

## 64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

### Gliederung:

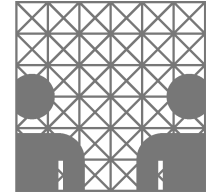
- Teil I: Einleitung, Wurzeln, Grundbegriffe
- Teil II: Fourierreihenentwicklung, Fourieranalyse
- Teil III: Komplexe Fourierreihe, Fouriertransformation
- Teil IV: Faltung, Abtastung, Korrelation**
- Teil V: Eigenschaften und Theoreme der Fouriertransformation
- Teil VI: n-dim. Fouriertransformation, Faltung und Korrelation
- Teil VII: Gabor- und Wavelet-Transformation, Multiskalenanalyse
- Teil VIII: Sensoren, Rauschen, Rauschreduktion
- Teil IX: Diffusionsgleichungen
- Teil X: Bildfolgenanalyse, Bewegungsschätzung
- Teil XI: Registrierung, Extraktion von Landmarken
- Teil XII: Nichtlineare Deformation, Fusion
- Teil XIII: Signalverarbeitung auf Diskreten Oberflächen



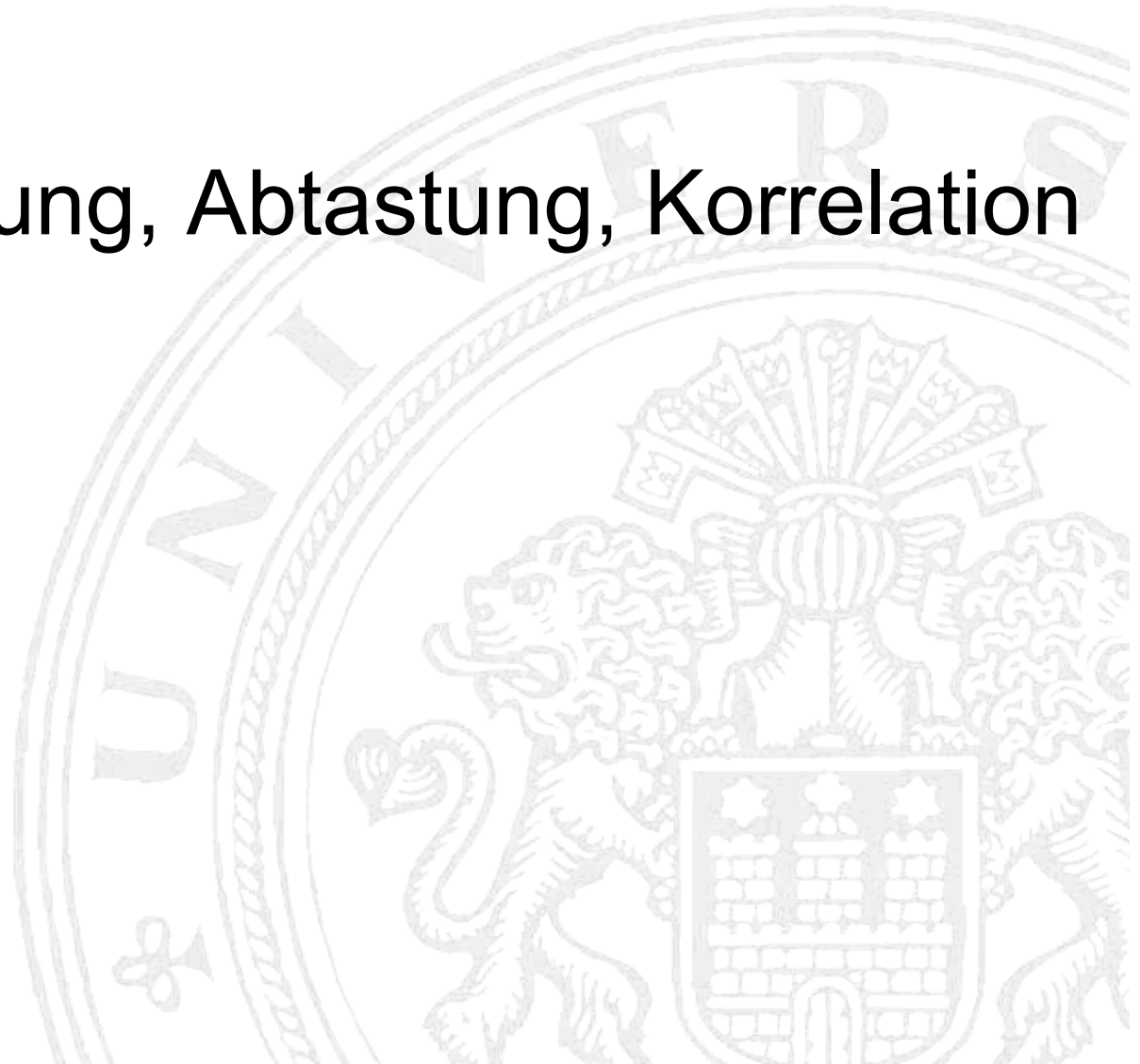
Universität Hamburg

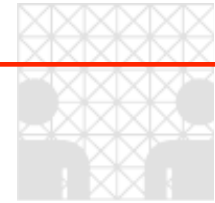
Department  
Informatik

Arbeitsbereich  
Kognitive Systeme (KOGS)



# Teil IV: Faltung, Abtastung, Korrelation

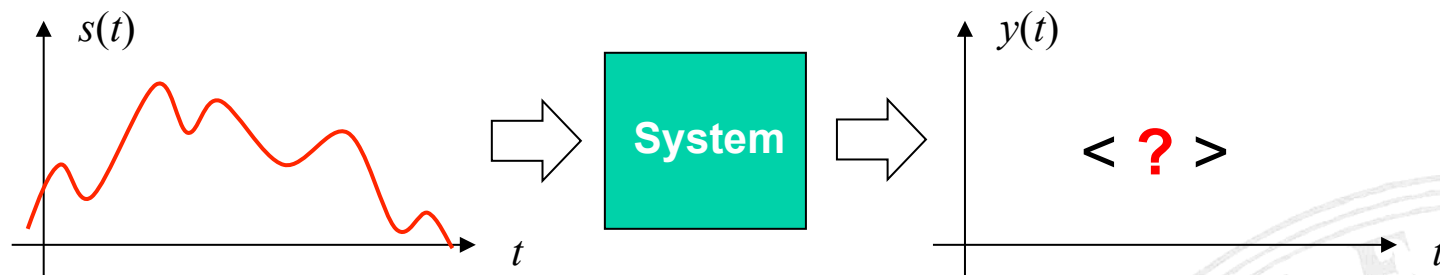




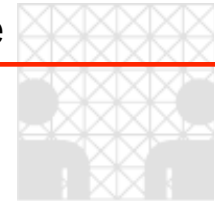
# Elementare Signale

## Motivation

Zielsetzung ist die Beantwortung der Frage, wie sich ein Signal bei der Übertragung über ein System (Nachrichtenkanal, Verstärker, "black box", ...) verhält.



Hierzu werden einfache, in ihrem Verlauf vollständig bekannte Signale  $s(t)$  angegeben und der zeitliche Verlauf der Ausgangssignale  $y(t)$  berechnet.



## Elementarsignale

Sinus-Signal  $s(t) = \sin(\omega t)$

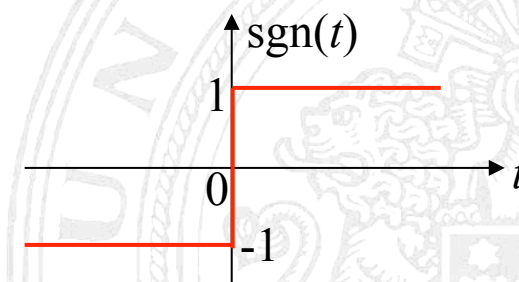
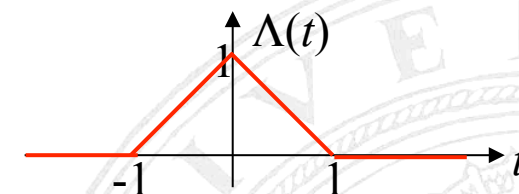
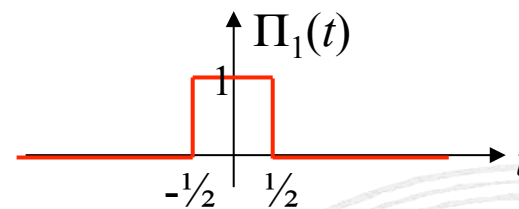
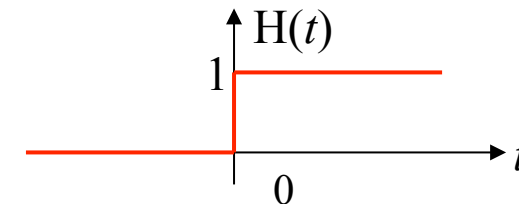
GAUß-Signal  $s(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$

Sprungfunktion  
(HEAVISIDE-Fkt.)  $s(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ 1, & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

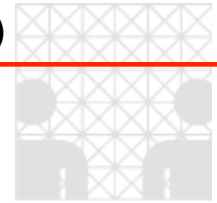
Rechteckimpuls  $s(t) = \Pi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

Dreieckimpuls  $s(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$

Signum-Funktion  $s(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{für } t < 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases}$







## Signaltransformationen (Koordinatentransformationen)

- Verschiebung

Verschiebung um den Faktor  $t_0$

durch Ersetzen der Zeitkoordinate  $t$

... nach rechts

... durch  $t - t_0$

... nach links

... durch  $t + t_0$

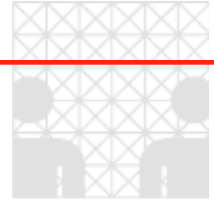
- Dehnung (und Zeitspiegelung)

zeitliche Dehnung um den Faktor  $T$  durch Ersetzen der Zeitkoordinate  $t$  durch  $\frac{t}{T}$

Es gilt: für  $|T| > 1$  wird das Signal breiter (Dehnung)

für  $|T| < 1$  wird das Signal schmaler (Stauchung)

Negative Dehnfaktoren ( $T < 0$ ) spiegeln das Signal zusätzlich an der Ordinate.



# Faltung

## Voraussetzungen

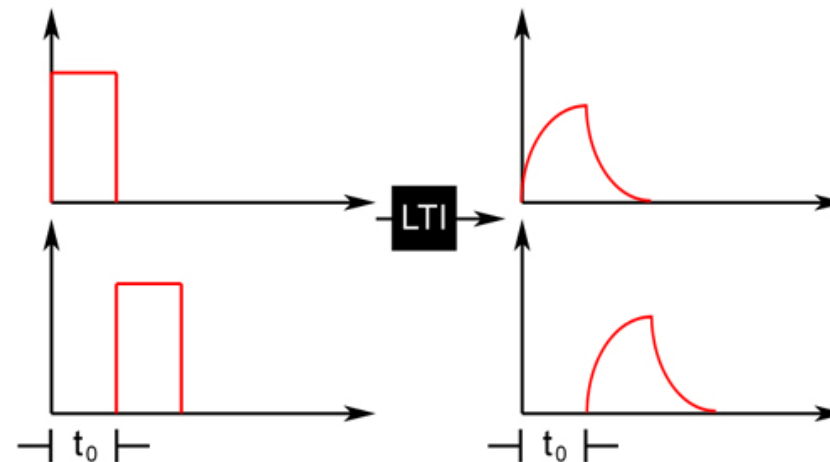
LTI-System, d.h.

