64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

Gliederung:

Teil II: Fourierreihen, Fourieranalyse

Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768 – 1830)
franz. Physiker und Mathematiker, mit 18 Jahren zum Professor ernannt, Schüler von Lagrange, Lehrer von Dirichlet, Namensgeber der Universität in Grenoble,

Veröffentlichte u.A. die *Analytische Theorie der Wärme* (1822), in der auch erstmals der Begriff *l 'effet de serre* (Treibhauseffekt) eingeführt wird.

Motivation

Üblicherweise werden eindimensionale Signale und die auf sie von Systemen ausgeübte Wirkung als Funktion der Zeit betrachtet (Darstellung von Signalen als Funktionen im sog. **Zeit**bereich bzw. von 2-dimensionalen Signalen im **Orts**bereich!). Dies entspricht unserer natürlichen Betrachtungsweise, die auch mit unserer Empfindungsweise übereinstimmt: Alle wahrnehmbaren Vorgänge werden als Funktionen der Zeit gesehen, z.B.

- Schwingungen eine Masse-Feder-Systems,
- Oszilloskopanzeige des Signalverlaufs einer Spannung,
- Wachstumsprozesse, ...

Dem gegenüber steht die mathematisch z.T. sehr aufwendige analytische Behandlung relativ einfacher Vorgänge, die als Funktion der Zeit (bzw. des Ortes) beschrieben sind. Der problemspezifische Aufwand kann erheblich reduziert werden, wenn man bei der Signaldarstellung vom Zeit- bzw. Ortsbereich in den **Frequenz**bereich übergeht. Hierbei wird nicht mehr der Verlauf des Signals über die Zeit betrachtet, sondern als Ergebnis der Überlagerung periodischer Elementarsignale unterschiedlicher Amplitude, Frequenz und Phase aufgefasst.

Allgemeines

Eine periodische Funktion der Periode $T = 2\pi$ (Periodizität: $s(t) = s(t+T)$) sei in eine Reihe nach trigonometrischen Funktionen zu entwickeln:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad \text{(Fourierreihe)}$$

Die Entwicklung einer Funktion in eine Fourierreihe bezeichnet man als

harmonische Analyse.

Praktische Anwendungen

(s. numerische harmonische Analyse)

Betrachtung einer endlichen Zahl von Gliedern der Reihe, so dass die Summe eine Approximation der Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom ergibt.

Es kann gezeigt werden, daß bei Approximation einer Funktion $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ (Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, ein Hilbertraum) durch ein trigonometrisches Polynom

$$s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

(das Funktionensystem $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ ist ein <u>vollständiges Orthogonalsystem</u>)

der mittlere quadratische Fehler $\delta^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - s_n(x) \right)^2 dx$ genau dann minimal wird, wenn man für α_k, β_k die sog. <u>Fourierkoeffizienten</u> der Funktion $f(x)$ wählt, die sich bestimmen aus

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1,2,\ldots$$

Anmerkung:

Räume generell: Funktionenräume, in denen bestimmte Eigenschaften bezüglich der Elemente gelten

Hilbertraum:

linearer Raum E mit Skalarprodukt und Norm ist ein normierter Raum;

er ist darüberhinaus unitär, wenn das Skalarprodukt stetig ist und die Parallelogrammidentität gilt;

ein dann noch vollständiger Raum heißt **Hilbertraum**

Kurz: ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt

Es gilt weiterhin, daß $s_n(x)$ bei Verwendung der Fourierkoeffizienten im quadratischen Mittel gegen f konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - s_n(x) \right)^2 dx = 0$$

- Perioden $2m = T$:

  Hat eine zu entwickelnde Funktion die Periode $T = 2m$ (anstatt 2π), so wird die Veränderliche x durch $\frac{2\pi}{T}x = \frac{\pi}{m}x$ ersetzt. Dadurch verändern sich die Argumente der trigonometrischen Funktionen in den Gleichungen für die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe zu

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k\pi x}{m}\right) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k \cdot 2\pi x}{T}\right)$$

- Entwicklung nicht-periodischer Funktionen in einem abgeschlossenen Intervall $2m$:

  Formal wird die Funktion links und rechts des abgeschlossenen Intervalls als periodisch fortgesetzt gedacht, so daß sie in eine Fourierreihe entwickelt werden kann

  (*Die sich ergebenden Funktionswerte außerhalb des Definitionsintervalls interessieren in diesem Fall nicht!*)

Herleitung der Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Die o.g. Reihe $f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi\, x}{m}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi\, x}{m}\right)\right)$

kann ebenso in Form von $f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{m}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{m}\right)\right)$ oder

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \cos\left(k\omega_0 x\right) + b_k \sin\left(k\omega_0 x\right)\right)$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = 2m$

