Universität Hamburg

Department Informatik
Arbeitsbereich Kognitive Systeme (KOGS)

64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

Gliederung:

Teil III: Komplexe Fourierreihe, Fouriertransformation

Exkurs: Komplexe Zahlen

Girolamo Cardano
(1501 – 1576)

Italienischer Mathematiker, Physiker, Astrologe und Spieler

Rechnete „unter Überwindung geistiger Qualen" bei Gleichungen dritten Grades mit Wurzeln aus negativen Zahlen

Universität Hamburg

Department Informatik
Arbeitsbereich Kognitive Systeme (KOGS)

Teil III: Komplexe Fourierreihe, Fouriertransformation

Exkurs: Komplexe Zahlen

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

schweizerischer Mathematiker,
Professor für Mathematik und Physik in St. Petersburg

Carl Friedrich Gauß
(1777 – 1855)

deutscher Mathematiker,
Professor für Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität Göttingen

Mathematischer Zahlenbaum

Natürliche Zahlen
(positive ganze Zahlen und Null)

$\mathbb{N}^{+} \cup \{0\}$

Negative ganze Zahlen
(als Lösung für $n + x = 0,\ n \in \mathrm{N}$)

$\mathbb{N}^{-}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z}$

Gebrochene Zahlen

$\left(z \cdot x = 1,\ z \in ¢\ ,\ |z| \notin \{0,1\}\right)$

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q}$

Irrationale Zahlen
(vgl. Intervallschachtelungs-prinzip)

Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$

„Echt imaginäre“ Zahlen

$\left(x = \sqrt{z},\ z \in °^{-}\right)$

<u>Komplexe Zahlen</u>

$\mathbb{C}$

Definition der komplexen Zahlen (Gaußsche Zahlenebene)

Def.: Komplexe Zahl a: $a = (\alpha, \beta) = \alpha + j \cdot \beta$

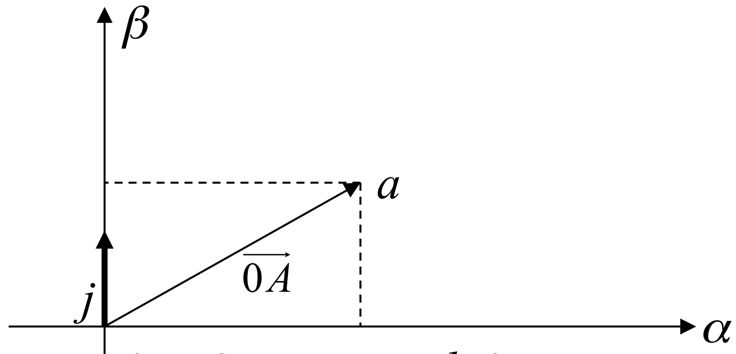


Bild von a: $\overrightarrow{0A} = (\alpha, \beta)$ (Zeiger)

$j = (0, 1)$: imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$

(häufig: $z = a + jb$!)

$\alpha = \mathrm{Re}(a), \qquad \beta = \mathrm{Im}(a)$

$\Rightarrow$ alle Paare $(0, \beta) = j\beta$ sind (rein) imaginäre Zahlen

alle Paare $(\alpha, 0) = \alpha$ sind reelle Zahlen

Eigenschaften und Rechenregeln (Algebra der komplexen Zahlen):

i) $a_1 = a_2$ iff $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$

ii) <u>Addition:</u> $a_1 = (\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 + j\beta_1$

$$a_2 = (\alpha_2, \beta_2) = \alpha_2 + j\beta_2$$

$$a_1 + a_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + j(\beta_1 + \beta_2)$$

iii) <u>Multiplikation:</u> $a_1 \cdot a_2 = (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2)$

$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + j(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

iv) <u>Division:</u> $\frac{a_1}{a_2} = \frac{(\alpha_1, \beta_1)}{(\alpha_2, \beta_2)}$

$$= \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2, \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \right)$$

$$= \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + j \cdot \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}; \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

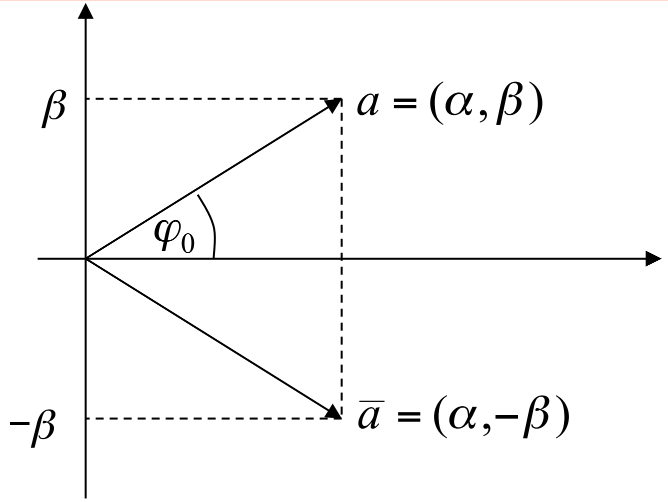
<u>Def.:</u> Konjugiert komplexe Zahlen

geg.: $a = \alpha + j\beta$

Die zu a konjugiert komplexe Zahl $\overline{a}$

ist diejenige, für die gilt:

$$\boxed{\overline{a} = \alpha - j\beta}$$



Es gilt: i) $\overline{\overline{a}} = a, \qquad a = \overline{a}$ iff $a = (\alpha, 0)$, d.h. $a \in$ R

ii) $\overline{a \pm b} = \overline{a} \pm \overline{b}, \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b},$

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$$

iii) $a \cdot \overline{a} = \alpha^2 + \beta^2, \quad \mathrm{Re}(a) = \alpha = \frac{1}{2}(a + \overline{a}),$

$$\mathrm{Im}(a) = \beta = \frac{1}{2j}(a - \overline{a})$$

$\Rightarrow$ <u>Absolutbetrag</u>, Modul $|a|$: $\quad |a| = \sqrt{a \cdot \overline{a}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

(Länge der komplexen Zahl)

iv) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad |a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$$ (Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski)

Trigonometrische und exponentielle Form komplexer Zahlen

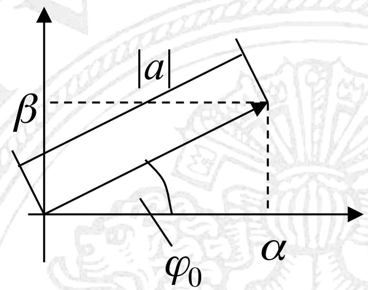
Trigonometrische Form, Polarkoordinaten

$\alpha = |a| \cdot \cos \varphi_0,\ \beta = |a| \cdot \sin \varphi_0,$

($\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, mit $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi,\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

so daß gilt: $\boxed{a = |a|\left(\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + j \cdot \sin(\varphi_0 + 2k\pi)\right)}$

mit $\varphi_0 = \underbrace{\arctan}_{\tan^{-1}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