- Lineares System (d.h. Superpositionssatz ist erfüllt)

$$T\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i T\{s_i(t)\} = \sum_i a_i g_i(t), \quad T: \text{Transformation}$$

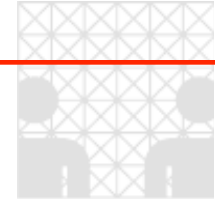
- Zeitinvariantes System

$$T\{s(t - t_0)\} = g(t - t_0)$$



## Motivation

Bestimmung einer für LTI-Systeme allgemeingültigen Transformationsgleichung



## Elementare Systemeigenschaften

- Sprungantwort und Impulsantwort

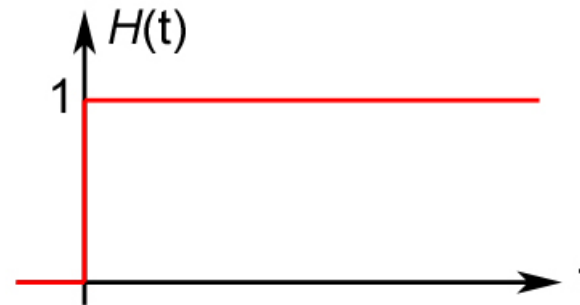
Systeme werden hinsichtlich ihrer Eigenschaften (z. B. Übertragungsverhalten) mittels ihrer Sprung- und Impulsantwort charakterisiert!

(i) Eingangssignal:

Sprung„funktion“  $s(t) = H(t)$

Reaktion des Systems:

Sprungantwort  $T\{H(t)\} = h(t)$

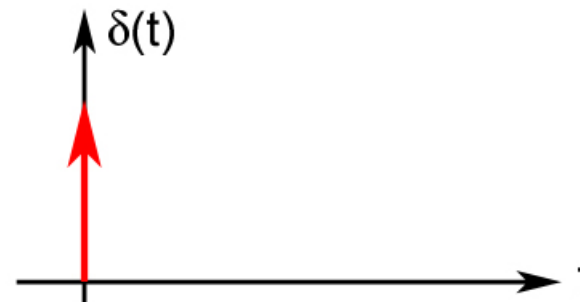


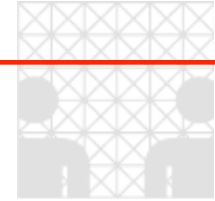
(ii) Eingangssignal:

Impuls„funktion“  $s(t) = \delta(t)$

Reaktion des Systems:

Impulsantwort  $T\{\delta(t)\} = g(t)$   
(auch Stoßantwort)



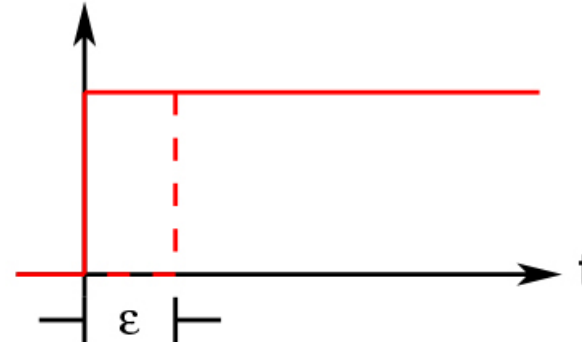


⇒ Impulsantwort eines Systems ist die Ableitung seiner Sprungantwort!

Herleitung:

Näherungsweise Darstellung von  $\delta(t)$  durch

$$\Delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} s(t) - \frac{1}{\varepsilon} s(t - \varepsilon)$$



Unter Verwendung der Linearitätseigenschaften und mit  $s(\bullet) = H(\bullet)$  gilt:

$$\begin{aligned} g(t) &\approx T\{\Delta(t)\} = \frac{1}{\varepsilon} (T\{H(t)\} - T\{H(t - \varepsilon)\}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (h(t) - h(t - \varepsilon)) = \frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon}; h(t): \text{Sprungantwort} \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt} = g(t) \quad \blacksquare$$

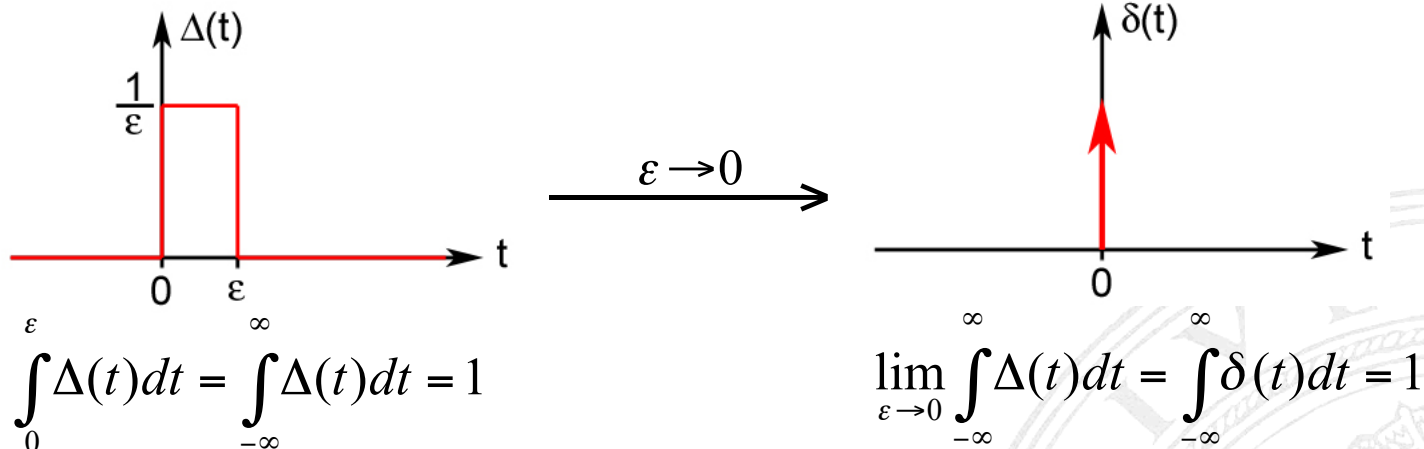


- Eigenschaften der Impulsfunktion

Impulsfunktion (oder DIRAC-Stoß oder DIRACsche Deltadistribution<sup>1</sup>  $\delta(t)$ ) ist im Gegensatz zur HEAVISIDE<sup>2</sup>-Funktion  $H(t)$  keine Funktion im üblichen Sinn, sondern es handelt sich um eine sog.

**Distribution** oder **verallgemeinerte Funktion**.

Symbolische Darstellung und Definition:

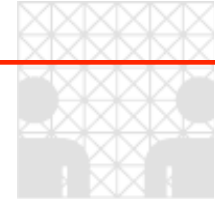


Impulsfunktion ist eine gerade verallgemeinerte Funktion (strukturloser Einheitsimpuls)

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

<sup>1</sup> benannt nach PAUL ADRIAN MAURICE DIRAC (1902 – 1984), engl. Physiker;

<sup>2</sup> benannt nach OLIVER HEAVISIDE (1850 – 1925), engl. Physiker



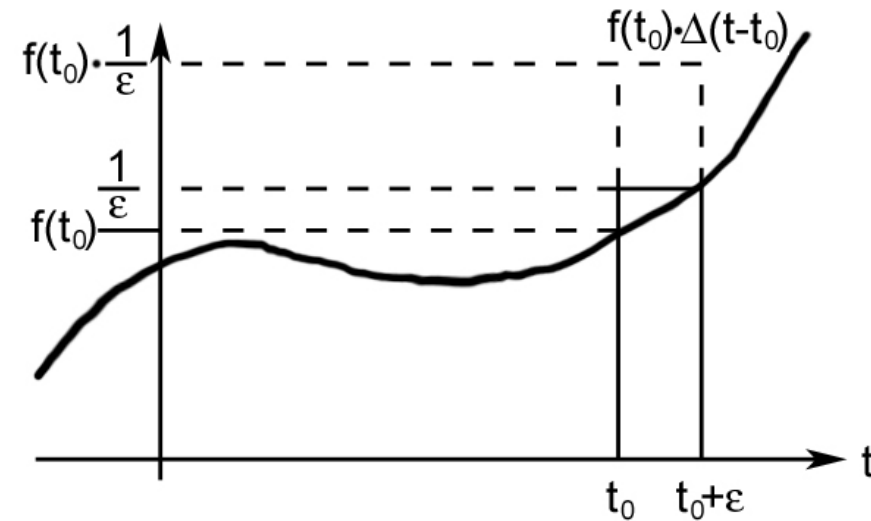
Es gelten:

- (i) geg.: eine Fkt.  $f(t)$  im üblichen Sinne,  
es gilt dann:

$$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

Für  $t_0 = 0$ :

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

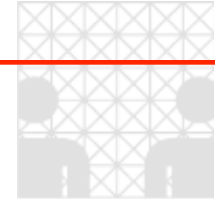


- (ii) Ausblend- (*Sieb-*) Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

heißt Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion bzw. des DIRAC-Stoßes.

Beweis  $\Rightarrow$

Beweisführung:

- Ersetzen von  $t$  durch  $\tau$  und  $t_0$  durch  $t$  in

$$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t-t_0) \quad (\text{s.o.})$$

ergibt  $(t \rightarrow \tau, t_0 \rightarrow t)$

$$f(\tau) \cdot \delta(\tau-t) = f(t) \cdot \delta(\tau-t)$$

- Impulsfunktion ist gerade, d. h. das Vorzeichen des Arguments kann vertauscht werden  $-(\tau-t) = t-\tau$ :

$$f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) = f(t) \cdot \delta(t-\tau)$$

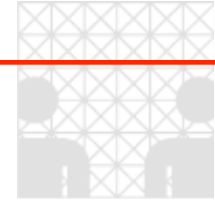
- Ersetzen des Integranden ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau}_{=1}$$

Sonderfall für  $t = 0$  (mit  $\delta(\tau) = \delta(-\tau)$ )

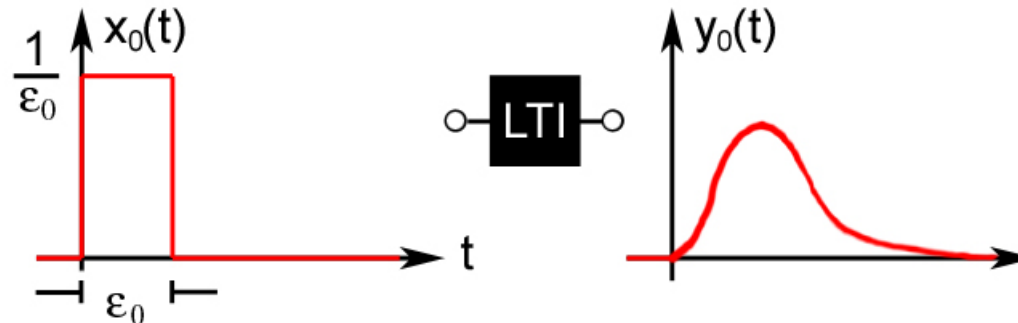
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(-\tau) d\tau = f(0)$$





## Faltungsintegral

geg.: ein LTI-System reagiere auf einen Rechteckimpuls  $x_0(t)$  der Dauer  $\varepsilon_0$  und der Höhe  $\frac{1}{\varepsilon_0}$  mit dem Ausgangssignal  $y_0(t)$



