2} \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega_0 t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned}$$



Daraus ergibt sich die **Fourier-Reihe in komplexer Darstellung:**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

# Komplexwertige Darstellung der Fourier-Reihe (II)

Genauere Betrachtung der komplexwertigen Koeffizienten  $c_k$ :

- Die Koeffizienten lassen sich komplex konjugiert unterscheiden:

- Für  $k > 0$ :  $c_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{A_k}{2} (\cos(\varphi_k) + j \sin(\varphi_k)) = \frac{1}{2}(a - jb)$

- Für  $k < 0$ :  $c_k^* = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$

- $x(t)$  ist stets reellwertig, kann als Summe gegenläufig drehender Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} dt = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{c_k e^{jk\omega_0 t}} + \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{c_k^* e^{-jk\omega_0 t}}$$

**linksdrehend    rechtsdrehend**



# Umrechnung zwischen verschiedenen Darstellungen der Fourier-Reihe

Von komplexen zu reellen Koeffizienten:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2 \operatorname{Re}(c_k)$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2 \operatorname{Im}(c_k)$$

$$A_k = 2\sqrt{c_k \cdot c_{-k}} = 2|c_k| = 2|c_{-k}|$$

$$\varphi_k = \operatorname{ang}(c_k) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)}\right)$$

Von reellen zu komplexen Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$c_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k}$$

$$c_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$$

**Es werden stets nur Koeffizienten mit derselben Frequenz miteinander verrechnet!**

# Amplituden- und Phasenspektrum

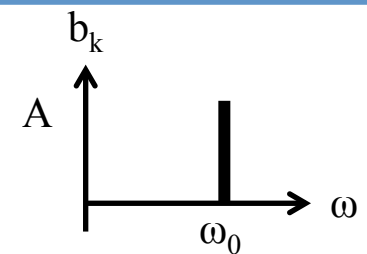
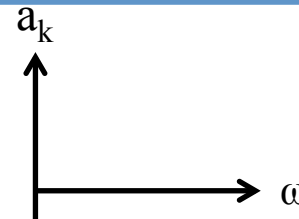
Aus den Bestimmungsgleichungen von  $A_k$  und  $\phi_k$  folgt: Periodische Signale haben ein diskretes Spektrum mit Spektrallinienabstand  $1/T_p$

Trivialbeispiel:

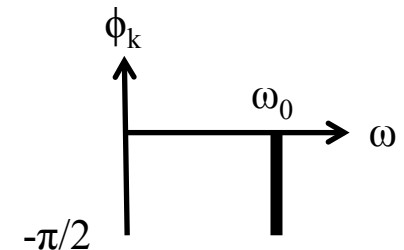
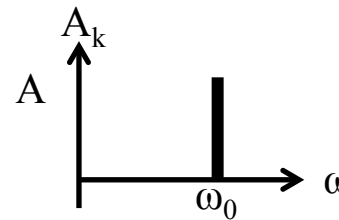
Spektrum von:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

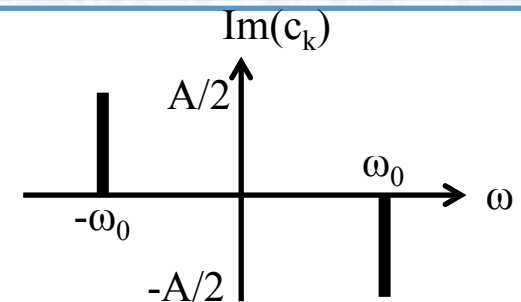
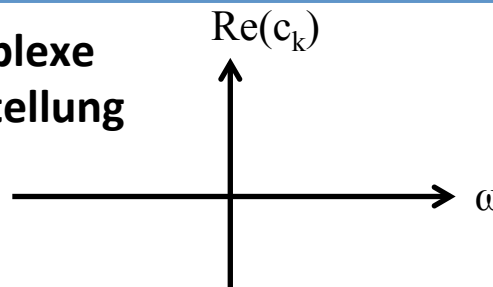
**Sinus-Kosinus-Darstellung**