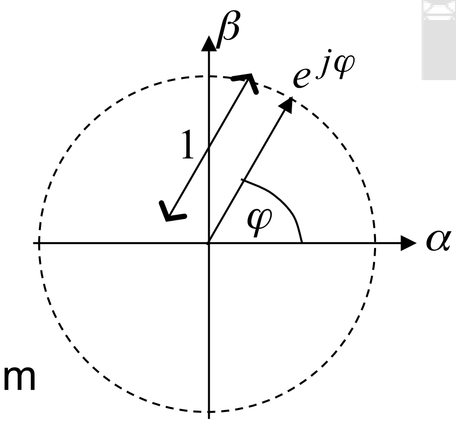


$\Rightarrow$ <u>Polarkoordinatendarstellung</u> von a: $(|a|, \varphi_0)$

Exponentialform, Eulersche Formel

$$\cos\varphi \pm j\sin\varphi = e^{\pm j\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = |a|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |a|\cdot e^{j\varphi}}$$

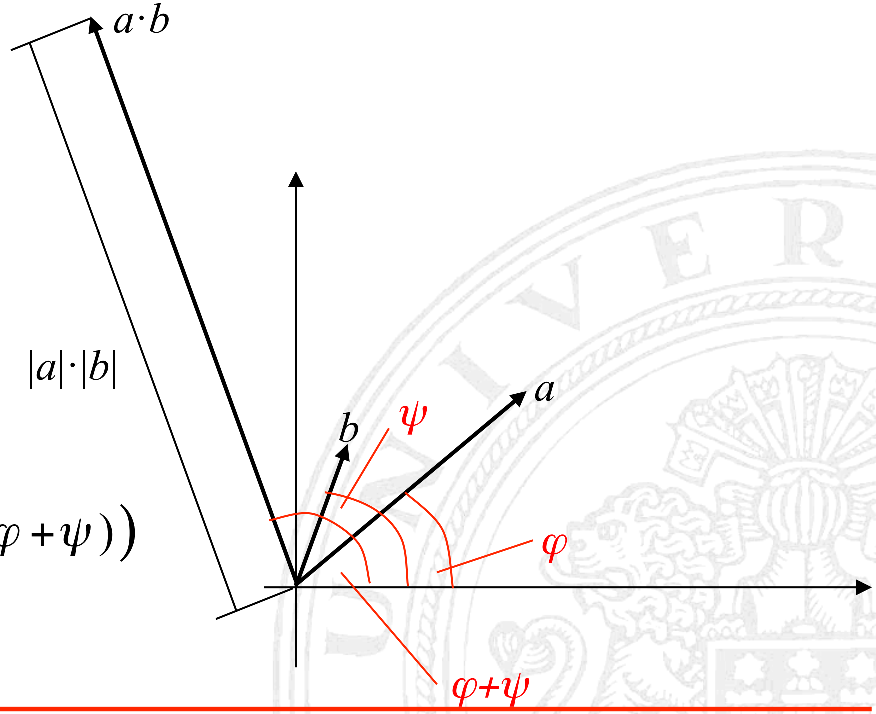


$|e^{j\varphi}| = 1$, d.h. die Vektorspitzen (Zeiger) liegen auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene

Rechenoperationen

geg.: $a = |a|\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$b = |b|\cdot(\cos\psi + j\sin\psi)$



Multiplikation:

$$a\cdot b = |a|\cdot|b|\cdot\left(\cos(\varphi+\psi) + j\sin(\varphi+\psi)\right)$$

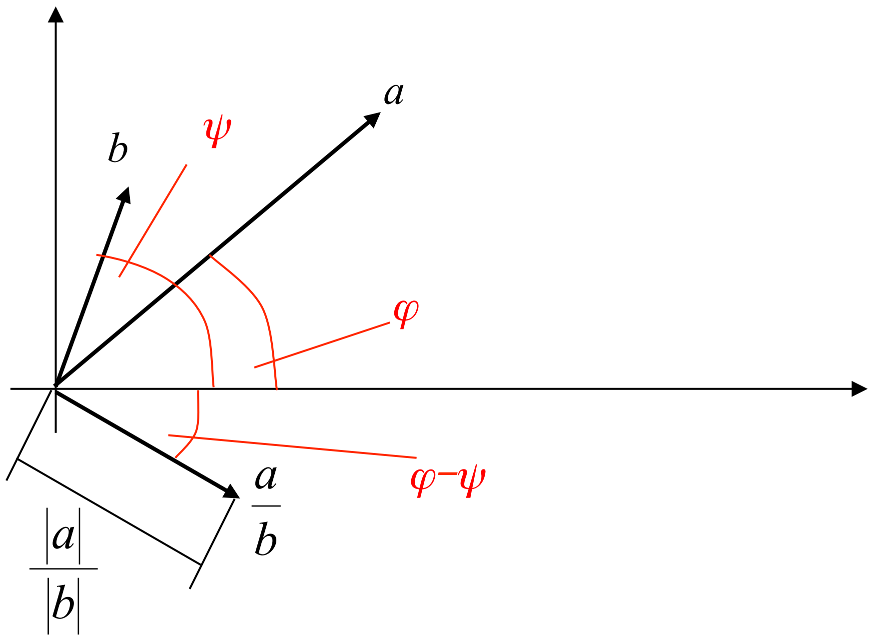
$$= |a|\cdot|b|\cdot e^{j\cdot(\varphi+\psi)}$$

geg.: $a = |a| \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$b = |b| \cdot (\cos\psi + j\sin\psi)$

Division:

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \left(\cos(\varphi - \psi) + j\sin(\varphi - \psi)\right) = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{j\cdot(\varphi - \psi)}$$



Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Exponenten

(i) natürlicher Exponent n (*nach der Formel von Moivre*):

$$a^n = \left(|a|\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)\right)^n = |a|^n\left(\cos n\varphi + j\sin n\varphi\right) = |a|^n e^{jn\varphi}$$

Es gelten ebenso:

- der binomische Lehrsatz
- die Formel für die endliche geometrische Reihe

(ii) negativer ganzzahliger Exponent $-n$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{bzw.} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

(iii) gebrochener rationaler Exponent n: $n = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} = \omega$$ (m-te Wurzel aus a: $\omega^m = a$)

$\sqrt[m]{a}$ liefert m verschiedene Lösungen (Wurzeln):

Es sei $\omega_k = \sqrt[m]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m} + j\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m}\right), \ \varphi_0 = (H)\arg(a)$