(siehe Exkurs: komplexe Zahlen)

notiert werden. Die offenkundige Differenz zwischen f_1 und f_2 um den Betrag $a_0/2$ wird später bei der Bestimmung der Fourierkoeffizienten wieder ausgeglichen (siehe nachfolgende Rechnungen)

Gewinnung der Fourierkoeffizienten (hier: Ableitung der a_k)

(i) Multiplikation der Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)\right)$ mit $\cos(m\omega_0 x)$ und anschließende Integration über ein Intervall der Periodenlänge T, im allgemeinen von $x = -\frac{T}{2}$ bis $x = \frac{T}{2}$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(m\omega_0 x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^{\infty}\Big(a_k \cos(k\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)\Big)dx$$

(ii) Laut Voraussetzung konvergiert die Reihe $\Rightarrow$ Vertauschung von Integration und Summation

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(m\omega_0 x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2} a_k \cos(k\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)\,dx + \int_{-T/2}^{T/2} b_k \sin(k\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)\,dx\right)$$

(iii) Aussagen über die Gleichungskomponenten der rechten Seite:

Nutzung der Orthogonalitätseigenschaften, es gelten:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_0 x)\cdot\cos(m\omega_0 x)\,dx = 0 \qquad (k, m \in \mathrm{Z})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_0 x)\cdot\sin(m\omega_0 x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq m \\ \frac{T}{2}, & \text{für } k = m \neq 0 \\ 0, & \text{für } k = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 x)\cdot\cos(m\omega_0 x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq m \\ \frac{T}{2}, & \text{für } k = m \neq 0 \\ T, & \text{für } k = m = 0 \end{cases}$$

vgl. BRONSTEIN Taschenbuch der Mathematik, Tabellen bestimmter Integrale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx) = \delta_{m,n}\cdot\pi \quad m,n \in \bullet$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx) = \delta_{m,n}\cdot\pi \quad m,n \in \bullet$$

Kroneckersymbol: $\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n \\ 1, & \text{für } m = n \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nur für $k = m$ ergeben die Integrale der rechten Seite in (ii) (*Elemente der Summe*) einen von Null verschiedenen Betrag, es gilt demnach:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} a_k \cos^2(k\omega_0 x)dx = \begin{cases} a_k \cdot \frac{T}{2}, & \text{für } k > 0 \\ a_k \cdot T, & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx, \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \quad \text{(Mittelwert)}$$

Analog ergibt sich b_k zu

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega_0 x)dx, \quad b_0 = 0$$

Die Koeffizienten a_0 und $a_{k|k>0}$ unterscheiden sich um den Faktor 2;

für eine <u>einheitliche Angabe der Koeffizienten</u> muß die Fourierreihe in die oben erstgenannte Form gebracht werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)\right)$$

<u>Generelles Problem</u>: Was muss für eine periodische Funktion gelten, damit sie in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden darf?

Satz von DIRICHLET[1]

Forderung: $f(x)$ genüge in $(-T/2, T/2)$ den DIRICHLETschen Bedingungen

i) Das Intervall $(-T/2, T/2)$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist.

ii) Ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$, so existieren der links- und der rechtsseitige Grenzwert:

$$f_L(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{und} \quad f_R(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon)$$

Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right)\right) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f \text{ in } x \text{ stetig} \\ \dfrac{f_L(x_0) + f_R(x_0)}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

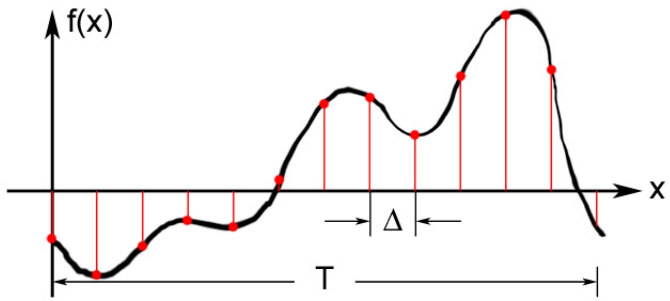
[1] GUSTAV PETER DIRICHLET (1809 – 1859), dt. Mathematiker, Schüler von Fourier, Nachfolger von C. F. GAUSS an der Universität Göttingen

Numerische harmonische Analyse

Geg.: Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \le x < T$ nur auf einem <u>diskreten</u> System von Punkten

$$x_k = \frac{kT}{N}, \quad (k = 0,1,\ldots,N-1)$$

$$N = \frac{T}{\Delta} \text{ Abtastpunkte}$$



Da es sich bei $1D$-Signalen in technischen Anwendungen meist um zeitabhängige Signale handelt, wird im folgenden mit einer Signalfunktion $s = s(t)$ gearbeitet!