**Betrags-Phasen-Darstellung**



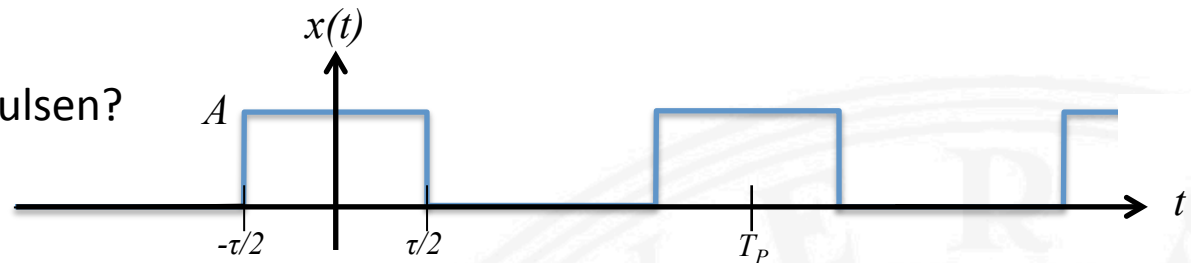
**Komplexe Darstellung**





# Periodische Pulsreihe

Was ist das Spektrum von periodischen Rechteckimpulsen?



Mit der Bestimmungsgleichung von  $c_k$ :

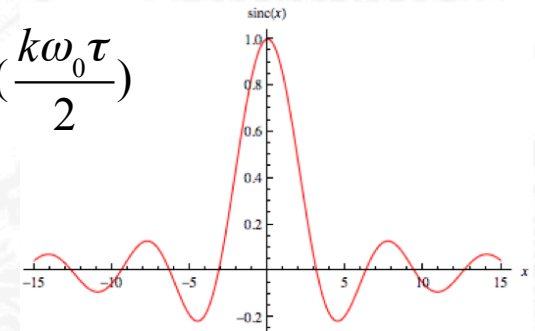
$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_P} \frac{1}{-jk\omega_0} \left( e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2} \right)$$

Mit der Euler'schen Formel:

$$c_k = \frac{A}{T_P} \frac{1}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 \tau / 2) = \frac{A\tau}{T_P} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right)$$

## Eigenschaften:

- Periodisches Zeitsignal, daher Linienspektrum
- Zeitfunktion gerade, daher reelles Spektrum
- Einhüllende (Envelope) des Spektrums hat Verlauf  $\operatorname{sinc}(x)/x$
- Nullstellen von  $\operatorname{sinc}(k\omega\tau/2)$  bei  $f = n/\tau$  für  $|n| > 1$



$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ (auch: } si(x)\text{)}$$

# Theorem von Parseval

**Signalleistung im Frequenzbereich ist gleich der Signalleistung im Zeitbereich:**

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Herleitung:

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t)^2 dt = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t)x^*(t) dt \quad \text{mit} \quad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} \quad \text{Trick: Deutung von } x(t) \text{ als komplexe Funktion}$$

$$P = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* (c_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

**Die Signalleistung eines periodischen Zeitsignals kann in die Beiträge der harmonischen Bestandteile zerlegt werden!**

# Fourier-Transformation

Anpassung der Fourier-Reihenentwicklung an nicht-periodische Signale durch Grenzübergang  $T_P \Rightarrow \infty$

- Abstand der Spektrallinien  $1/T_P \Rightarrow 0$
- Das Ergebnis existiert, wenn  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$  (hinreichend, nicht notwendig)

Grenzübergang:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad c_k = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T_P/2}^{T_P/2} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right) e^{jk\omega_0 t} \quad X(j\omega) \text{ ist die Fourier-Transformierte von } x(t)$$

$T_P \Rightarrow \infty$  bewirkt  $\omega_0 \Rightarrow d\omega \Rightarrow 0$  und  $k\omega_0 \Rightarrow \omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{d\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega$$

**Fourier-Transformation:**  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

**Inverse Fourier-Transformation:**  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

# Schreibweisen für die Fourier-Transformation

**In dieser Vorlesung:**  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$        $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

**In der Physik üblich:**  $X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$        $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