($\arg(a)$: Menge der Winkel φ, die der Vektor $\overrightarrow{0A}$ einer komplexen Zahl a mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt;
Hauptwert $\varphi_0 = (H)\arg(a)$, $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$)

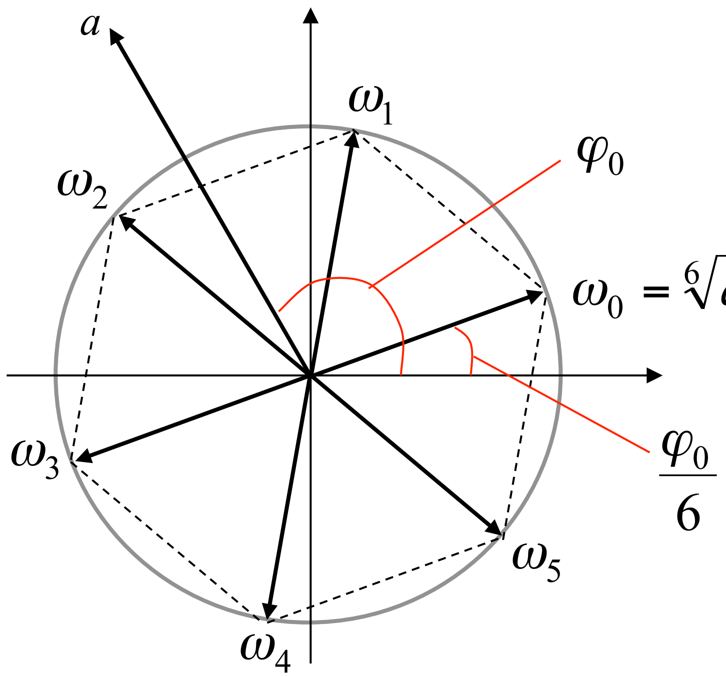
$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = \{\omega_k \mid k = 0,1,\ldots,m-1\} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{m-1}\}$$

Für eine beliebige ganze Zahl g gilt: $\omega_{k+gm} = \omega_k$,
d.h. es können außer den angegebenen Wurzeln ω_k <u>keine</u> weiteren auftreten.
Die spezielle Lösung ω_0 von $\omega^m = a$ nennt man <u>Hauptwert</u> von a:

$$\omega_0 = \underset{(H)}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi_0}{m} + j\sin\frac{\varphi_0}{m}\right)$$

Alle ω_k haben den gleichen Betrag $\sqrt[m]{|a|}$, so daß sie entsprechend der Argumente $\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m}$, $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$, auf den Ecken eines regelmäßigen m-Ecks liegen.

Bsp.: $m = 6, \sqrt[6]{a}$



(iv) beliebiger reeller Exponent n: $n = \varepsilon$

Postulat: $\omega_k = |a|^{\varepsilon} \left[\cos\varepsilon\left(\varphi_0 + 2k\pi\right) + j\sin\varepsilon\left(\varphi_0 + 2k\pi\right)\right]$

$\Rightarrow$ Gesamtheit der komplexen Zahlen

$$a^{\varepsilon} = \left\{\omega_k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\} = \left\{\ldots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\right\} \qquad \mathbb{C} = \left\{a^{\varepsilon} \middle| a, \varepsilon \in \mathbb{R}\right\}$$

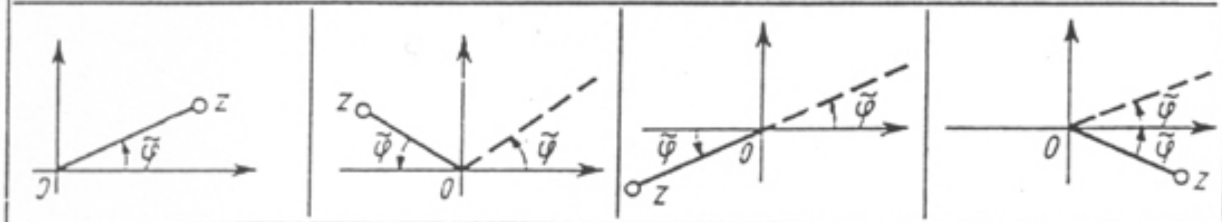
Zusammenfassung

Darstellungsformen für komplexe Zahlen

	arithmetische (kartesische) Form		trigonometrische Form		Exponentialform
$z =$	$a + jb$	=	$r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	=	$r \cdot e^{j\varphi}$

mit $j^2 = -1$; $a = \mathrm{Re}\,(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$,

$$\varphi = \arg\,(z) \text{ mit } (-\pi < \varphi \le \pi),\ \tan\tilde{\varphi} = \left|\frac{b}{a}\right| \quad \Rightarrow \tilde{\varphi} = \arctan\left|\frac{b}{a}\right|,\ -\frac{\pi}{2} \le \tilde{\varphi} \le \frac{\pi}{2}$$



1. Quadrant	2. Quadrant	3. Quadrant	4. Quadrant
$a > 0,\ b > 0$ $\arg z = \tilde{\varphi}$	$a < 0,\ b > 0$ $\arg z = \pi - \tilde{\varphi}$	$a < 0,\ b < 0$ $\arg z$ $= -\pi + \tilde{\varphi}$	$a > 0,\ b < 0$ $\arg z = -\tilde{\varphi}$

Betrag

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, mit $\bar{z} = a - jb$ (konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + jb$)

Reelle und (rein) imaginäre Zahlen

- reelle Zahlen:

$$z = a + j0 = a \cdot (\cos 0 + j \underbrace{\sin 0)}_{=0} = a \cdot e^{j0} = \tfrac{1}{2}\,|z|\,\underbrace{\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)}_{(\cos\varphi + j\sin\varphi) + (\cos\varphi - j\sin\varphi) = 2\cos\varphi} = |z| \cdot \cos\varphi$$

- (rein) imaginäre Zahlen:

$$z = 0 + jb = b \cdot (\underbrace{\cos \pi/2}_{=0} + j \sin \pi/2) = b \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\,|z|\,\underbrace{\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)}_{(\cos\varphi + j\sin\varphi) - (\cos\varphi - j\sin\varphi) = 2j\sin\varphi} = |z|\, j \sin\varphi$$

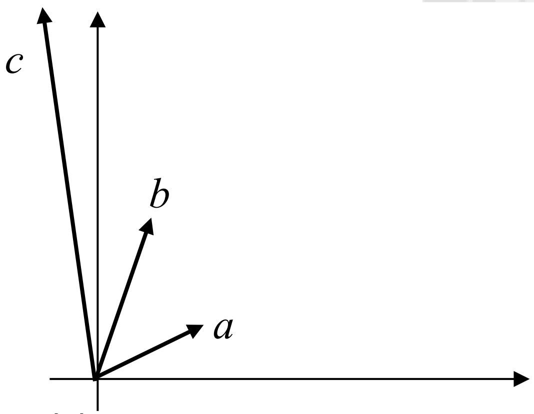
Trigonometrische Anteile

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{-j}{2}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \quad \frac{1}{j} = -j \left(\text{aus Divisionsregel}: \frac{1}{j} = \frac{(1,0)}{(0,1)} = \left(0, \frac{-1}{1}\right)\right)$$