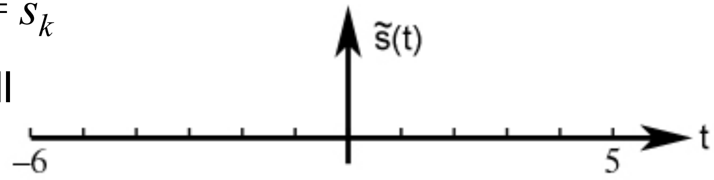
⇒ Auch für ein derartiges <u>diskretes Signal</u> läßt sich eine näherungsweise Darstellung durch ein <u>trigonometrisches Polynom</u> bestimmen.

Das diskrete (abgetastete) Signal s_k ist dann definiert als

$$s_k = s(t = k\Delta) = s\left(t = \frac{kT}{N}\right)$$

Es wird hier angenommen, daß N gerade ist ($N=2n$) und k damit durch ein Intervall $-n, ..., 0, 1, ..., n-1$ laufen kann (*gegenüber dem o. g. Intervall* $[0, T]$ *entspricht dies einer einfachen Koordinatentransformation!*).

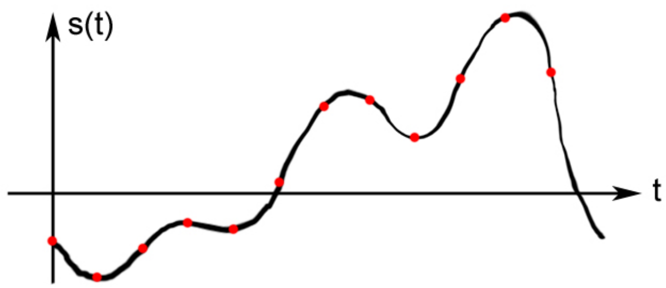
Mit $t = k\Delta$ und der endlichen Fourierreihe $s(k\Delta) = s_k$ (als Approximation der Originalfkt. $s(t)$ im Intervall $-T/2 \leq t < T/2$) ergibt sich eine Menge von N Gleichungen für N unbekannte Konstanten. Die Gleichungen lauten:



$(n=6)$

$$s_k = a_0 + 2\sum_{m=1}^{n-1}\left(a_m \cos(2\pi m f_1 k\Delta) + b_m \sin(2\pi m f_1 k\Delta)\right) + a_n \cos(2\pi n f_1 k\Delta)$$

<u>Bsp</u>. eines Signals, das für 12 Meßpunkte definiert ist, d.h. $N = 2n = 12$



$\Rightarrow$ Es ergeben sich 12 Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5$ und somit

$$s_k = a_0 + 2\sum_{m=1}^{5}\left(a_m \cos(2\pi m f_1 k\Delta) + b_m \sin(2\pi m f_1 k\Delta)\right) + a_6 \cos(12\pi f_1 k\Delta)$$

Wählt man $f_1 = \frac{1}{N\Delta}\left(= \frac{1}{T}\right)$, so vereinfacht sich die Lösung für o. g. Gleichung zu

$$s_k = a_0 + 2\sum_{m=1}^{n-1}\left(a_m \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) + b_m \sin\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right)\right) + a_n \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right)}_{\cos k\pi} \quad N = 2n$$

Bestimmung der Koeffizienten

Alternativdarstellung (Gesamt-Summe): $s_k = \sum_{m=0}^{n}\left(a_m \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) + b_m \sin\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right)\right)$

Multiplikation mit $\cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right)$ (zur Bestimmung der a_m) und Summation über T:

$$\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right) = \sum_{k=-n}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right)\cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right) + b_m \sin\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\left(a_m \sum_{k=-n}^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right) + b_m \sum_{k=-n}^{n-1} \sin\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{l \cdot k}{N}\right)\right)$$

Entsprechend der Orthogonalitätseigenschaften (siehe Herleitung für a_k!) gelten

$$\sum_{k=-n}^{n-1} \sin\left(2\pi \frac{mk}{N}\right)\cos\left(2\pi \frac{lk}{N}\right) = 0, \qquad (l,m \in \mathbb{Z})$$

$$\sum_{k=-n}^{n-1} \sin(\langle m \rangle)\sin(\langle l \rangle) = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq l \\ \frac{N}{2}, & \text{für } m = l \neq 0, n \\ 0, & \text{für } m = l = 0, n \end{cases}$$

$$\sum_{k=-n}^{n-1} \cos(\langle m \rangle)\cos(\langle l \rangle) = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq l \\ \frac{N}{2}, & \text{für } m = l \neq 0, n \\ N, & \text{für } m = l = 0, n \end{cases}$$