Bei Normierung auf konstante Fläche des Eingangssignals bleibt auch die Fläche des Ausgangssignals für beliebige  $\varepsilon_0$  konstant ( $\rightarrow$  Energie eines Signals).

gesucht: Reaktion  $y(t)$  dieses Systems auf beliebiges Eingangssignal  $x(t)$

(näherungsweise Bestimmung mittels der bekannten  $y_0(t)=T\{x_0(t)\}$ -Beziehung)

Lösung: (näherungsweise)

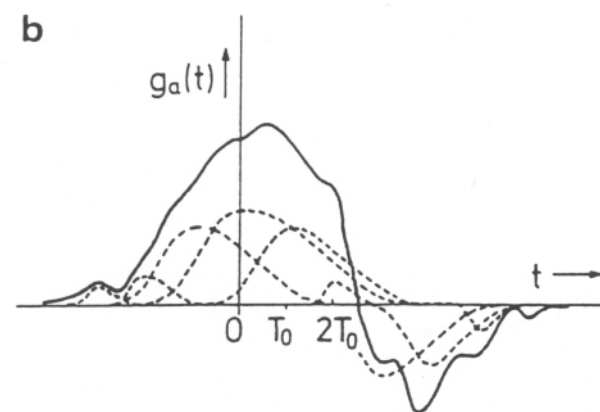
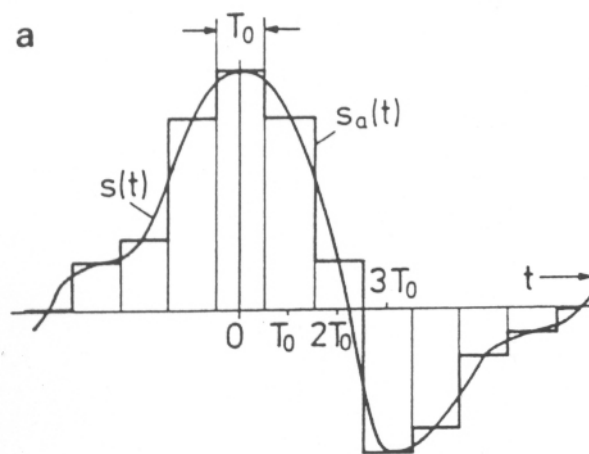
- Approximation des geg. Signals  $x(t)$  durch Treppenfkt.  $x_a(t)$ , die sich aus entsprechend amplitudenbewerteten und zeitverschobenen Rechteckimpulsen zusammensetzt.

- Multiplikation des verwendeten Rechteckimpulses der Höhe  $\frac{1}{\varepsilon_0}$  mit  $x(k \cdot \varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0$ , um zum Zeitpunkt  $k \cdot \varepsilon_0$  die Amplitude  $x(k \cdot \varepsilon_0)$  der zu approximierenden Funktion anzunehmen. Es ergibt sich somit

$$x(t) \approx x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot \varepsilon_0) \cdot x_0(t - k \cdot \varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0$$

- Entsprechend dem Superpositionssatz und der Zeitinvarianzeigenschaft reagiert das LTI-System auf  $x_a(t)$  mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot \varepsilon_0) \cdot \underbrace{y_0(t - k \cdot \varepsilon_0) \cdot \varepsilon_0}_{T\{x_0(t - k\varepsilon_0)\}} = y_a(t) \approx y(t)$$



(aus Lüke, 1988)



- Das Eingangssignal  $x(t)$  wird nun umso genauer durch  $x_a(t)$  approximiert, je geringer die Dauer  $\varepsilon_0$  des Rechteckimpulses ist — entsprechend wird sich bei Verkleinerung von  $\varepsilon_0$  auch das Ausgangssignal  $y_a(t)$  der Systemreaktion  $y(t)$  nähern.

Grenzübergang: Summen gehen in Integrale über und es gelten die neuen Beziehungen:

$$x_0(t) \longrightarrow \delta(t)$$

$$y_0(t) \longrightarrow g(t)$$

$$k \cdot \varepsilon_0 \longrightarrow \tau$$

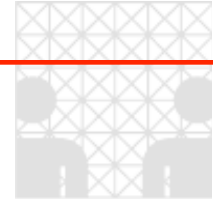
$$\varepsilon_0 \longrightarrow d\tau$$

⇒ 2 Faltungsintegrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (\rightarrow \text{Ausblendeigenschaft, s.o.})$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \underbrace{g(t - \tau)}_{\text{Stoß-/Impulsantwort des LTI-Systems!}} d\tau \quad (\rightarrow \text{Herleitung der Impulsantwort, s.o.})$$

→ Stoß-/Impulsantwort des LTI-Systems!



- Faltungsprodukt

Das Faltungsintegral  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$ , das die Reaktion  $y(t)$  eines LTI-Systems anhand seiner Stoßantwort  $g(t)$  und dem Eingangssignal  $s(t)$  ( $= x(t)$ ) beschreibt, kann in symbolischer Schreibweise durch das Faltungsprodukt dargestellt werden

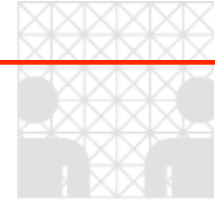
$$y(t) = s(t) * g(t) \quad (\text{lies: } s(t) \text{ gefaltet mit } g(t))$$

Ebenso gilt (vgl. erstes Faltungsintegral)

$$s(t) = s(t) * \delta(t)$$

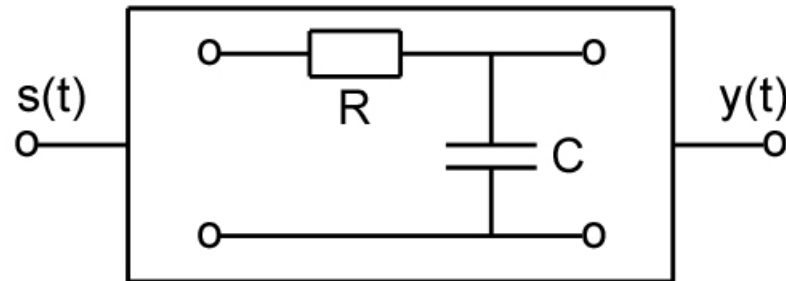
( $\Rightarrow$  ideal verzerrungsfreies System)

Das Operationszeichen `\*` (auch `⊗`) heißt Faltungs- oder Konvolutionsoperator!



- Beispiel und grafische Darstellung einer Faltung

Geg.:  $RC$ -Zweitor ( $R$ : Widerstand,  $C$ : Kapazität, Kondensator)



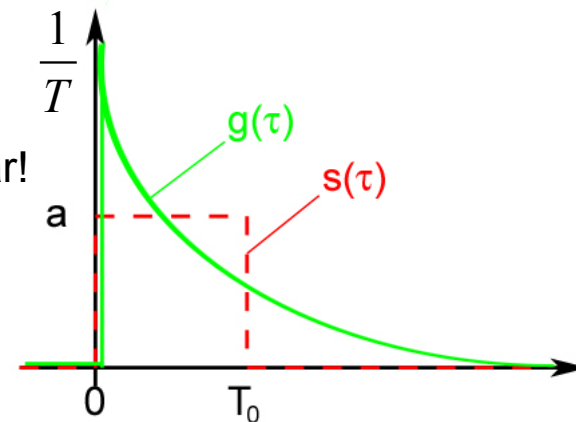
Die Stoßantwort dieses Systems hat die Form eines abfallenden Exponentialimpulses

$$\text{mit } h(t) = \frac{1}{T} \cdot \Theta(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Gesucht: Reaktion des  $RC$ -Systems auf ein Rechtecksignal der Dauer  $T_0$  und der Amplitude  $a$

Als Integrationsvariable (im Faltungsintegral) „läuft“ die Zeit  $\tau$ , die Zeit  $t$  stellt einen festen Parameter dar!

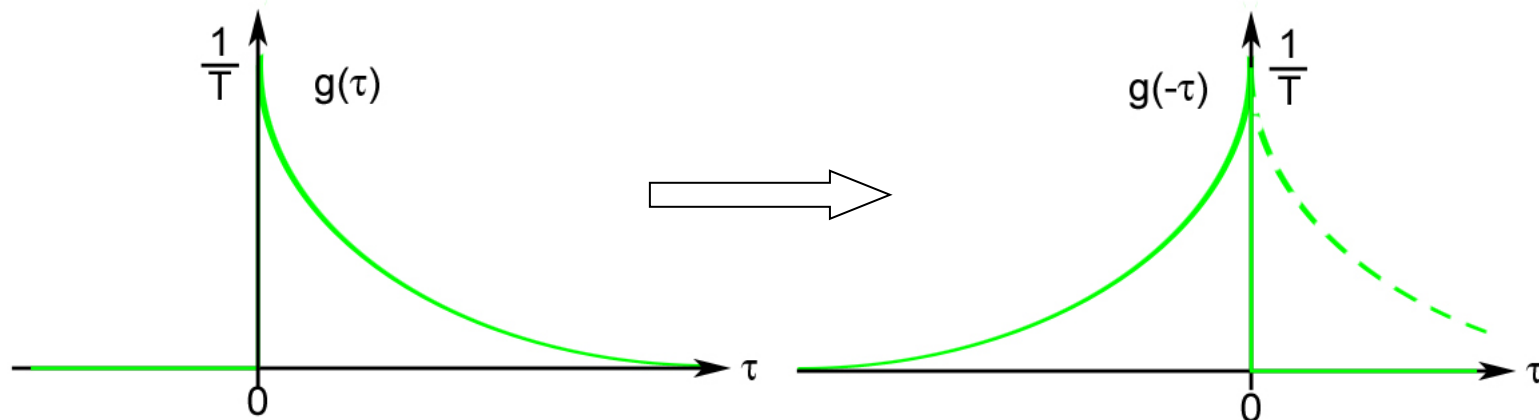
⇒ Die Funktionen  $s(\cdot)$  und  $g(\cdot)$  sind über die Zeit  $\tau$  darzustellen





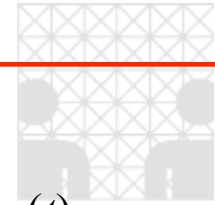
### Veranschaulichung des Funktionsverlaufs

- Der Verlauf der Stoßantwort  $g(t-\tau)$  über  $\tau$  lässt sich verstehen, wenn für den Spezialfall  $t = 0$  die Funktion  $g(-\tau)$  über  $\tau$  dargestellt wird.  
 $g(-\tau)$  wird aus  $g(\tau)$  gewonnen, indem der Verlauf von  $g(\tau)$  an der Ordinate gespiegelt wird.



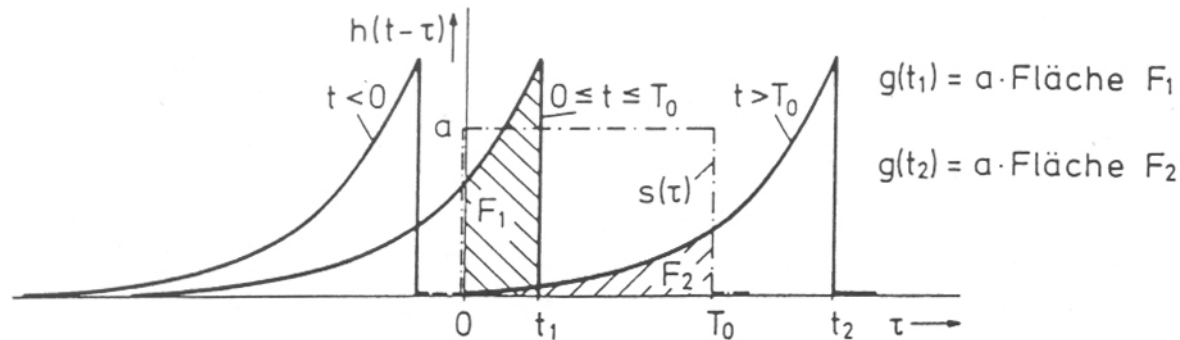
(Diese Spiegelung (= Faltung) begründet die Namensgebung „Faltungsintegral“!)