Beispiele

Bsp. 1: Multiplikation zweier komplexer Zahlen



(1) $a = (2, 1), b = (1, 3)$

$$c = a \cdot b = (2, 1) \cdot (1, 3)$$
$$= (2 - 3, 6 + 1)$$
$$= (-1, 7)$$

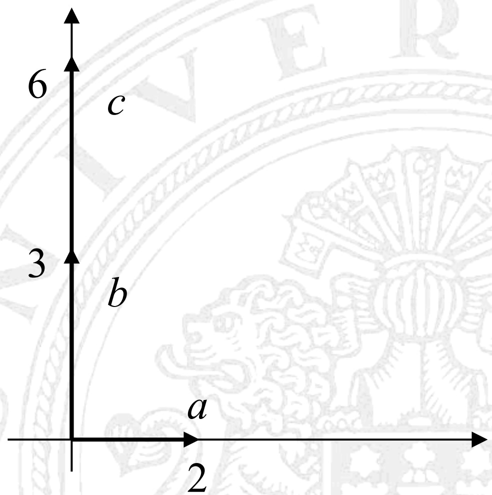
$$a = (2,1) = \sqrt{5}\left(\cos\varphi_a + j\sin\varphi_a\right) = \sqrt{5}\cdot e^{j\varphi_a}, \quad \varphi_a = \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) = 26,5651°$$

$$b = (1,3) = \sqrt{10}\left(\cos\varphi_b + j\sin\varphi_b\right) = \sqrt{10}\cdot e^{j\varphi_b}, \varphi_b = \arctan(3) = 71,5651°$$

$$c = a\cdot b = \underbrace{\sqrt{5}\sqrt{10}}_{=\sqrt{50}\,\approx\, 7.0711}\cdot\underbrace{e^{j\varphi_a}\cdot e^{j\varphi_b}}_{=e^{j(\varphi_a+\varphi_b)}}, \quad = \cos(\varphi_a+\varphi_b) + j\sin(\varphi_a+\varphi_b)$$

(2) $a = (2, 0) = 2\cdot e^{j0}$

$$b = (0, 3) = 3\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$c = a \cdot b = (2, 0)\cdot(0, 3) = 6\cdot e^{j\frac{\pi}{2}+0} = 6\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$= (0, 6) = j6$$



Bsp. 2: Multiplikation einer komplexen Zahl mit reeller Funktion

$$F(u) = S(u) + S(u) \cdot e^{-jx_0 u}, \; u \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\|F(u)\|^2 = \|S(u)\|^2 \cdot \|1 + e^{-jx_0 u}\|^2$$

$$\underbrace{(1,0) \qquad \cos(x_0 u) - j\sin(x_0 u)}_{\downarrow} = \big(\cos(x_0 u), \sin(x_0 u)\big)$$

$$(1,0) + \big(\cos(x_0 u), \sin(x_0 u)\big) = \big(1 + \cos(x_0 u), \sin(x_0 u)\big) \Big| \; \| \; \|^2$$

$$\boxed{\|a\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow} \qquad = \underbrace{\big(1 + \cos(x_0 u)\big)^2}_{1+2\cos(x_0 u)+\cos^2(x_0 u)} + \sin^2(x_0 u)$$

$$= 1 + 2\cos(x_0 u) + \underbrace{\cos^2(x_0 u) + \sin^2(x_0 u)}_{1}$$

$$= 2 \cdot \big(1 + \cos(x_0 u)\big)$$

$$\|F(u)\|^2 = \|S(u)\|^2 \cdot 2 \cdot \big(1 + \cos(x_0 u)\big)$$

■

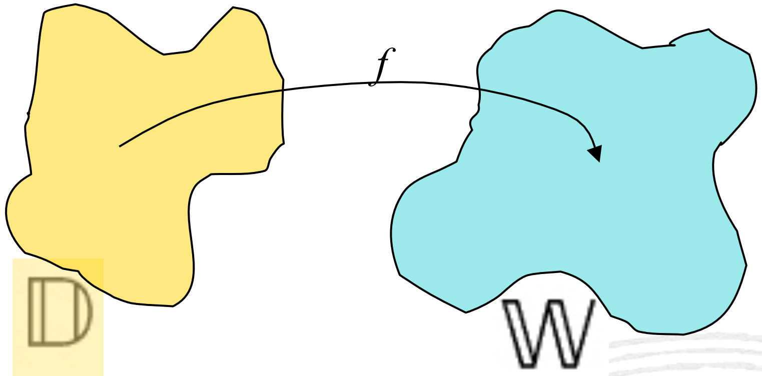
Komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Komplexe Variable

$z = x + jy$ einer Menge D komplexer Zahlen

Funktion

$f: z \mapsto \omega, \omega = f(z)$



$z = x + jy \in \mathrm{D}, \quad \omega = u + jv \in \mathrm{W}$

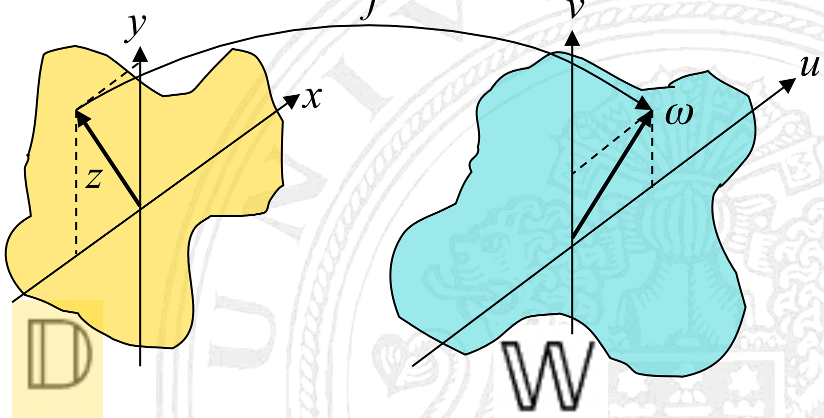
$$\Rightarrow \quad \omega = u + jv = f(z) = f(x + jy)$$

u, v sind reelle Funktionen der beiden unabhängigen Variablen x, y

$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$

$$\omega = f(z) \quad \Rightarrow \quad \omega = u(x, y) + j \cdot v(x, y)$$

$$= \mathrm{Re}(f(z)) + j \cdot \mathrm{Im}(f(z))$$



Betrag einer Funktion (Relief)

$$|\omega| = |f(z)| = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2} = \Phi(x,y)$$