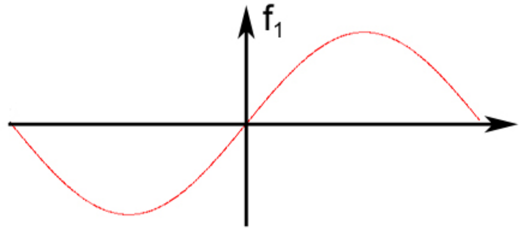
also (entsprechend für $\sin$)

$$\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right) = a_m \underbrace{\sum_{k=-n}^{n-1} \cos^2\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right)}_{\to \;\frac{N}{2},\ (l=m\neq 0,\ n);\quad N,\ (l=m=0,\ n)}$$

$$a_m = \frac{2}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right), \quad a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k, \quad a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right)}_{\to\ \cos(k\pi)}$$

Grund-(Fundamental-)Schwingung und Oberschwingungen (Harmonische):

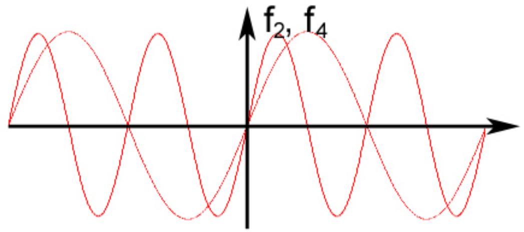
Grundfrequenz: $f_1 = \frac{1}{\Delta N} \left(= \frac{1}{T} \right)$



Oberfrequenzen: Sinus- und Cosinusfkt. mit Vielfachen (Harmonischen) der Grundfrequenz f_1,

$f_i = i \cdot f_1 \; (i = 2, 3, \ldots)$

$\Rightarrow$ höchste Frequenz: $f_n = \frac{n}{\Delta N} = \frac{1}{2\Delta}$



Fourierkoeffizienten (in einheitlicher Darstellung!)

Für $f_1 = \dfrac{1}{N\Delta}$ können die Koeffizienten a_m und b_m bestimmt werden zu

$$a_m = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cdot \cos\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right)$$

$$b_m = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cdot \sin\left(2\pi \frac{m \cdot k}{N}\right), \quad m = 0,1,\ldots,n$$

$$m = 0: \quad a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1}$$ (Mittelwert)

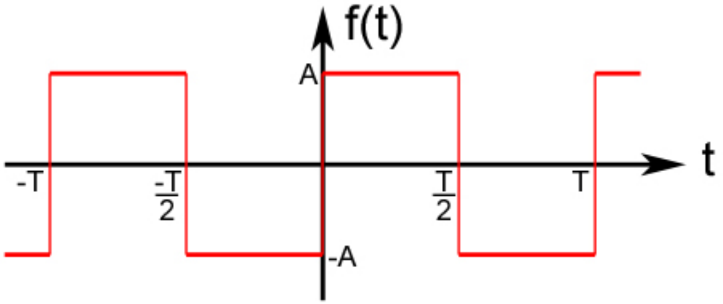
$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0$$

Für eine <u>ungerade Anzahl N</u> von Abtastpunkten, d.h. $N = 2n - 1$, ergeben sich entsprechende Gleichungen; für s_k entfällt der a_n – Term.

Beispiele zur Fourieranalyse

(1) Harmonische Analyse eines periodischen Rechtecksignals

$$f(t) = \begin{cases} +A, & \text{fuer } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A, & \text{fuer } -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$



(punktsymmetrisches, ungerades Signal)

Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} -A\cos(k\cdot\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2} A\cos(k\cdot\omega_0 t)dt \right)$$