- Für verschiedene Zeiten  $t$  wird nun der Graph von  $g(-\tau)$  nach rechts ( $t > 0$ ) bzw. links ( $t < 0$ ) verschoben.



### Herleitung des Faltungsergebnisses als Systemantwort

- Bestimmung der zeitlichen Grenzen, in denen das Produkt  $s(\tau) \cdot g(t-\tau) = y(t)$  im Faltungsintegral (*Fläche*) von Null verschieden ist: Fallunterscheidung

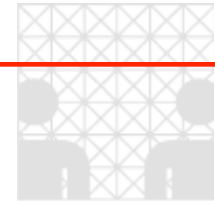


$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 & (1) \\ \int_0^t s(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau, & \text{für } 0 < t \leq T_0 & (2) \\ \int_0^{T_0} s(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau, & \text{für } t > T_0 & (3) \end{cases}$$

(für  $0 < t \leq T_0$  ist das Produkt  $s(\tau) \cdot g(t-\tau)$  nur innerhalb des Intervalls  $0 < \tau < t$  von Null verschieden!  
→ Integrationsgrenzen)

(das Produkt ist nur innerhalb des festen Intervalls  $0 < \tau \leq T_0$  von Null verschieden)





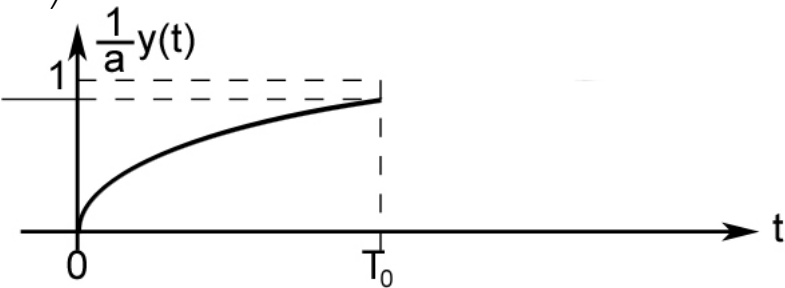
- Systemantwort:

(1) trivialer Fall

$$(2) \quad y(t) = \int_0^t a \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = \frac{a}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \quad \left( \int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \right)$$

$$= \frac{a}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left[ T \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \right]_0^t = a \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad , \text{ für } 0 < t \leq T_0$$

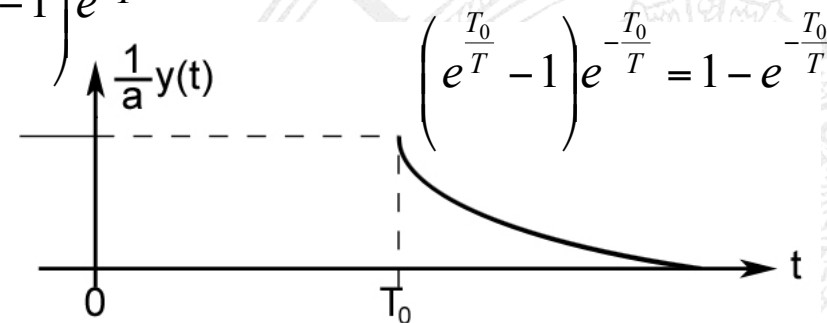
$$T \left( e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \quad 1 - e^{-\frac{T_0}{T}}$$

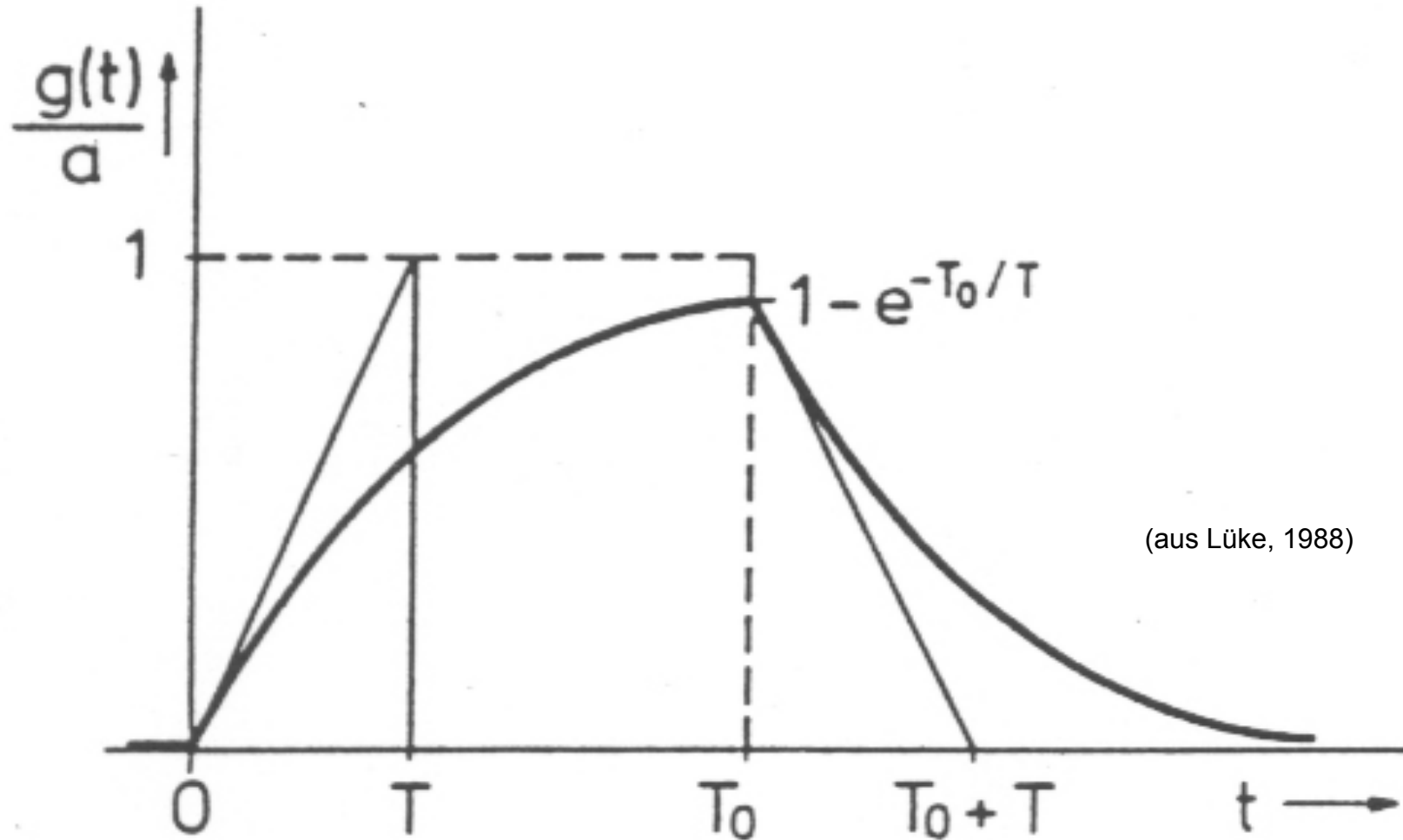
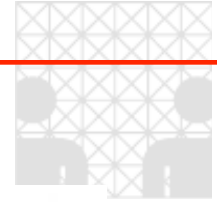


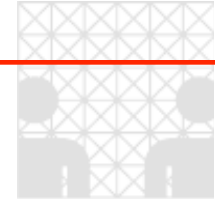
$$(3) \quad y(t) = \int_0^{T_0} a \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau$$

$$= \frac{a}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left[ T \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \right]_0^{T_0} = a \left( e^{\frac{T_0}{T}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T}}$$

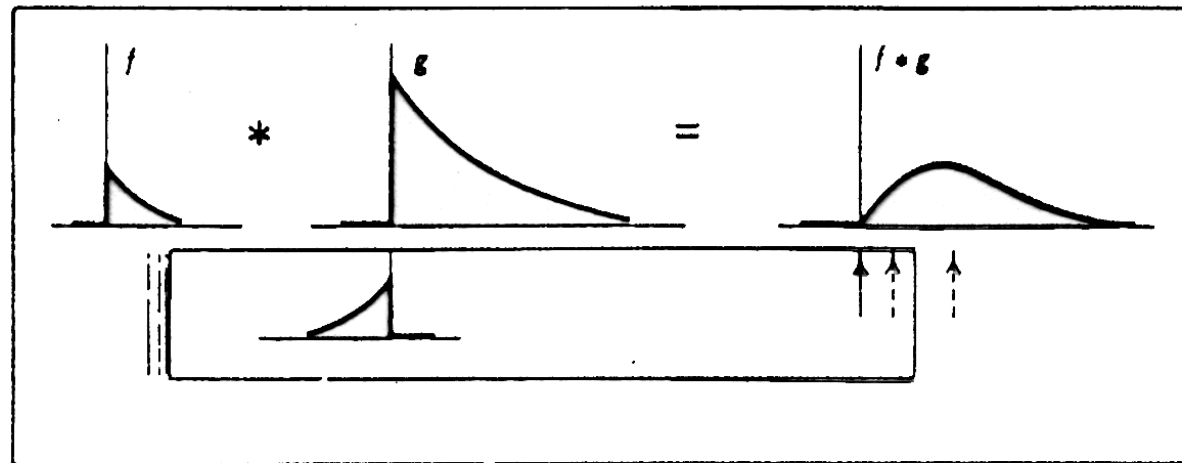
$$T \left( e^{\frac{T_0}{T}} - 1 \right)$$



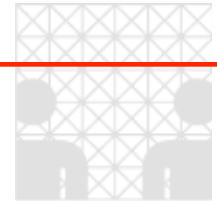




- Graphische Konstruktion der Faltung:
  - Darstellung der Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$
  - Eine der Funktionen, z.B.  $f$ , wird an der Ordinate gespiegelt (gefaltet) und auf einen Streifen Papier übertragen.
  - Die so übertragene (gefaltete) Fkt. wird unterhalb der zweiten Fkt., hier  $g$ , verschoben und die jeweiligen Ergebnisse des Faltungsintegrals in den Ergebnisgraphen für  $f * g$  übertragen.