Nullstellen

Werte der unabhängigen Variablen z, für die $|f(z_0)| = 0$ und somit $f(z_0) = 0$ gilt

Beschränktheit, Grenzwert und Stetigkeit

- $\omega = f(z)$ heißt im Gebiet D $\subseteq$ G (G offen und zusammenhängend) <u>beschränkt</u>, wenn ihr Relief über G ganz unter einer Konstante K liegt, d.h. $|f(z)| \leq K$ mit ausreichend groß gewähltem K. Ist bei beliebiger Annäherung an eine Stelle $z_p \in$ G nicht erfüllt, so heißt $f(z)$ in z_p <u>singulär</u>.
- <u>Grenzwert</u> und <u>Stetigkeit</u>: formal gleichwertig zu Funktionen mit reellen Veränderlichen

Differentiation im Komplexen

Die Funktion $\omega = f(z)$ sei in einer Umgebung von z_0 definiert. $\omega = f(z)$ heißt an der Stelle $z_0 \in$ G <u>differenzierbar</u>, wenn unabhängig von der Art der Annäherung $\Delta z = z - z_0$ der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)}{\Delta z} = f'\left(z_0\right) = \left.\dfrac{df\left(z\right)}{dz}\right|_{z=z_0}$ existiert.

<u>Holomorphe Funktionen</u>

$\omega = f(z)$ ist eine in G holomorphe (analytische, reguläre) Funktion, wenn in jedem Punkt z des Gebietes G $f(z)$ differenzierbar ist.

$\omega = f(z)$ heißt an jedem Punkt z_0 <u>holomorph</u>, wenn eine Umgebung von z_0 existiert, in der $f'(z_0)$ gebildet werden kann;

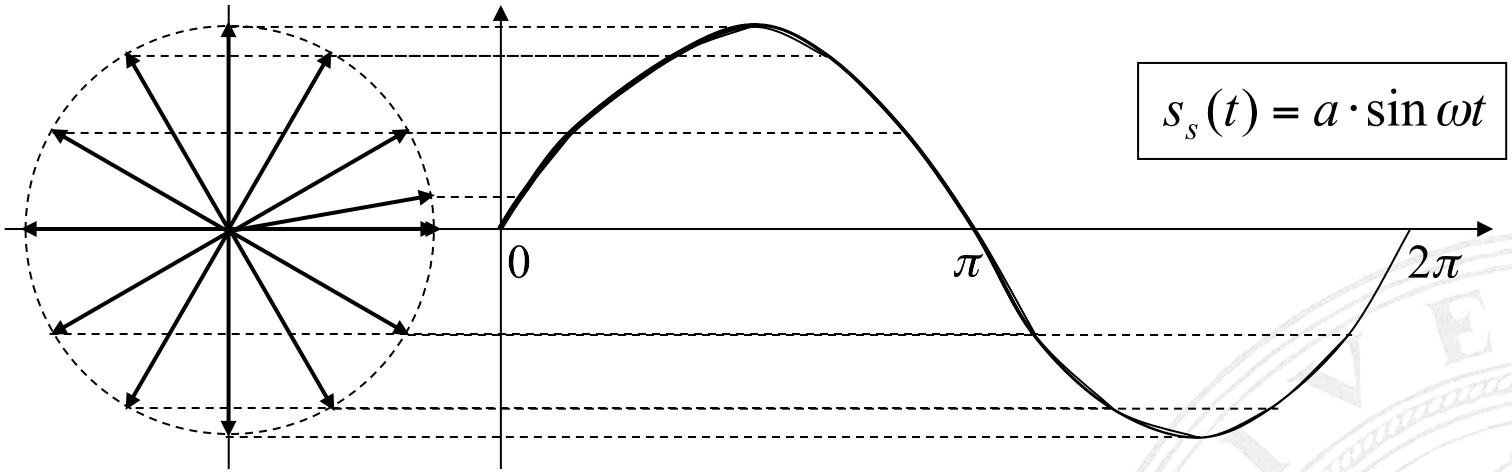
Stellen, an denen $f'(z)$ nicht existiert, heißen <u>singuläre Stellen</u>.

Es gelten die allgemeinen <u>Differentiationsregeln</u>; sie stimmen formal mit den entsprechenden Regeln für reelle Funktionen überein.

Komplexe Zahlen und ihre nachrichtentechnischen Bezüge

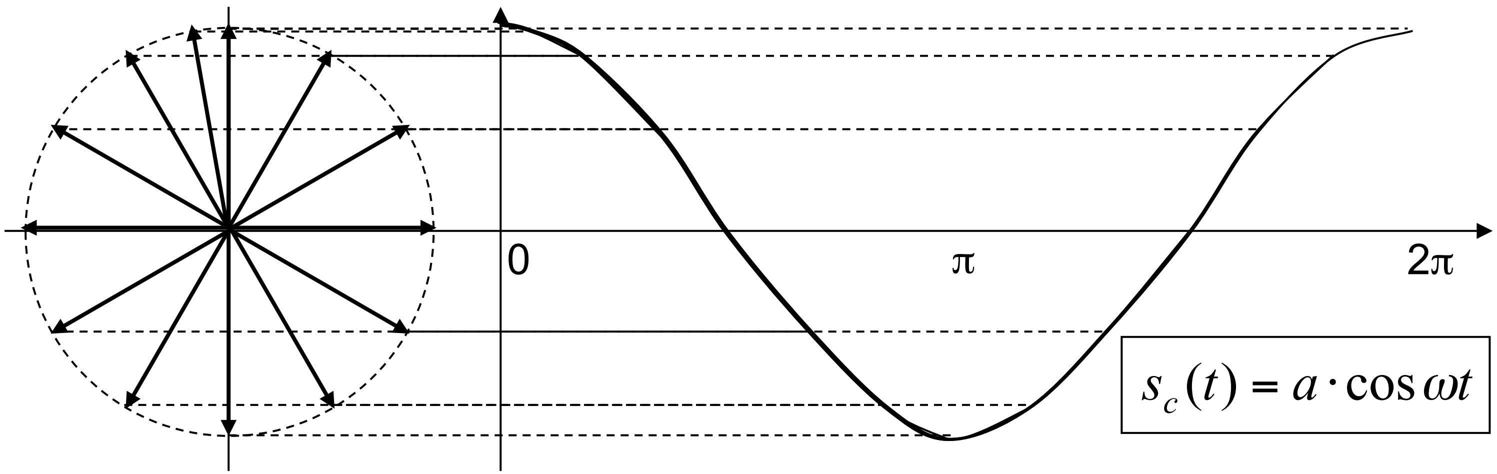
Sinus- und Cosinusverlauf

→ Augenblickswerte einer Wechselgröße mit Periode T (Frequenz: $f = \frac{1}{T}$)



$$s_s(t) = a \cdot \sin \omega t$$

mit $\omega{\cdot}t$: der in der Zeit t durchlaufene Winkel; ω : Winkelgeschwindigkeit



mit $\omega{\cdot}t$: der in der Zeit t durchlaufene Winkel; ω : Winkelgeschwindigkeit