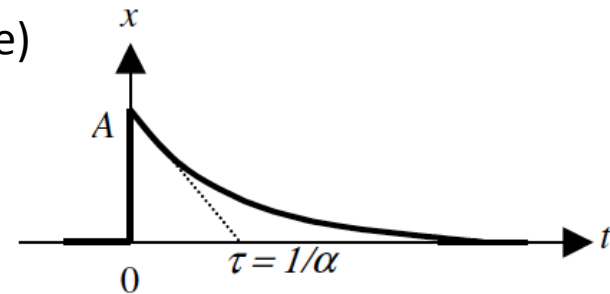
**Korrespondenzpaar:**  $x(t) \text{ } \circ \text{---} \circ \text{ } X(j\omega)$       oder       $x(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } X(j\omega)$

**Operatoren  $F$  und  $F^{-1}$ :**  $X(j\omega) = F\{x(t)\}$        $x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$

# Beispiele von Fourier-Transformationen

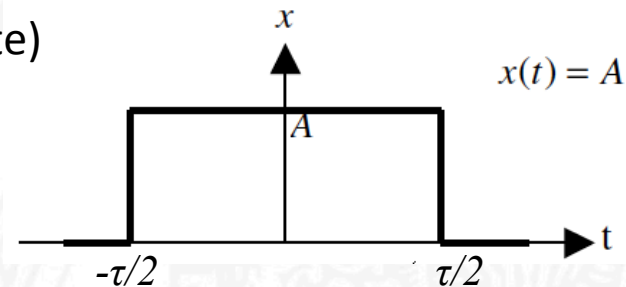
1. Was ist das Spektrum (die Fourier-Transformierte) von  $Ae^{-\alpha t}$  ( $t > 0$ )?

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$



2. Was ist das Spektrum (die Fourier-Transformierte) des Rechteckimpulses  $x(t) = A \text{rect}(T/\tau)$ ?

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \\ &= A\tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \end{aligned}$$



Interpretation der Fourier-Transformation

- Fourier-Transformierte ist "Spektrale Dichte", kurz Spektrum
- Für Spannungssignal  $x(t)$  hat  $X(j\omega)$  die Einheit  $Vs$  ("Volt pro Frequenzeinheit")

# Faltungstheorem

## Zeitverschobene Zeitfunktion

$$F\{x(t - \tau)\} = X(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

Zeitverschiebung hat keinen Einfluss auf das Amplitudenspektrum, nur auf das Phasenspektrum.

## Faltung

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \\ Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ X_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} \right] d\tau \\ &= X_1(j\omega) X_2(j\omega) \end{aligned}$$

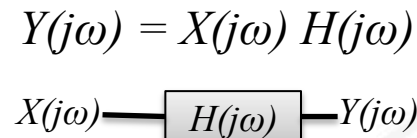
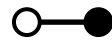
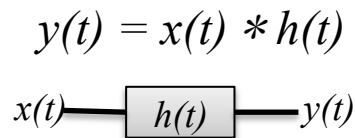
### Faltungstheorem

Einer Faltung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich

Die Wirkung eines Bauteiles (Systems) kann als voneinander unabhängige Wirkungen auf die harmonischen Bestandteile des Eingangssignals gedeutet werden.

# Frequenzgang eines Systems

Zur Beschreibung von Systemverhalten gibt es die Korrespondenz:



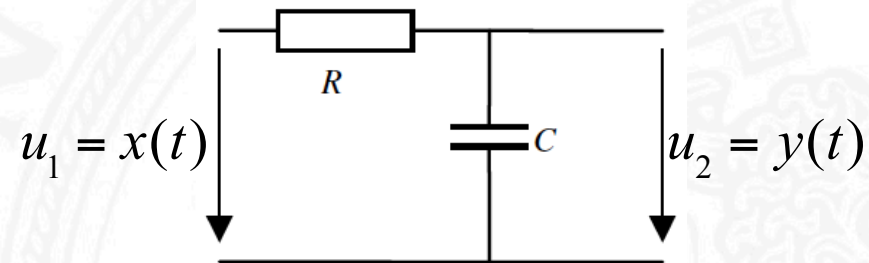
$H(j\omega)$  heißt Frequenzgang des Systems

**Beispiel:** Beschreibung des RC-Gliedes als Spannungsteiler ( $RC = T$ ):

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



"Verzögerungsglied 1. Ordnung"