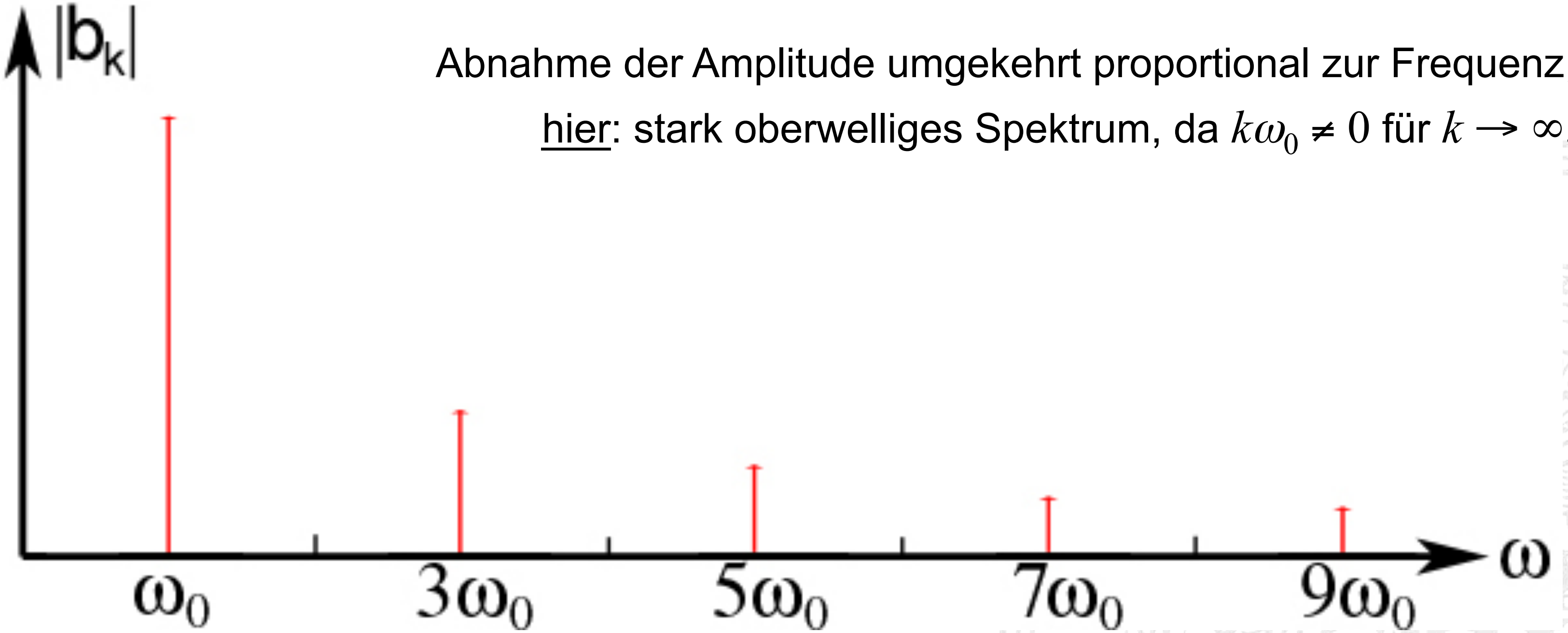
$$= \frac{2}{T}\left(\frac{-A}{k\cdot\omega_0}\sin(k\cdot\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{A}{k\cdot\omega_0}\sin(k\cdot\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2} \right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} -A\sin(k\cdot\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2} A\sin(k\cdot\omega_0 t)dt\right) = \frac{2A}{k\pi}\left(1-\cos(k\pi)\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{4A}{k\pi}, & \text{für } k = 1,3,5,\ldots \\ 0, & \text{für } k = 0,2,4,\ldots \end{cases}$$

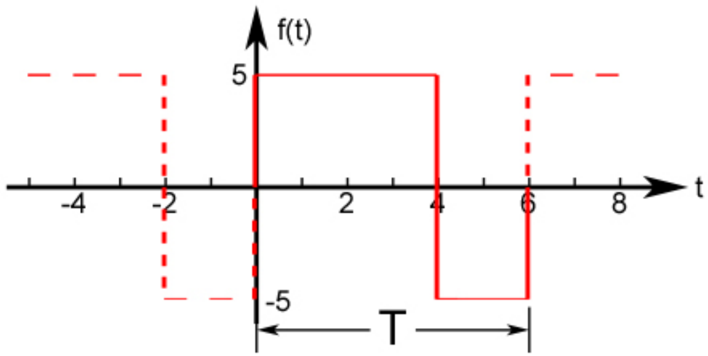
Abnahme der Amplitude umgekehrt proportional zur Frequenz;

hier: stark oberwelliges Spektrum, da $k\omega_0 \neq 0$ für $k \to \infty$.



(2) Numerische harmonische Analyse eines diskreten(!) periodischen Signals

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{für } 0 < t < 4 \\ -5, & \text{für } 4 < t < 6 \end{cases}$$



- Über die Periode T werden an N diskreten Werten von t die Meßwerte abgenommen ($N = 6$);

  unter Berücksichtigung der DIRICHLETschen Bedingung für $t \in \{0, 4\}$ lautet die Meßreihe wie folgt:

6 Meßwerte :

t	0	1	2	3	4	5
f_r	0	5	5	5	0	−5

$\Rightarrow N = 6;\ N = 2n,\ n = 3$

Mit der o.g. Koordinatentransformation ist das Intervall r damit bestimmt zu:

$r = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

- Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_r f_r \cos\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)$$

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_r f_r \sin\left(\frac{2\pi kr}{N}\right), \quad k = 0,1,2,3$$