*Fig. 3.6 Graphical construction for convolution. The movable piece of paper has a graph of one of the functions plotted backward.* (aus R.N. BRACEWELL, 1978)



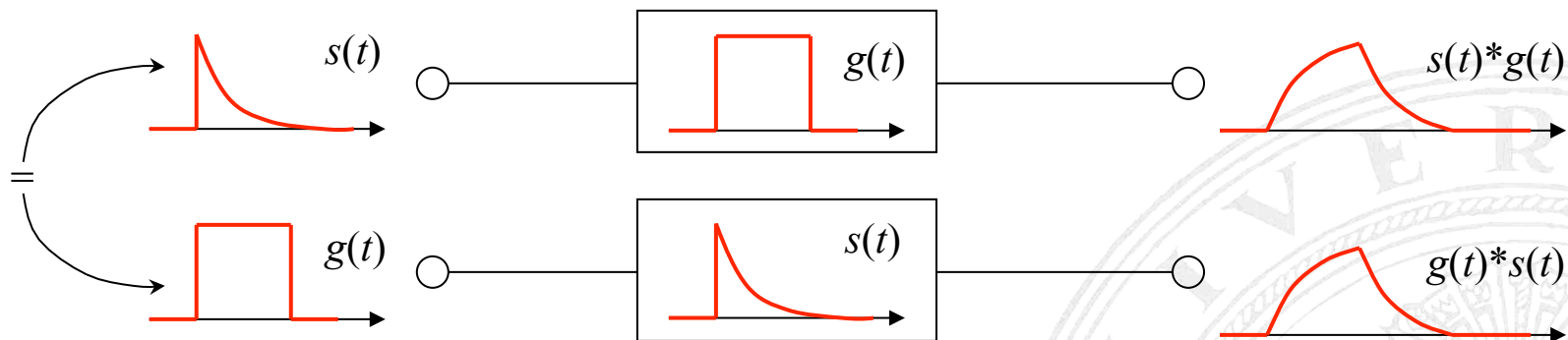
## Faltungsalgebra (Rechengesetze der Konvolution)

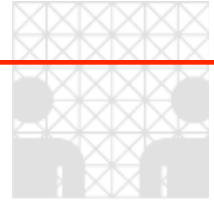
- Einselement: Dirac-Stoß  $\delta(t)$

$$s(t) * \delta(t) = s(t)$$

- Kommutativgesetz:

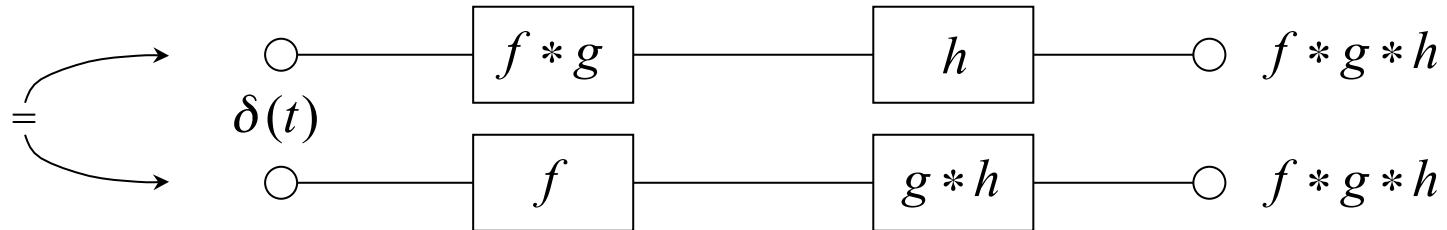
$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = h(t)$$





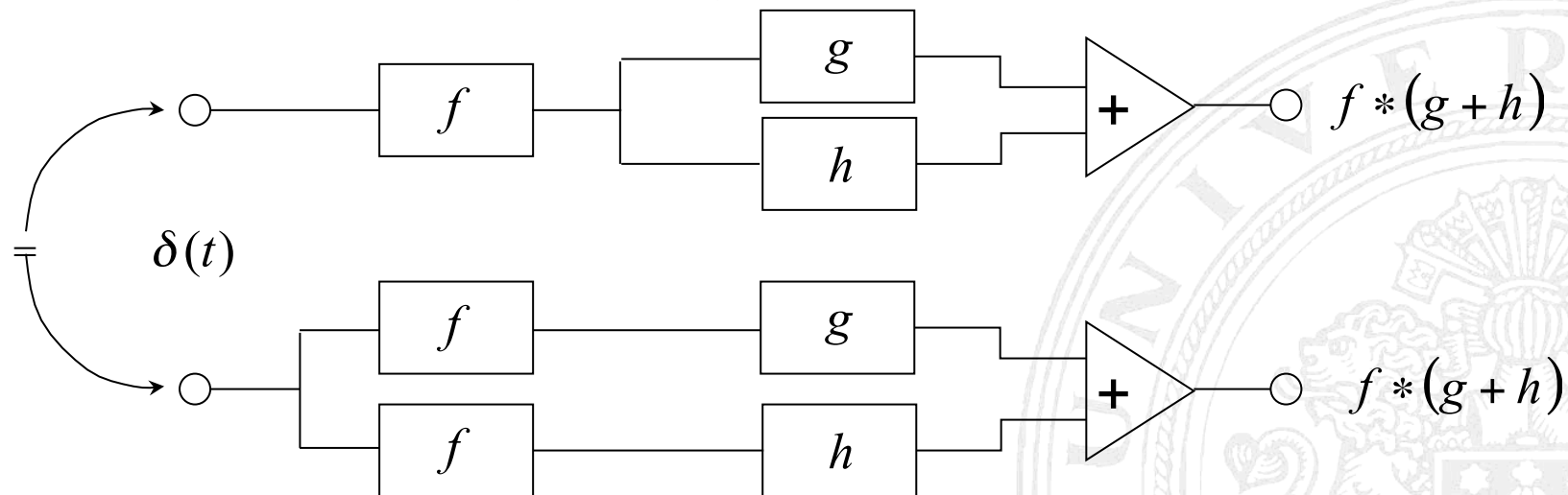
- Assoziativgesetz:

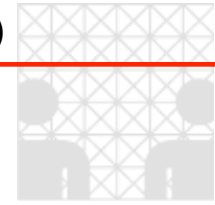
$$f(t) * g(t) * h(t) = \overbrace{(f(t) * g(t))} * h(t) = f(t) * \underbrace{(g(t) * h(t))}$$



- Distributivgesetz:

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

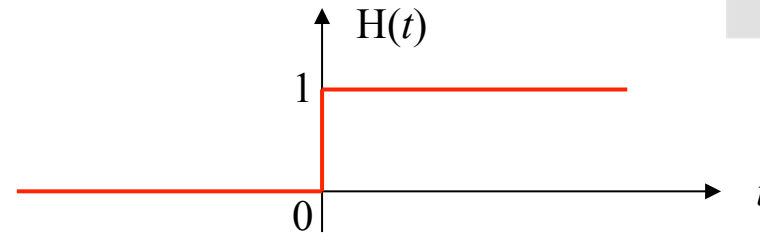




## Elementarsignale (neu betrachtet)

- Einheitssprung (HEAVISIDE-Funktion):

$$s(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ 1, & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Hinweis: In manchen Definitionen ist die HEAVISIDE-Funktion durch

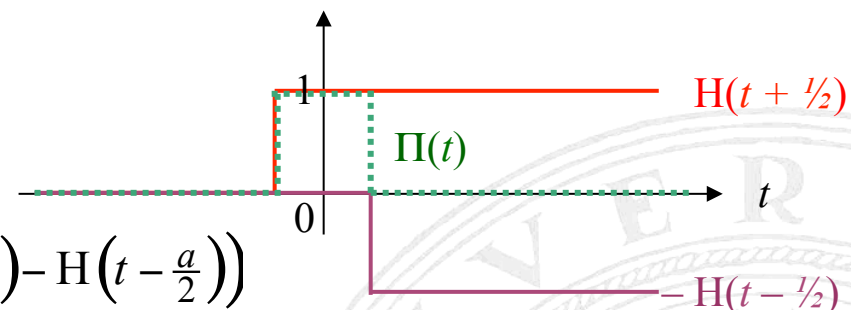
$$s(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } t = 0 \text{ festgelegt (siehe z. B. BRACEWELL, 1978, p. 57)} \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

- Rechteckimpuls:

$$\Pi_1(t) = H(t + \frac{1}{2}) - H(t - \frac{1}{2})$$

Rechteckimpuls mit variabler Breite  $a$

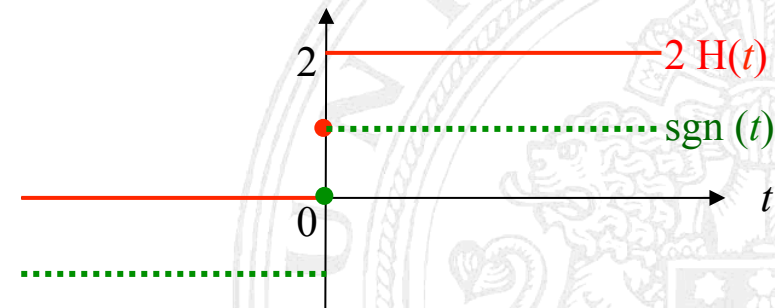
$$\text{und Einheitsfläche: } \Pi_a(t) = \frac{1}{a} \left( H\left(t + \frac{a}{2}\right) - H\left(t - \frac{a}{2}\right) \right)$$

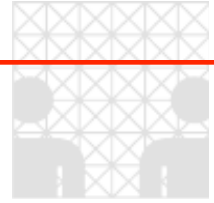


- Signum-Funktion:

$$\text{sgn}(t) = 2 H(t) - 1$$

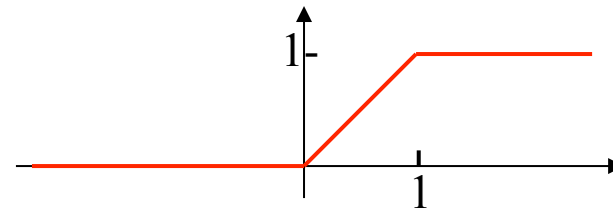
(hierzu wird o. g. erweiterte Definition der Heaviside-Funktion benötigt)





- Rampenfunktion:

$$\begin{aligned} f_{ramp}(t) &= H(t) * (H(t) - H(t-1)) \\ &= H(t) * H(t) - H(t) * H(t-1) \end{aligned}$$



Rampenfunktion mit variabler Steigung  $\alpha$  ( $\Rightarrow$  Weite  $w$ ) und konst. Kontrast  $c = 1$ :

$$f_{ramp,\alpha}(t) = H(t) * \frac{1}{w} (H(t) - H(t-w))$$

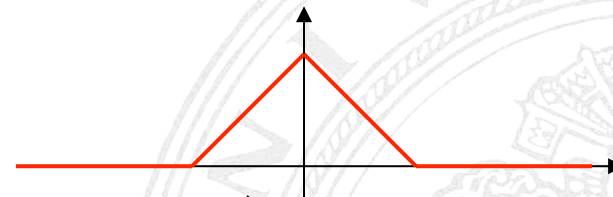
$$\tan \alpha = \frac{c}{w} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{c}{\tan \alpha}$$

$(\frac{1}{w} (H(t) - H(t-w)))f$  ist ein um  $\frac{w}{2}$  nach rechts verschobener Rechteckimpuls)

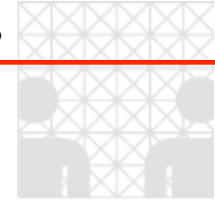
$$\lim_{w \rightarrow 0} f_{ramp,\alpha}(t) = \lim_{w \rightarrow 0} H(t) * \frac{H(t) - H(t-w)}{w} = H(t) * \delta(t) = H(t)$$