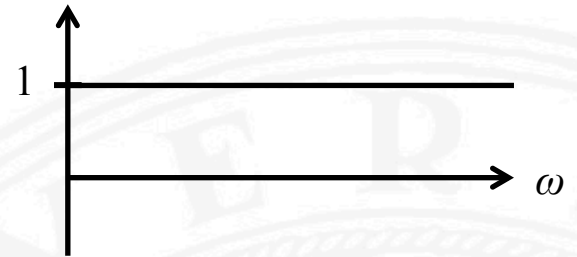


$$y(t) + RC \dot{y}(t) = x(t)$$

# Fourier-Transformation des Dirac-Impulses

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j\omega 0}}_{=1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Der Dirac-Impuls enthält alle Frequenzen mit gleichem Anteil.
- Als Eingangssignal eines Systems "prüft" er das Übertragungsverhalten aller Frequenzen.
- Praktisch ist ein Dirac-Impuls nicht realisierbar, dafür aber mathematisch elegant.
- Rücktransformation:  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} 1 d\omega$
- Symmetrie: Wenn  $x(t) \equiv 1$ , folgt:  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} 1 dt$
- Durch Vergleich erhält man:  $F\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$  Signal enthält nur die Frequenz  $\omega=0$  "Gleichanteil"





# Differentiation und Integration im Zeitbereich

## Differentiationstheorem

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega F\{x(t)\} = j\omega X(j\omega)$$

Wichtiger Zusammenhang zur Behandlung von Differentialgleichungen!

Herleitung: Rücktransformation von  $j\omega X(j\omega)$  ergibt  $d/dt x(t)$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

Entsprechend lässt sich das Integrationstheorem ableiten:

$$F\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \underbrace{\pi X(0) \delta(\omega)}_{\text{Effekt der Integrationskonstanten}}$$

Effekt der Integrationskonstanten

Beobachtung: Differentiation verstärkt hohe Frequenzen des Spektrums

# Symmetrien von Zeit- und Frequenzbereich

Zeitsignal $x(t)$	Spektrum $X(j\omega)$
reell	konjugiert komplex
reell und ungerade	imaginär und ungerade
reell und gerade	reell und gerade
imaginär und gerade	imaginär und gerade
imaginär und ungerade	reell und ungerade
konjugiert komplex	reell

Bei den meisten Anwendungen sind die Zeitfunktionen reell.

Eigenschaften von geraden und ungeraden Funktionen lassen sich häufiger ausnutzen als es solche Funktionen gibt:

Jede Funktion kann in einen geraden und ungeraden Teil zerlegt werden.

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_g(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ x_u(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \end{cases}$$

# Signaldauer und Bandbreite

Technisch wichtiger Zusammenhang zwischen Dauer und Bandbreite eines Signals:

Signaldauer = Dauer des Zeitsignals (bis zu einer Schwelle)

Bandbreite = maximale Frequenz des Signalspektrums (bis zu einer Schwelle)

Die über einen Nachrichtenkanal mit Bandbreite  $B$  in der Zeit  $T$  maximal übertragbare Informationsmenge beträgt  $I = T B \log_2(1 + P_S/P_N)$ .


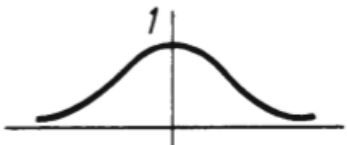
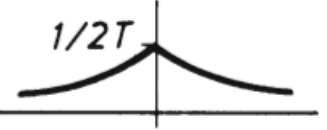
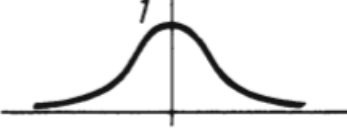
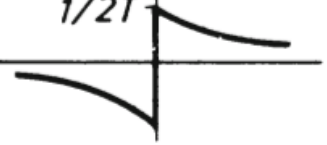

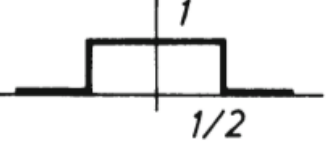
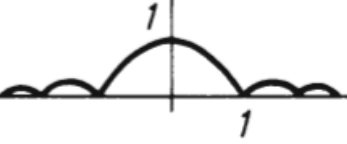
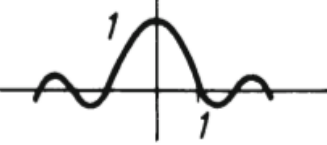
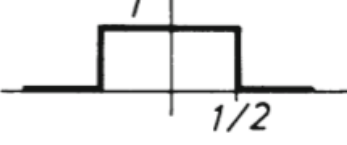
( $P_S$  = Signalleistung  $P_N$  = Störleistung  $P_S/P_N$  = Signal-Rausch-Verhältnis)

Kurzdauernde Signale haben breite Spektren, schmale Spektren können nur durch langdauernde Signale erzeugt werden.