Fourierreihe: $f_r = a_0 + 2\sum_k \left\{a_k \cos\frac{2\pi kr}{N} + b_k \sin\frac{2\pi kr}{N}\right\}, \quad k = 1,2,3$

- Fourierreihe läuft für die Variable r über den Bereich des o.g. Intervalls $[-3, .., 2]$!

$$\left.\begin{array}{l} a_k \cdot \cos\frac{2\pi k}{N} r \\ b_k \cdot \sin\frac{2\pi k}{N} r \end{array}\right\} \text{mit } \underbrace{\frac{2\pi k}{N} = \omega_0}$$

bezieht sich auf eine „normale“ Periode

der sin/cos-Schwingungen von 2π:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi k}{N}} = \boxed{\frac{N}{k}}$$

- Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k; $k = 0, 1, 2, 3$:

$$a_0 = \frac{1}{6}\left(\cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot (-3)}{6}} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot (-2)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot (-1)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot 0}{6} + \cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot 1}{6}} + (-5) \cdot \cos\frac{2\pi 0 \cdot 2}{6}\right)$$

$$a_0 = \frac{5}{6}\left(\cos(0) + \cos(0) + \cos(0) - \cos(0)\right) = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$b_0 = \frac{5}{6}\left(\sin(0) + \sin(0) + \sin(0) - \sin(0)\right) = \boxed{0}$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(\cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot (-3)}{6}} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot (-2)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot (-1)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot 0}{6} + \cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot 1}{6}} + (-5) \cdot \cos\frac{2\pi 1 \cdot 2}{6}\right)$$

$$a_1 = \frac{5}{6}\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + \cos(0) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$b_1 = \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \boxed{-\frac{5}{4}\sqrt{3}}$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(\cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot (-3)}{6}} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot (-2)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot (-1)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot 0}{6} + \cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot 1}{6}} + (-5) \cdot \cos\frac{2\pi 2 \cdot 2}{6} \right)$$

$$a_2 = \frac{5}{6}\left(\cos\left(-\tfrac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right) + \cos(0) - \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right) = \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{5}{12}}$$

$$b_2 = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right) = \boxed{\frac{5}{12}\sqrt{3}}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(\cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot (-3)}{6}} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot (-2)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot (-1)}{6} + 5 \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot 0}{6} + \cancel{0 \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot 1}{6}} + (-5) \cdot \cos\frac{2\pi 3 \cdot 2}{6} \right)$$

$$a_3 = \frac{5}{6}\left(\cos(-2\pi) + \cos(-\pi) + \cos(0) - \cos(2\pi)\right) = \boxed{0}$$

$$b_3 = \frac{5}{6}\left(\sin(-2\pi) + \sin(-\pi) + \sin(0) - \sin(2\pi)\right) = \boxed{0}$$

- Es ergeben sich somit die Schwingungen:

	k	a_k	b_k
Mittelwert	0	$\frac{5}{3} = 1.67$	0
Fundamentale	1	$\frac{5}{4} = 1.25$	$-\frac{5}{4}\sqrt{3} = -2.16$
2. Harmonische	2	$\frac{5}{12} = 0.42$	$\frac{5}{12}\sqrt{3} = 0.72$
3. Harmonische	3	0	0