- Dreieckimpuls:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= f_{ramp}(t+1) - f_{ramp}(t) \\ &= H(t+1) * (H(t+1) - H(t)) - H(t) * (H(t) - H(t-1)) \\ &= H(t+1) * H(t+1) - H(t) * H(t) + H(t) * (H(t-1) - H(t+1)) \end{aligned}$$







## Sprungfunktion und DIRAC-Stoß

- Ableitung der Sprungfunktion ergibt den DIRAC-Impuls:

$$\Pi_a(t) = \frac{1}{a} \left( H\left(t + \frac{a}{2}\right) - H\left(t - \frac{a}{2}\right) \right) \quad \left| \quad t' = t + \frac{a}{2} \right.$$

$$\Pi_a(t') = \frac{1}{a} \left( H(t') - H(t' - a) \right)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Pi_a(t') = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{H(t') - H(t' - a)}{a} = \frac{d}{dt'} H(t') = \delta(t')$$

⇒

$$\frac{d}{dt} H(t) = \delta(t)$$

- Sprungfunktion als *Integrator*, Dirac-Impuls als *Siebfunktion*:

1) Die Konvolution mit  $H(t)$  bewirkt die Integration einer Funktion  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) * H(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot H(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

oder entsprechend

$$f(t) = \frac{d}{dt} [H(t) * f(t)]$$



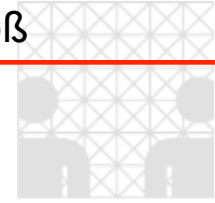
2) Der DIRAC-Stoß fungiert als Einselement der Konvolution. Es ist

$$\begin{aligned}
 f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \underbrace{\left(-\frac{d}{d\tau} H(t - \tau)\right)}_{(-1) \cdot -\delta(t - \tau) = \delta(t - \tau)} d\tau
 \end{aligned}$$

Aus partieller Integration:  $\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) \cdot H(t - \tau) d\tau - [f(\tau) \cdot H(t - \tau)]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau - \underbrace{f(\infty) \cdot H(t - \infty)}_{=0} + \underbrace{f(-\infty) \cdot H(t - (-\infty))}_{=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \\
 &= f(t)
 \end{aligned}$$

(siehe auch  $\rightarrow$  *Theoreme der Fouriertransformation*)



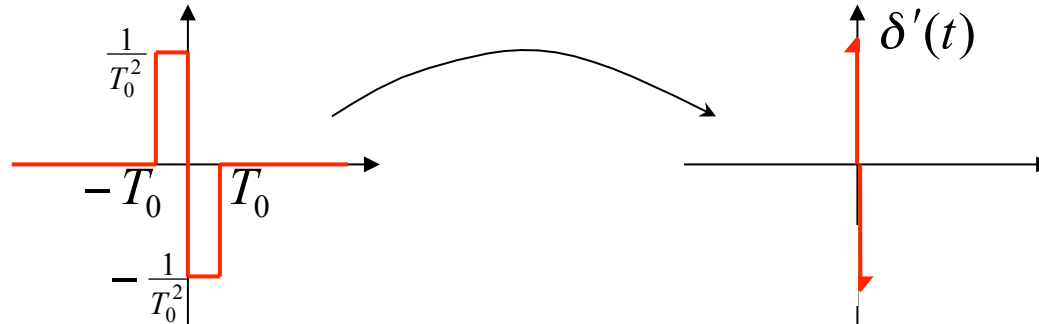
- Ableitung(en) der Impulsfunktion und die Ableitungs-Sieb-Eigenschaft:

Die 1. Ableitung des Dirac-Stoßes  $\delta(t)$  ist definiert als

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$$



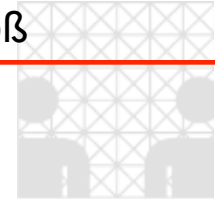
Die Ableitungs-Sieb-Eigenschaft ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f(t) * \delta'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \underbrace{\frac{d}{d\tau} \delta(t - \tau)}_{=\delta'(t - \tau) \cdot (-1)} d\tau \quad | \text{ partielle Integration} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau - \underbrace{\left[ f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0-0} \\ &= f'(t) \end{aligned}$$

Für Ableitungen höherer Ordnung gelten die Beziehungen

$$\delta^{(n)}(t) = (-1)^n \cdot n! \cdot t^{-n} \cdot \delta(t)$$

$$\delta^{(n)}(t) * f(t) = f^{(n)}(t)$$



- Dirac–Stoß mit Dehnungsfaktor („gedehnter“ Dirac-Stoß  $\delta(bt)$ )

$$f(t) * \delta(bt) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(b\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \quad | \quad \text{Substitution: } b\tau = \vartheta$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta) \cdot f\left(t - \frac{\vartheta}{b}\right) d\vartheta = \frac{1}{b} f(t), & \text{für } b > 0 \\ -\frac{1}{b} f(t), & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

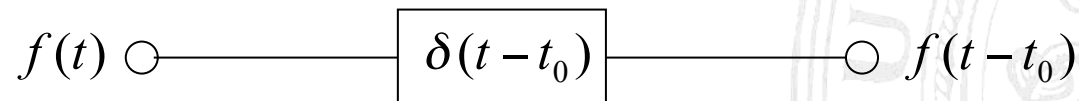
daher allgemein für  $b$ :  $f(t) * \delta(bt) = \frac{1}{|b|} f(t)$

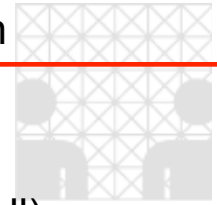
$$\Rightarrow \frac{1}{|b|} f(t) = \frac{1}{|b|} \delta(t) * f(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta(bt) = \frac{1}{|b|} \delta(t)}$$

- Verzögerung des Dirac-Stoßes (Verzögerungs-/ Totzeitglieder)

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) \cdot f(t - \tau) d\tau = f(t - t_0)$$

Fasst man  $f(t - t_0)$  als Ausgangssignal eines LTI-Systems auf, so ist das o. g. Faltungsintegral die Beschreibungsgleichung für ein LTI-System mit der Stoßantwort  $g(t) = \delta(t - t_0)$ . Solche Systeme werden ideale Laufzeitglieder genannt.





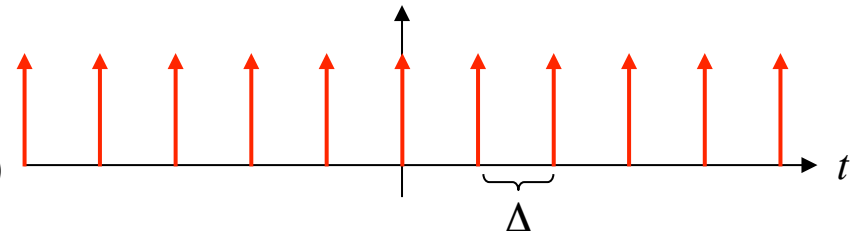
## Abtastung und Signalreplikation

Eine unendliche Folge von Impulsfunktionen, die jeweils um eine Distanz (Intervall)

$\Delta$  verschoben sind, ist als sog. SHAH – Funktion  $\text{III}(t)$  definiert:

$$\text{III}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta)$$

(Superposition verschobener Dirac-Stöße)



- Eigenschaften:

$$\text{III}(at) = \frac{1}{|a|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\Delta}{a}\right)$$

$$\text{III}(-t) = \text{III}(t)$$

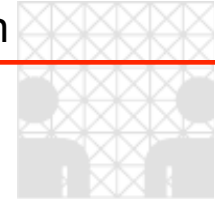
$$\text{III}(t + k\Delta) = \text{III}(t) \quad (\text{für } k \in \mathbb{N})$$

$$\text{III}\left(t - \frac{1}{2}\Delta\right) = \text{III}\left(t + \frac{1}{2}\Delta\right)$$

$$k + \frac{1}{2}\Delta$$

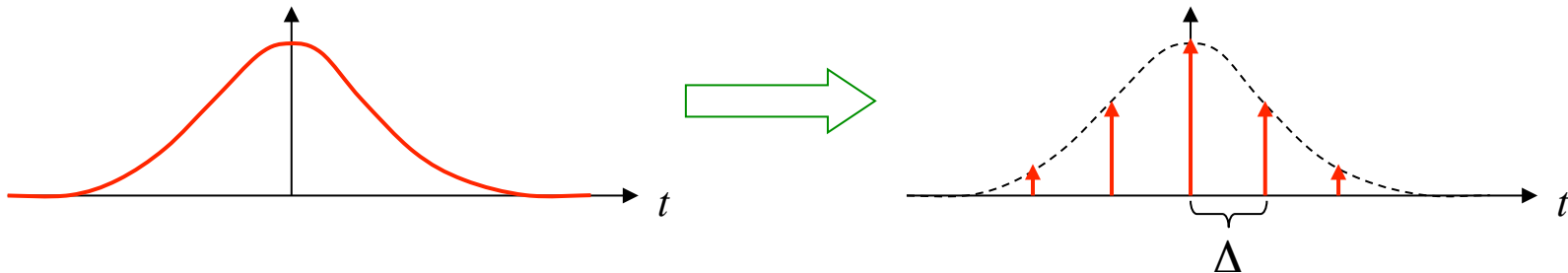
$$\int_{k - \frac{1}{2}\Delta}^{k + \frac{1}{2}\Delta} \text{III}(t) dt = 1$$

$$\text{III}(t) = 0, \quad (\text{für } t \neq k\Delta)$$



- Abtast-Eigenschaft: (verallgemeinerte Sieb-Eigenschaft)

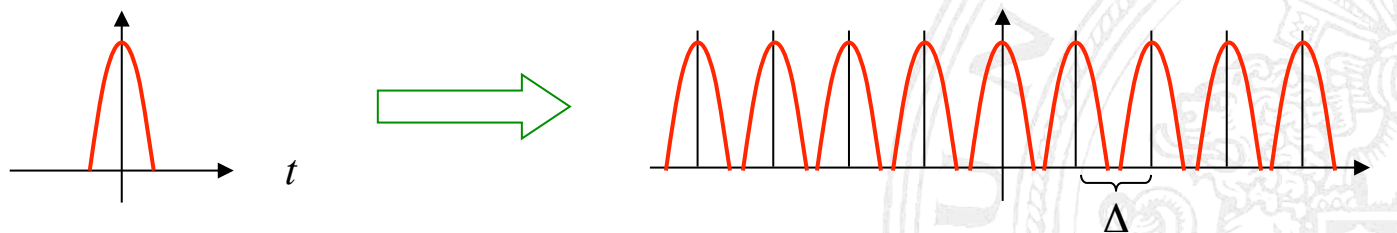
$$\perp\perp\perp(t) \cdot f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \cdot \delta(t - k\Delta)$$

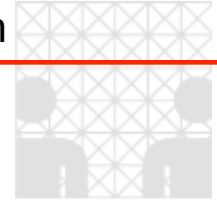


- Replikationseigenschaft:

$$\perp\perp\perp(t) * f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - k\Delta)$$

⇒ Die Funktion  $f(t)$  wird in Intervallen  $\Delta$  entlang  $t$  in beide Richtungen ad infinitum repliziert