→ Nach Durchlauf eines vollen Winkels ($\omega{\cdot}t = 2\pi$) beginnt die Wiederholung (Periodizität)

⇒ zur Periodenlänge $t = T$ gehört der durchlaufene Winkel $\omega{\cdot}t = \omega{\cdot}T = 2\pi$

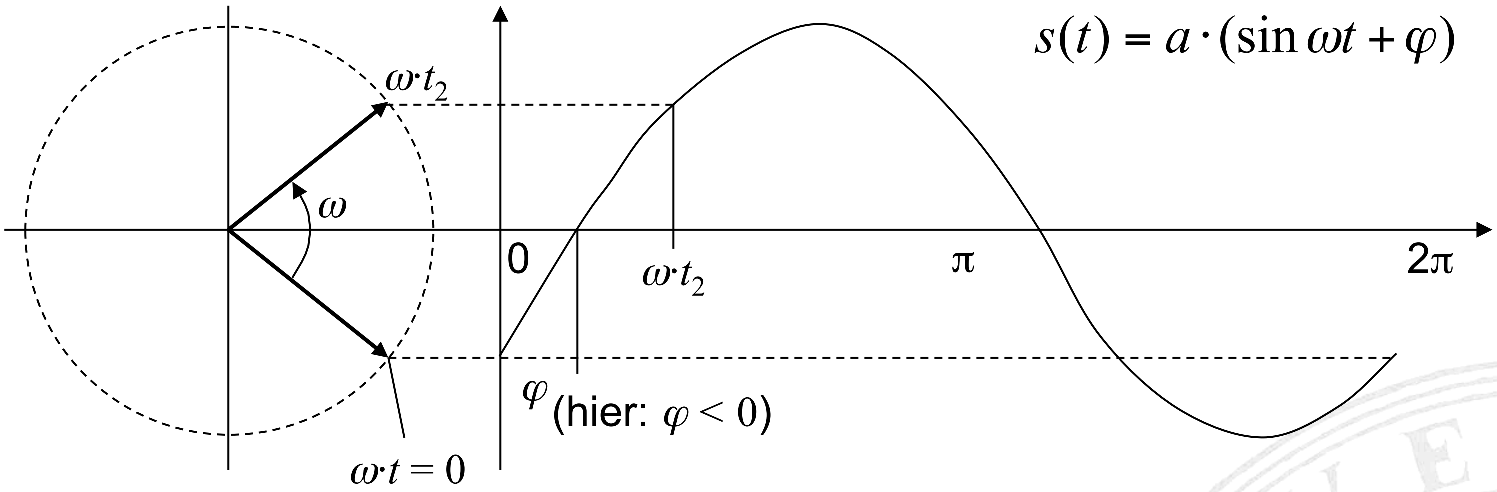
Winkelgeschwindigkeit ω : der je Sekunde durchlaufene Winkel

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

(auch: Kreisfrequenz, wegen des engen Zusammenhangs mit der Frequenz)

Nullphasenwinkel φ

Verschiebung des Anfangszeitpunktes $t = 0$ bzw. $\omega \cdot t = 0$ gegen den Zeitpunkt des Nulldurchgangs bzw. des Auftretens des positiven Scheitelwertes der Wechselgröße



Alternative Darstellung einer Wechselgröße

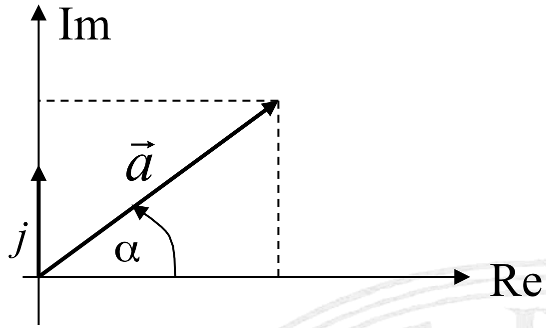
Darstellung einer zeitlich sinusförmig verlaufenden Wechselgröße durch einen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Zeiger gleichbleibender Länge (Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn = mathematisch positiver Sinn)

i) ruhender Zeiger in Gaußscher Zahlenebene

$$\vec{a} = a \cdot \cos\alpha + a \cdot j \sin\alpha$$

$$= a \cdot e^{j\alpha} \qquad \text{(Eulersche Darstellung)}$$

$$= a\angle\alpha \qquad (\angle : \text{Vesorzeichen})$$



ii) umlaufender Zeiger in komplexer Form

$$\overrightarrow{a_\omega} = a \cdot \left[\cos\left(\omega \cdot t + \varphi\right) + j \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)\right]$$

$$= a \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)}$$

Komplexe Fourierreihe

Für Manipulationen sind die o. g. Reihendarstellungen schlecht handhabbar. Eine kompaktere Darstellung erhält man unter Verwendung <u>komplexer Amplituden</u> (komplexe Koeffizienten)

$$c_m = \frac{1}{2}\left(a_m - jb_m\right)$$

$$\overline{c_m} = \frac{1}{2}\left(a_m + jb_m\right)$$

Es ist

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m \underbrace{\cos(m\omega_0 t)}_{\frac{1}{2}\left(e^{jm\omega_0 t} + e^{-jm\omega_0 t}\right)} + b_m \underbrace{\sin(m\omega_0 t)}_{-\frac{j}{2}\left(e^{jm\omega_0 t} - e^{-jm\omega_0 t}\right)}\Big)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\left(a_m - jb_m\right)}_{c_m} e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_m + jb_m\right)}_{\overline{c_m}} e^{-jm\omega_0 t}\Big)$$

und somit

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} + \overline{c_m} e^{-jm\omega_0 t}$$

Die komplexen Koeffizienten berechnen sich aus $a_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(m\omega_0 t)dt$ und

$b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(m\omega_0 t)dt$ zu

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)e^{-jm\omega_0 t}dt \quad \text{und} \quad \overline{c_m} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)e^{jm\omega_0 t}dt$$

Für ein reellwertiges Signal $s(t)$ gilt somit $\overline{c_m} = c_{-m}$

d.h. Harmonische mit negativen Frequenzen erhalten die komplex-konjugierten Koeffizienten der jeweils korrespondierenden Harmonischen mit positiver Frequenz.