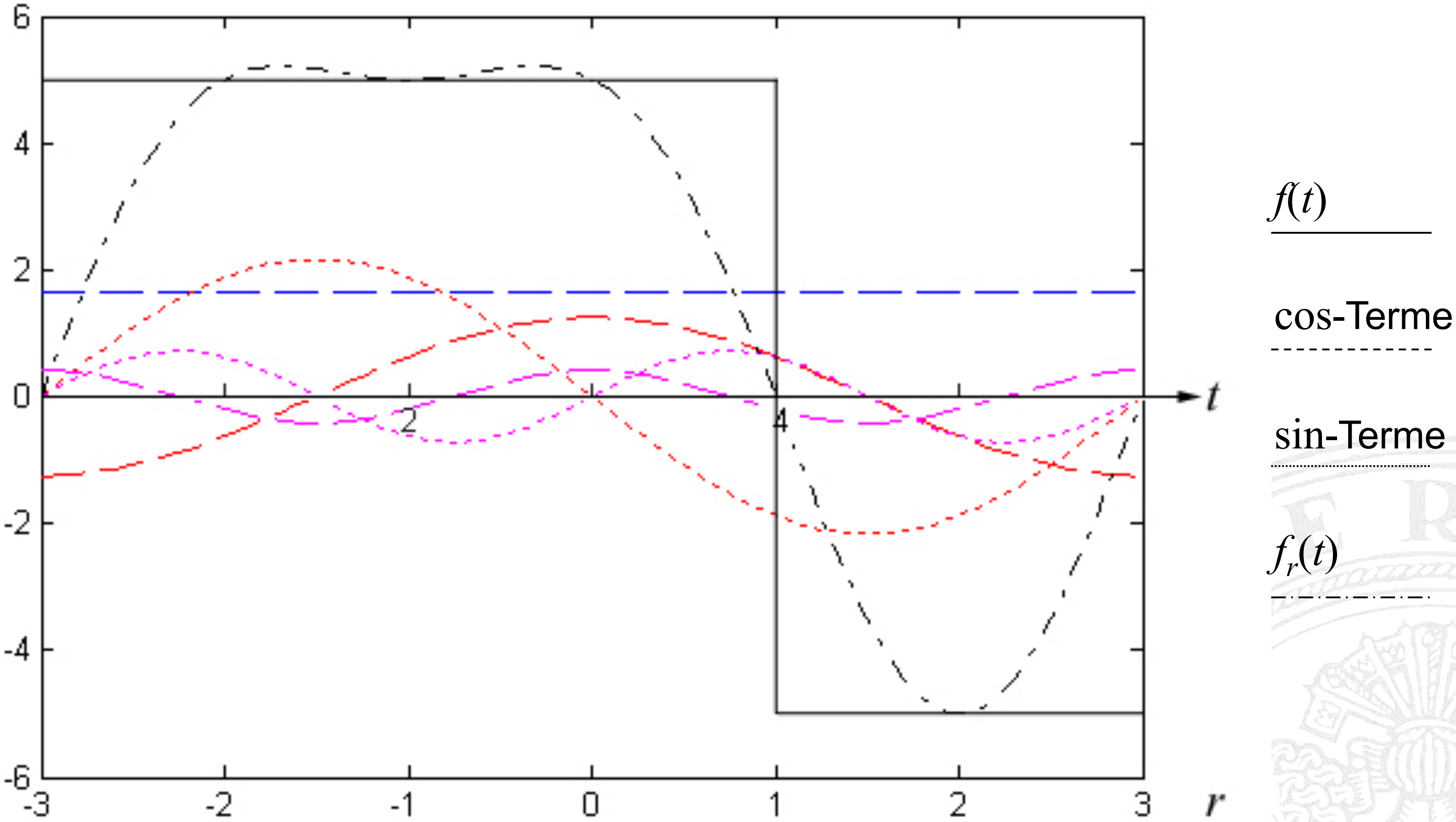
- Amplituden- und Phasen**repräsentation**, R_k und Φ_k:

$$R_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \Phi_k = \tan^{-1}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

k	0	1	2	3
f_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
R_k	$\frac{5}{3} = 1.67$	$\frac{5}{2} = 2.50$	$\frac{5}{6} = 0.84$	0
Φ_k	$0°$	$60°$	$-60°$	—

Fouriersynthese

anhand der vorangegangenen numerischen harmonischen Analyse des diskreten periodischen Signals



$$f_r = a_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos\frac{2\pi \cdot k}{N} \cdot r + b_k \sin\frac{2\pi \cdot k}{N} \cdot r$$

Koordinatentransformation: $t = r + 3$

Amplituden- und Phasenrepräsentation

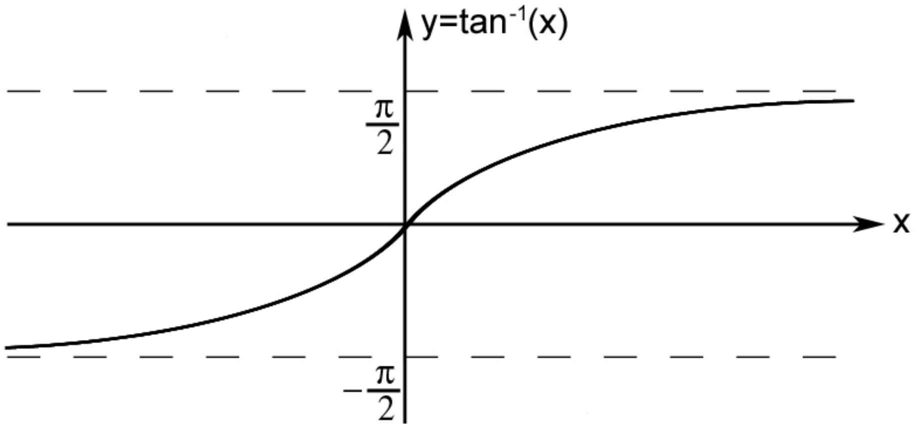
Für eine Grund- bzw. Oberschwingung gegebener Frequenz liegen jeweils zwei harmonische Schwingungen $\cos$ und $\sin$ vor, deren Amplitude durch die zugehörigen Fourierkoeffizienten a_k bzw. b_k bestimmt wurden. Die Überlagerung eines solchen $\sin$-/$\cos$-Paares ergibt eine neue $\cos$- (oder $\sin$-) Schwingung derselben Frequenz, jedoch mit einer von den jeweiligen Amplituden abhängigen Phasenverschiebung.