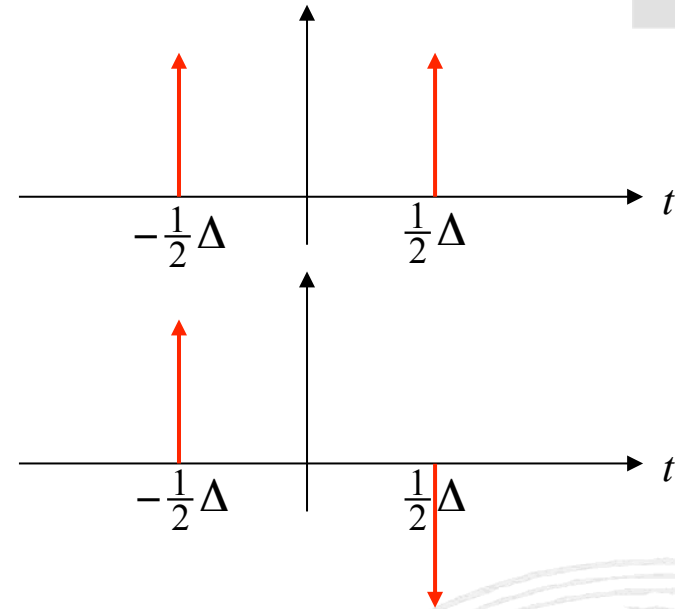




- Symmetrisches und antisymmetrisches Impulspaar:

$$\perp\perp(t) = \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{1}{2}\Delta\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\Delta\right)$$

$$\perp\top(t) = \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{1}{2}\Delta\right) - \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\Delta\right)$$



Hinweis (aus R.N. BRACEWELL, 1978):

"If the finite difference of  $f(x)$  is defined by  $\Delta f(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$ , then

$$\Delta f(x) = 2 \perp\top(x) \otimes f(x).$$

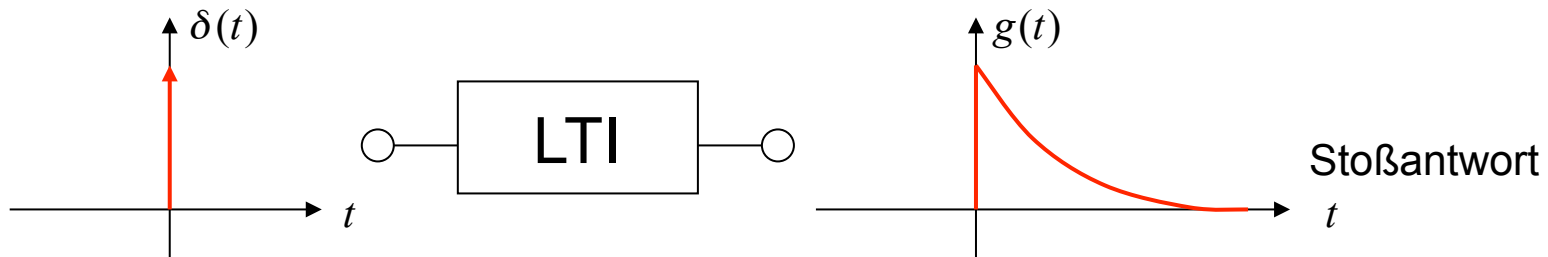
Thus the finite difference operator can be expressed as  $\Delta \equiv 2 \perp\top \otimes$ ."





## Übertragungsfunktion (Zusammenhang zwischen Konvolution und Fouriertransformation)

- Eigenfunktionen von LTI-Systemen:



Das LTI-System reagiert auf ein Eingangssignal  $s(t)$  mit  $s(t) * g(t) = y(t)$

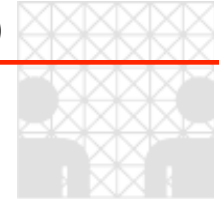
Es gibt Funktionen  $s_E(t)$ , für die bei Übertragung über beliebige LTI-Systeme gilt:

$$s_E(t) * g(t) = G \cdot s_E(t)$$

( $G$ : sog. systemabhängiger Amplitudenfaktor; Eigenwert des Systems)

Der Grundtyp derartiger Funktionen (Eigenfunktionen → *Theorie linearer DGL*) lautet:

$$\begin{aligned} s_E(t) &= e^{j\omega t} \\ &= \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow g(t) * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Übertragungsfunktion:  $G(\omega)$

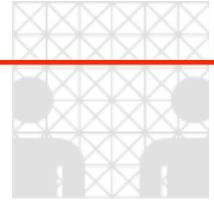
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Hintereinanderschaltung von LTI-Systemen mit Stoßantworten  $g_1(t)$  bzw.  $g_2(t)$ ; die Systemreaktion auf Eigenfunktion  $s_E(t)$  lautet:

$$\begin{aligned} [s_E(t) * g_1(t)] * g_2(t) &= [G_1(\omega) \cdot s_E(t)] * g_2(t) \\ &= G_1(\omega) \cdot G_2(\omega) \cdot s_E(t), \end{aligned}$$

d.h. anstelle des Faltungsproduktes von Stoßantworten genügt es, bei Erregung mit  $s_E(t)$  das Produkt der Übertragungsfunktionen zu bilden.

**!** Diese einfache Beziehung gilt zunächst nur für die Übertragung von Signalen in Form der Eigenfunktionen!



- Fourier-Integral

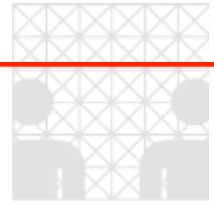
Unter best. Voraussetzungen (die für alle hier verwendeten Signalfunktionen und verallgemeinerten Funktionen gültig sind) lässt sich  $g(t)$  aus ihrer Fourier-Transformierten  $G(\omega)$  zurückgewinnen, wenn diese für alle Frequenzen  $-\infty < \omega < \infty$  bekannt ist.

⇒ inverse Fourier-Transformation 
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Setzt man verallgemeinernd anstelle der Stoßantwort ein beliebiges Signal  $s(t)$  ein, so ist das Signal als nicht abzählbar unendliche Reihe von Elementarsignalen  $s_E(t)$  in Form des Integrals  $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  darstellbar, wobei sich die sog. Amplitudenfaktoren  $S(\omega)$  durch die Fourier-Transformierte  $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$  berechnen lassen.

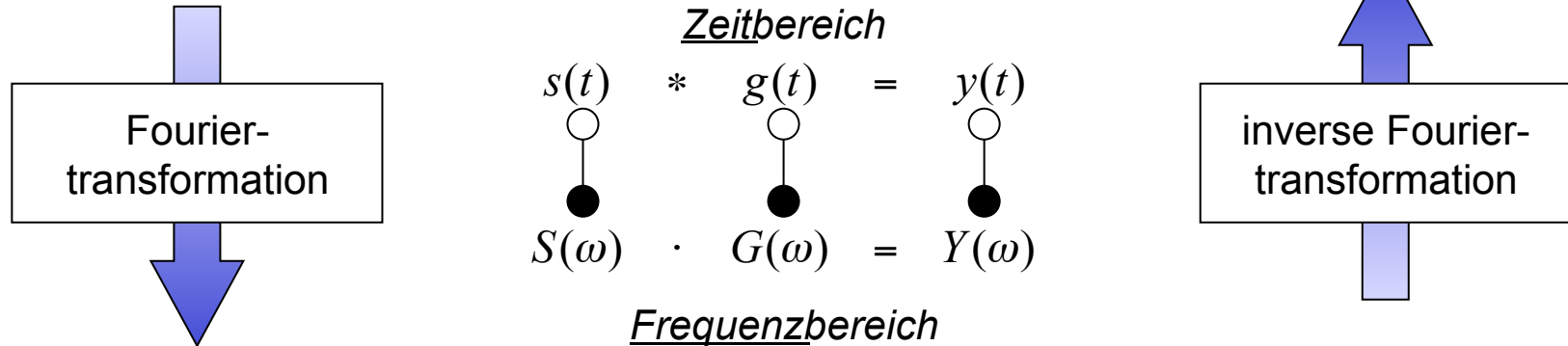
Da  $S(\omega)$  die Dimension [Amplitude·Zeit] (= [Amplitude÷Frequenz]) hat, spricht man auch vom Amplitudendichtespektrum!

Aus dem Transformationspaar folgt nun das ...



- Faltungstheorem

Es gilt:



D.h.  $F \{s(t) * g(t)\} = Y(\omega)$  oder entsprechend

$$s(t) * g(t) \quad \text{○—●} \quad Y(\omega)$$

Damit, aufbauend auf der Sieb-Eigenschaft des Dirac-Impulses, ist

$$s(t) * \delta(t) = s(t) \quad \text{○—●} \quad S(\omega) \cdot \underbrace{F \{ \delta(t) \}}_{=1} = S(\omega)$$

also

$$F \{ \delta(t) \} = 1(\omega) \quad \text{oder} \quad \delta(t) \quad \text{○—●} \quad 1(\omega)$$



## Bsp.: Faltung zweier Gaußfunktionen (via Faltungstheorem)

$$1) f_{\sigma}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{nichtnormalisierte Gaußverteilung, } f_{\sigma}(0) = 1 \quad )$$

$$2) G_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{normalisierte Gaußverteilung, } \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma}(t) dt = 1 \quad )$$

Fourier-Transformation und ihre Inverse:

$$i) F(\omega) = \mathbf{F} \left\{ f(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$ii) f(t) = \mathbf{F}^{-1} \left\{ F(\omega) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

zu 1): Faltung von  $f_{\sigma_1}(t)$  mit  $f_{\sigma_2}(t)$ :  $f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = \mathbf{F}^{-1} \left\{ \mathbf{F} \left\{ f_{\sigma_1} \right\} \cdot \mathbf{F} \left\{ f_{\sigma_2} \right\} \right\}$

$$F_{\sigma_1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2\sigma_1^2} + j\omega t\right)\right) dt$$

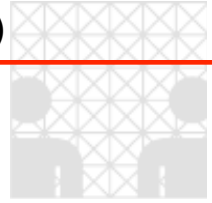
Standardintegral:  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(ax^2 + bx + c\right)\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - ac}{4a}\right)$  hier:  $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ ,

$$b = j\omega,$$

$$c = 0$$

$$(\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2\})$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} F_{\sigma_1}(\omega) &= \sqrt{2\pi}\sigma_1 \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}\right); \quad (j^2 = -1) \\ F_{\sigma_2}(\omega) &= \sqrt{2\pi}\sigma_2 \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$



Multiplikation der Spektren:  $F_{\sigma_1}(\omega) \cdot F_{\sigma_2}(\omega) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right)$

Rücktransformation des Produkts der Spektren:

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1\sigma_2}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\sigma_1\sigma_2 \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\sigma_1\sigma_2 \cdot \exp\left(-\left(\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\omega^2 - j\omega t\right)\right) d\omega \end{aligned}$$

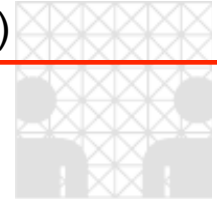
(hier:  $a = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}$ ,  $b = -jt = j \cdot (-t)$ ,  $c = 0$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{\sigma_1\sigma_2}(t) &= \sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \end{aligned}$$

(neue nichtnormalisierte Gaußverteilung mit  $\sigma_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ;

Dämpfung mit dem Faktor  $s = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ )

Spezialfall:  $\sigma_1 = \sigma_2$ :  $f_{\sigma}(t) = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right) = \sqrt{\pi}\sigma \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right)$



zu 2): Faltung von  $G_{\sigma_1}(t)$  mit  $G_{\sigma_2}(t)$ :  $G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2} = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right)$

entsprechend der Transformationen für 1) ergeben sich:

$$F_{\sigma_1}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}\right)$$

$$F_{\sigma_2}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_2^2}{2}\right)$$