Somit kann die Fourierreihe sehr kompakt geschrieben werden

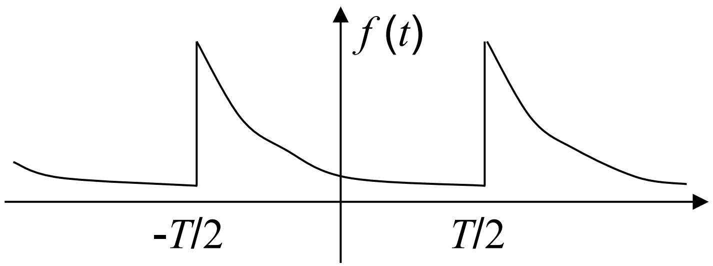
$$\boxed{s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t}}$$

mit den komplexen Koeffizienten $c_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)e^{-jm\omega_0 t}dt$

(für $m = 0$ ist keine besondere Behandlung mehr notwendig!)

Beispiel: Harmonische Analyse eines Signals mittels komplexer Fourierreihen

$$f(t) = A \cdot e^{-a\omega_0 t} \quad \text{für} \quad -\tfrac{T}{2} < t \le \tfrac{T}{2}$$



Koeffizienten:

$$c_k = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-a\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-(a+jk)\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{A}{2\pi(a+jk)}\left(e^{a\pi}e^{jk\pi} - e^{-a\pi}e^{-jk\pi}\right)$$

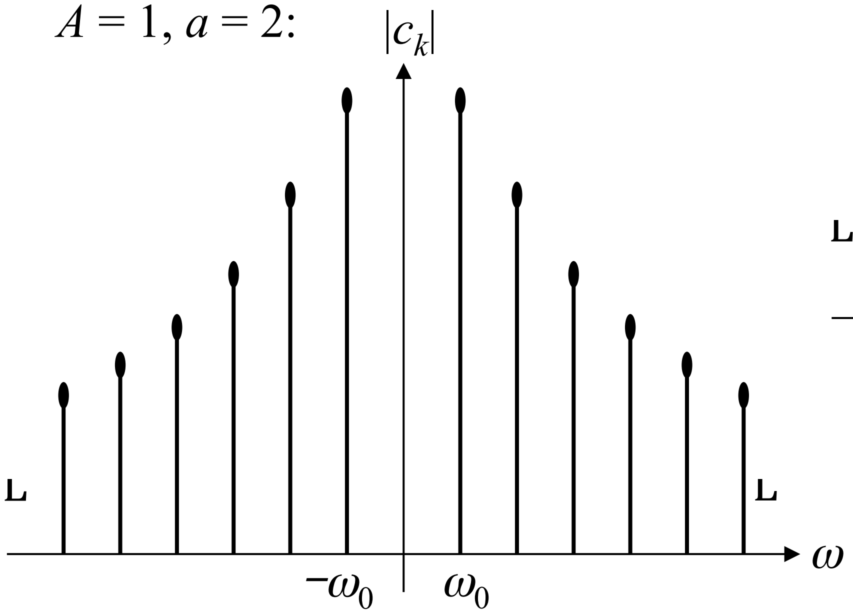
mit $e^{jk\pi} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$ lässt sich die o.g. Gleichung vereinfachen zu

$$c_k = \frac{A(-1)^k}{2\pi(a+jk)}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) = \frac{A(-1)^k}{\pi(a+jk)}\sinh(a\pi)$$

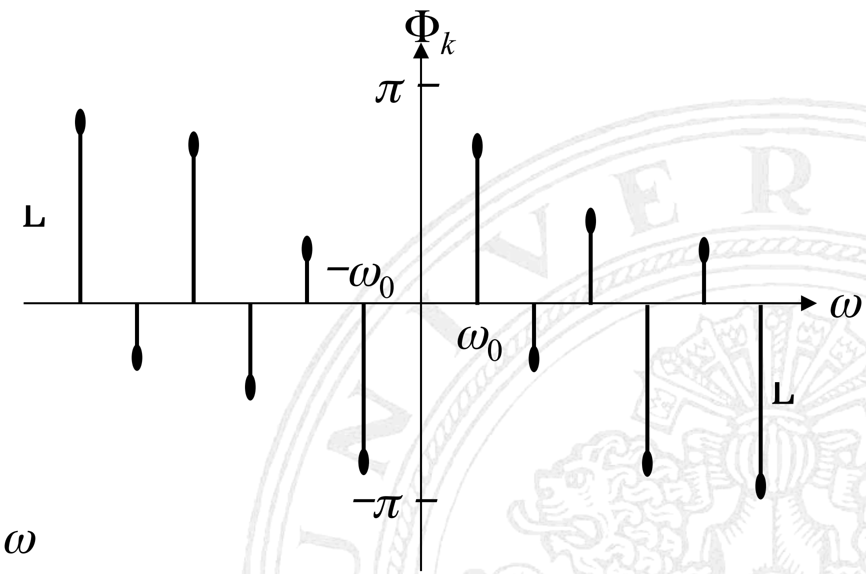
Damit erhält man

- für den Betrag (Amplitude) $|c_k|$: $|c_k| = \dfrac{A \cdot \sinh(a\pi)}{\pi\sqrt{a^2 + k^2}}$
- für die Phase Φ_k: $\Phi_k = \begin{cases} -\arctan\frac{k}{a}, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \pi - \arctan\frac{k}{a}, & \text{für } k \text{ ungerade und positiv} \\ -\pi - \arctan\frac{k}{a}, & \text{für } k \text{ ungerade und negativ} \end{cases}$

$A = 1,\ a = 2$:



diskretes Amplitudenspektrum



diskretes Phasenspektrum

Motivation

bisher: Approximation periodischer Signale ergab in der Frequenzdarstellung diskrete Spektren definiert durch Amplituden- und Phasenwerte jeweils als Funktionen der Ortsfrequenz, die wiederum jeweils um ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ansteigt.