Die Gleichung für s_k läßt sich damit vereinfachen zu

$$s_k = R_0 + 2\sum_{m=1}^{n-1} R_m \cos(2\pi m f_1 k\Delta + \varphi_m) + R_n \cos(2\pi n f_1 k\Delta)$$

mit $R_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$

$$\Phi_m = \tan^{-1}\left(-\frac{b_m}{a_m}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$



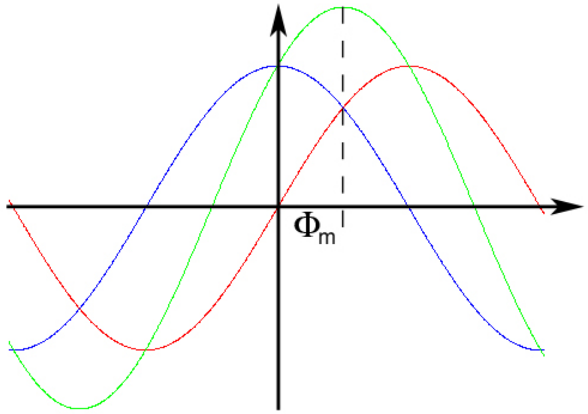
Für $a_m = b_m \Rightarrow \quad R_m = \sqrt{2}a_m, \Phi_m = -\frac{\pi}{4}$

$a_m \neq 0, b_m = 0 \quad \Rightarrow R_m = a_m,\ \Phi_m = 0$

$\Rightarrow \cos(x)$

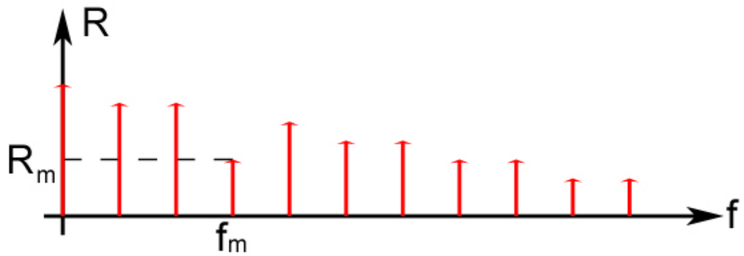
$a_m = 0, b_m \neq 0 \quad \Rightarrow R_m = b_m,\ \Phi_m = -½\cdot\pi$

$\Rightarrow \cos(x - \pi/2) = \sin(x)$

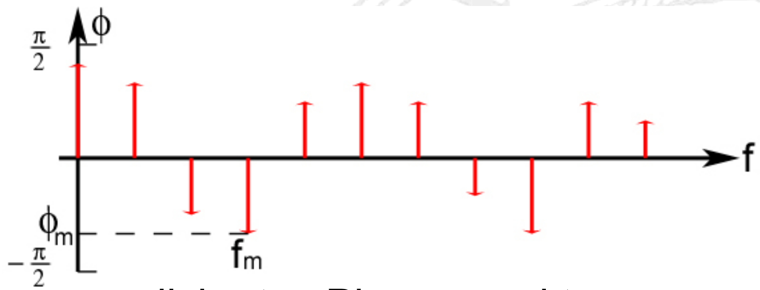


Ein Signal lässt sich nun mithilfe von (phasenverschobenen) Cosinus-Schwingungen (oder alternativ dazu Sinus-Schwingungen) approximieren!

Die Amplituden R und Phasen Φ der einzelnen (Cosinus-)Schwingungen lassen sich jeweils als Funktion der Frequenz f darstellen und man erhält als Signalrepräsentation



diskretes Amplitudenspektrum



diskretes Phasenspektrum

PARSEVALsches Theorem

Der mittlere quadratische Wert des Signals s_k ist

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k^2$$

und wird als mittlere bzw. gemittelte Leistung des Signals s_k bezeichnet.

Es gilt (ohne Beweis)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n-1} s_k^2 = R_0^2 + 2\sum_{m=1}^{n-1} R_m^2 + R_n^2.$$

In Worten: Die mittlere Leistung des Signals s_k kann in die Beiträge zerlegt werden, die aus jeder Harmonischen hervorgehen;

für die 0-te und n-te Harmonische ist der Beitrag $R_m{}^2$;

für die m-ten Harmonischen ist die mittlere Leistung jeweils $2\ R_m{}^2$.