Multiplikation der Spektren:  $F_{\sigma_1}(\omega) \cdot F_{\sigma_2}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right)$

(Ergebnis der Transformation einer Gaußverteilung der Parametrierung

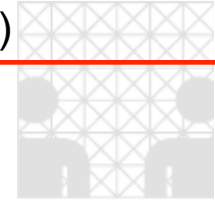
$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Rücktransformation des Produkts der Spektren:

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1\sigma_2}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\omega^2 - j\omega t\right)\right) d\omega \end{aligned}$$

$$\text{hier: } a = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}, \quad b = -jt = j \cdot (-t), \quad c = 0$$





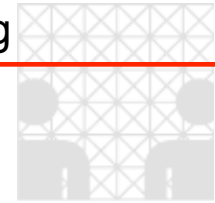
$$\begin{aligned}\Rightarrow G_{\sigma_1\sigma_2}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \quad \text{mit } \sigma_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ folgt:}\end{aligned}$$

$$G_{\sigma_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

Kontrolle: Reskalierung des Faltungsproduktes  $f_{\sigma_1\sigma_2}(t)$  zweier nichtnormalisierter Gaußverteilungen  $f_{\sigma_1}(t)$  und  $f_{\sigma_2}(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot f_{\sigma_1\sigma_2}(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\ &= \underline{\underline{G_{\sigma_1\sigma_2}(t)}}$$





# Korrelation – Energie und Leistung von Signalen

## Signalenergie und -leistung

geg.: Signal  $s(t)$ ;  $s(t) \in \mathbb{R}$ , definiert im Zeitabschnitt  $(t_1; t_2)$

Die Energie eines Signals entspricht dem folgenden Integral in den Grenzen des gegebenen Zeitabschnitts

$$E = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Ein Energiesignal liegt vor, wenn die Signalenergie über den gesamten Zeitbereich (Zeitachse) endlich ist, d.h. wenn gilt

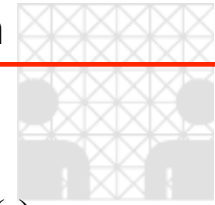
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty$$

⇒ Periodische Signale, Sprungfunktion, zeitlich nicht begrenzte Zufallssignale, etc. sind keine Energiesignale!

Für die Signale ist eine endliche mittlere Leistung als Energie pro Zeitintervall definiert:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s^2(t) dt$$

Signale mit  $0 < P < \infty$  werden Leistungssignale genannt.



## (Impuls-)Korrelationsfunktion

Ziel: Definition eines Ähnlichkeitsmaßes zwischen zwei reellwertigen Signalen  $s(t)$  und  $g(t)$  mit der Differenz  $\Delta(t) = s(t) - g(t)$

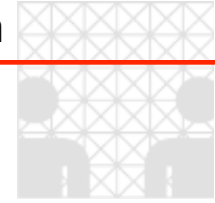
Sind  $s(t)$  und  $g(t)$  Energiesignale, dann ist auch  $\Delta(t)$  ein Energiesignal und seine Energie kann als Maß für die Abweichung der beiden Signale benutzt werden:

$$\begin{aligned} E_{\Delta} &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - g(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) dt \end{aligned}$$

Hinweis: Dieses Maß  $E_{\Delta}$  ist von der absoluten Amplitude bzw. Energie der verglichenen Signale abhängig!

⇒ Normierung, so daß die einzelnen Signalenergien den Wert 1 annehmen:

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}} \quad \text{und} \quad g_n(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}} \\ \Rightarrow E_{\Delta_n} &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_n(t) - g_n(t)]^2 dt = 2 - 2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t) dt}{\sqrt{E_s \cdot E_g}} \end{aligned}$$



- Ähnlichkeitsmaß: Normierter Korrelationskoeffizient für Energiesignale

$$\rho_{sg}^E = 1 - \frac{E_{\Delta n}}{2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)dt}{\sqrt{E_s E_g}}$$

Hiermit wird die Ähnlichkeit zweier Energiesignale  $s(t)$  und  $g(t)$  mit einem Wert zwischen 1 und  $-1$  gemessen. Die maximale Ähnlichkeit ergibt sich mit  $\underline{\underline{\rho_{sg}^E = 1}}$  für  $s(t) = g(t)$  sowie  $s(t) = k \cdot g(t)$  mit  $k = \{x \in \mathbb{R}_{\infty} \mid x > 0\}$ .

Für orthogonale Signale ergibt sich wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t)dt = 0$ :  $\underline{\underline{\rho_{sg}^E = 0}}$

In dieser Definition des Korrelationskoeffizienten wird eine feste zeitliche Lage der verglichenen Signale zueinander angenommen. Bei gegenseitiger Verschiebung entlang der Zeitachse wird der Korrelationskoeffizient verändert.

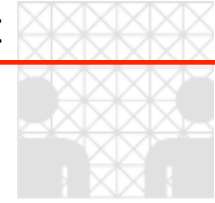
⇒ normierte (Impuls-)Korrelationsfunktion

(auch: normierte Kreuzkorrelationsfkt. für verschiedene Signale  $s(t)$  und  $g(t)$ ).

Es gilt für die Ähnlichkeit zwischen  $s(t)$  und dem verschobenen Signal  $g(t + \tau)$ :

$$\rho_{sg}^E(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t + \tau)dt}{\sqrt{E_s E_g}}$$

Gilt  $s(t) = k \cdot g(t)$ , so wird der Ausdruck zur normierten Autokorrelationsfkt.  $\rho_{ss}^E(\tau)$ .



## Korrelationsprodukt und Faltungsprodukt

Die im Zähler stehende nicht-normierte Korrelationsfunktion heißt kurz (Impuls-) Korrelationsfunktion oder Korrelationsprodukt.

$$\begin{aligned}\varphi_{sg}^E(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot g(t + \tau) dt \\ &= s(\tau) \circ g(\tau) \quad (\circ: \text{Korrelationsoperator})\end{aligned}$$

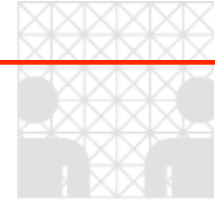
- Zusammenhang zwischen Korrelations- und Faltungs-(Konvolutions-)produkt:

Substitution  $t = -\theta$  in  $\varphi_{sg}^E(\tau)$  ergibt

$$\begin{aligned}\varphi_{sg}^E(\tau) &= \int_{+\infty}^{-\infty} s(-\theta) \cdot g(\tau - \theta)(-d\theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(-\theta) \cdot g(\tau - \theta) d\theta \\ &\quad \text{Faltungsintegral}\end{aligned}$$

Es gelten somit die Beziehungen:

- I.  $s(\tau) \circ g(\tau) = s(-\tau) * g(\tau)$
- II.  $s(\tau) * g(\tau) = s(-\tau) \circ g(\tau)$



- Eigenschaften:

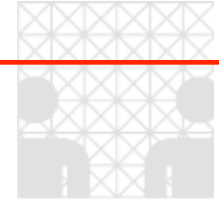
Zusammenhang zwischen  $\varphi_{sg}^E(\tau)$  und  $\varphi_{gs}^E(\tau)$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{sg}^E(\tau) &= s(\tau) \circ g(\tau) \\ &= s(-\tau) * g(\tau) \\ &= g(\tau) * s(-\tau) = g(-\tau) \circ s(-\tau) = \varphi_{gs}^E(-\tau)\end{aligned}$$

- 1)  $\varphi_{sg}^E(\tau)$  und  $\varphi_{gs}^E(\tau)$  sind zueinander zeitgespiegelt
- 2) Korrelationsprodukt:  $s(\tau) \circ g(\tau) = g(-\tau) \circ s(-\tau)$ , d.h. das Kommutativgesetz gilt nicht!
- 3) Assoziativität:

$$\begin{aligned}s(\tau) \circ (g(\tau) \circ h(\tau)) &= s(-\tau) * (g(\tau) \circ h(\tau)) \\ &= s(-\tau) * (g(-\tau) * h(\tau)) \\ &= (s(-\tau) * g(-\tau)) * h(\tau) \\ &= (s(\tau) * g(\tau)) \circ h(\tau) = (s(-\tau) \circ g(\tau)) \circ h(\tau)\end{aligned}$$

d.h. das Assoziativgesetz gilt nicht!



- 4) Distributivität:

$$\begin{aligned} s(\tau) \circ (g(\tau) + h(\tau)) &= s(-\tau) * (g(\tau) + h(\tau)) \\ &= s(-\tau) * g(\tau) + s(-\tau) * h(\tau) \\ &= s(\tau) \circ g(\tau) + s(\tau) \circ h(\tau) \end{aligned}$$

d.h. das Distributivgesetz (bzgl. Addition) gilt!

- 5) Autokorrelationsfunktion  $\varphi_{ss}^E(\tau)$  ist stets eine gerade Funktion, da

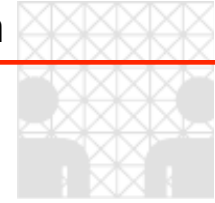
$$\begin{aligned} \varphi_{ss}^E(\tau) &= s(\tau) \circ s(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) \\ &= s(\tau) * s(-\tau) = s(-\tau) \circ s(-\tau) = \varphi_{ss}^E(-\tau) \end{aligned}$$

- 6) Der maximale Wert einer Autokorrelationsfunktion wird stets für  $\tau = 0$  angenommen, da hierfür die größte Ähnlichkeit vorliegt. Für  $s(t) = g(t)$  gilt

$$\text{bei Energiesignalen } \varphi_{ss}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E$$

Das Maximum der Autokorrelationsfunktion eines Energiesignals ist somit gleich seiner Energie; für die normierte Autokorrelationsfunktion gilt  $\rho_{ss}^E(0) = 1$  wegen des Normalisierungsfaktors

- 7) Bei zeitlich begrenzten Signalen hat die Autokorrelationsfunktion die doppelte Breite des Signals.



## Fouriertransformation der (Impuls-)Korrelationsfunktion

Transformation der Autokorrelationsfunktion reellwertiger Signale:

$$\varphi_{ss}^E(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) \sim E$$
$$= S^*(\omega) \cdot S(\omega) = |S(\omega)|^2; \quad S^*(\omega) = \bar{S}(\omega)$$

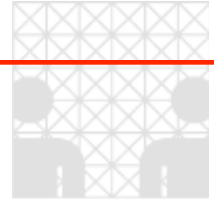
$|S(\omega)|^2$  wird als Energiedichtespektrum bezeichnet, da  $\varphi_{ss}^E(\tau)$  die Dimension [Signalenergie] aufweist, ihre Fourier-Transformierte somit die Dimension eines Produktes [Signalenergie · Zeit] (= [Signalenergie ÷ Frequenz]) hat, und demzufolge  $|S(\omega)|^2$  eine auf die Frequenzeinheit bezogene Signalenergie darstellt.

- Inverse Fouriertransformation:

$$\varphi_{ss}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

Die Impulskorrelationsfunktion  $\varphi_{ss}^E(\tau)$  lässt sich allein aus dem Betragsspektrum der Fourier-Transformierten von  $s(t)$  berechnen, unabhängig vom Phasenspektrum von  $S(\omega)$ .





- Parsevalsches Theorem:

Energie eines Signals kann auch im Frequenzbereich aus seinem Spektrum berechnet werden; für  $\tau = 0$  gilt:

$$E = \varphi_{ss}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