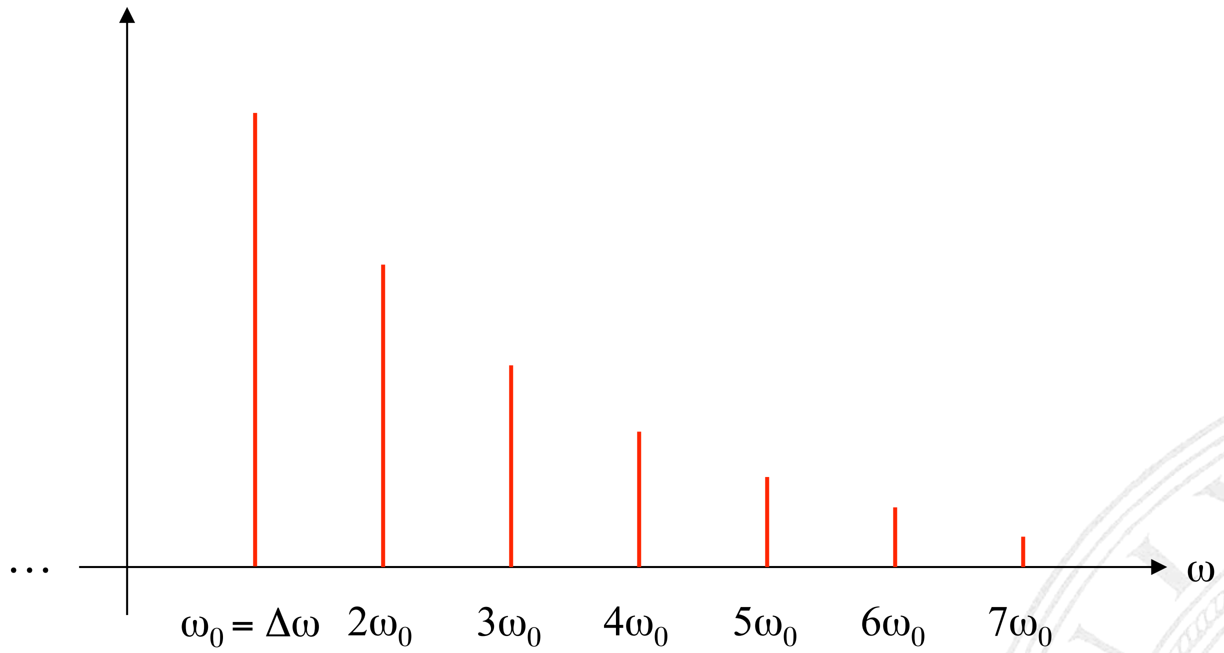
Nichtperiodische Signale können als periodische Signale aufgefasst werden, deren Periodendauer gegen unendlich und deren Wiederholfrequenz somit gegen Null strebt.

Zeichnet man die Spektrallinien für mehrere Signale unterschiedlicher Wiederholfrequenz im gleichen Maßstab auf, so rücken die einzelnen Linien umso näher zusammen, je größer die Periodendauer des Signals ist.

Die Größe $\Delta\omega = \omega_0$ (Grundkreisfrequenz, mit Periode $T = 2\pi/\omega_0$) strebt bei immer größer werdender Periode T gegen Null, $\Delta\omega \rightarrow 0$.

Die Spektrallinien sind damit nicht mehr nur an diskreten Punkten $k \cdot \omega_0$, sondern für den gesamten Bereich $-\infty < \omega < \infty$ definiert.

Eine nichtperiodische Funktion kann demnach als Überlagerung unendlich vieler harmonischer Schwingungen gedacht werden, deren Kreisfrequenzen unendlich dicht beieinander liegen und somit kontinuierlich über den gesamten Frequenzbereich verteilt sind.



$\Delta\omega \to 0$: Amplituden<u>dichte</u>spektrum (folgt aus diskretem Linienspektrum)

Ableitung der Fouriertransformation aus der Fourierreihe

Die Fourierreihe in komplexer Schreibweise lautete $s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cdot e^{jm\omega_0 t}$,

mit den Koeffizienten $c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt.$

Ein periodisches Signal der Periode T besteht aus einer Summe von Teilschwingungen

mit Frequenzen im Abstand von $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$

Es ist außerdem $T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{\Delta f}$ $(\Rightarrow \omega_0 = 2\pi \cdot \Delta f,\ T \cdot \Delta f = 1)$

Die <u>komplexe Fourierreihe</u> kann damit geschrieben werden in der Form

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{\Delta\omega} \cdot e^{jm\Delta\omega t} \Delta\omega,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{\Delta f} \cdot e^{jm\Delta\omega t} \Delta\omega$$

sowie die Koeffizienten in der Form

$$\frac{c_m}{\Delta f} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-jm\Delta\omega t} dt$$

Grenzfall $T \to \infty$ und somit $\Delta\omega \to 0$

Aus dem periodischen Signal wird ein nicht-periodisches Signal; man erhält aus der o.g. Gleichung die von ω ($\omega = m \cdot \Delta\omega$) abhängige Funktion

$$\boxed{\underbrace{F(\omega)}_{j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt}$$

(Fourier-Transformierte der (nicht-periodischen) Funktion $s(t)$)

Aus $\lim\limits_{T \to \infty} \left(\frac{2\pi}{T} = \omega_0 = \Delta\omega \right) = 0$ mit $\frac{c_m}{\Delta f} = F(\omega)$ folgt

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega}$$

(Fourier-Rücktransformierte der Funktion $F(\omega)$ oder auch inverse FT)

Durch Aufteilung der Faktoren in $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ auf die beiden Gleichungen erhält man die ebenso gebräuchlichen Transformationsvorschriften für die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation.

Zusammenfassung/Übersicht: 1-D Fouriertransformation

Für die Gleichungen unter Verwendung der Operatoren F{ } und F $^{-1}${ } gilt:

$$\mathrm{F}\left\{f(t)\right\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt$$

$$\mathrm{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \exp(j\omega t)\, d\omega$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathrm{F}^{-1}\left\{\mathrm{F}\left\{f(t)\right\}\right\}$$

$F(\omega)$	$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt$
$f(t)$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \exp(j\omega t)\, d\omega$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \exp(j\omega t)\, d\omega$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \exp(j\omega t)\, d\omega$

$F(\omega)$ ist das Spektrum von $f(t)$

Kurzschreibweise: F{$f(t)$} = $F(\omega)$ und F $^{-1}${$F(\omega)$} = $f(t)$

ODER $f(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$ (Korrespondezsymbol, auch: $\circ\!\!-\!\!-$ (Mildenberger)

$\vdash\!\!-\!\!-$ (Unbehauen) $\supset$ (Bracewell))

Existenz der Fouriertransformation

Integraltheorem von Fourier:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt\right)\cdot e^{j\omega t}d\omega = \begin{cases} f(t) & \\ \frac{1}{2}\left(f(t_+) + f(t_-)\right) & \text{(an Unstetigkeitsstellen)} \end{cases}$$

<u>Bedingungen für die Existenz des Integrals</u>:

1. *absolute Integrierbarkeit*, d. h. es existiert ein $M < \infty$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < M < \infty$$

2. die Anzahl der Diskontinuitäten von $f(t)$ ist endlich.

! <u>Hinweis</u>:

(1.) ist eine hinreichende, jedoch keine notwendige Bedingung für die Existenz von $F(\omega)$. Es gibt Zeitfunktionen, die nicht absolut integrierbar sind und dennoch Fouriertransformierte besitzen, z. B. $\sin(x)$, $\cos(x)$.