Schnell ändernde Signale haben ein breites Spektrum.

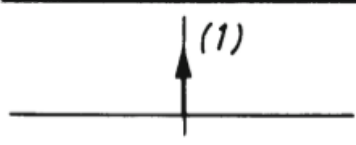
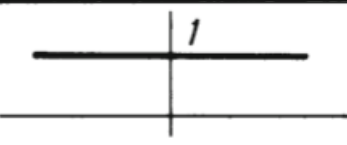
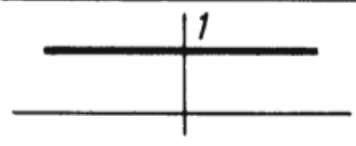

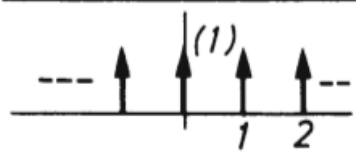
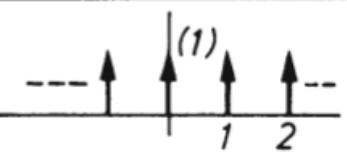
Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist die Unschärfe-Relation der Signalverarbeitung!

# Tabelle von Fourier-Transformationen (1)

$s(t)$	$S(f)$	$ S(f) $
	$\frac{1}{1+j2\pi Tf}$ Exponentialimpuls $(T>0)$	
	$\frac{1}{1+(2\pi Tf)^2}$ Doppelpotentialimpuls $(T>0)$	
	$-j \frac{2\pi Tf}{1+(2\pi Tf)^2}$ $\frac{1}{2T} \text{sgn}(t)e^{- t /T}$ $(T>0)$	
	$\text{si}(\pi f)$ Rechteckimpuls	
	$\text{rect}(f)$ si-Funktion	

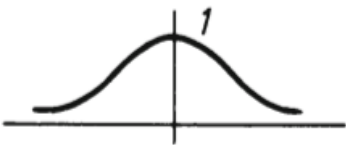
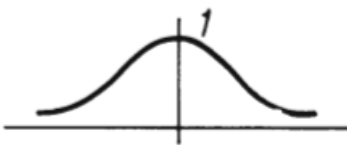
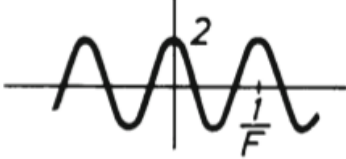
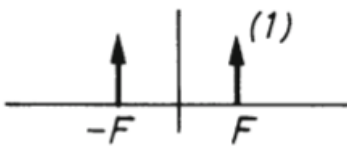
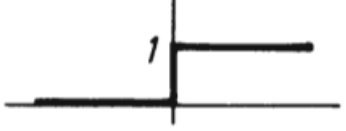

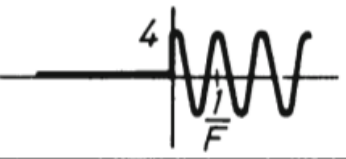

aus Ohm & Lüke: Signalübertragung

# Tabelle von Fourier-Transformationen (2)

$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$\delta(t)$ Dirac-Impuls	1	
	1 Gleichstrom	$\delta(f)$	
	$\text{III}(t)$ Dirac-Impuls- folge	$\text{III}(f)$	

aus Ohm & Lücke: Signalübertragung

# Tabelle von Fourier-Transformationen (3)

$s(t)$		$S(f)$	$ S(f) $
	$e^{-\pi t^2}$ Gauß-Impuls	$e^{-\pi f^2}$	
	$2 \cos(2\pi Ft)$ cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
	$\varepsilon(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	
	$4\varepsilon(t) \cdot \cos(2\pi Ft)$ geschaltete cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F) - \frac{j}{\pi} \frac{2f}{f^2 - F^2}$	

aus Ohm & Lüke: Signalübertragung