

## 64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

### Gliederung:

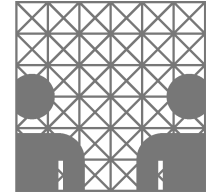
- Teil I: Einleitung, Wurzeln, Grundbegriffe
- Teil II: Fourierreihenentwicklung, Fourieranalyse
- Teil III: Komplexe Fourierreihe, Fouriertransformation
- Teil IV: Faltung, Abtastung, Korrelation
- Teil V: Eigenschaften und Theoreme der Fouriertransformation
- Teil VI: n-dim. Fouriertransformation, Faltung und Korrelation
- Teil VII: Gabor- und Wavelet-Transformation, Multiskalenanalyse**
- Teil VIII: Sensoren, Rauschen, Rauschreduktion
- Teil IX: Diffusionsgleichungen
- Teil X: Bildfolgenanalyse, Bewegungsschätzung
- Teil XI: Registrierung, Extraktion von Landmarken
- Teil XII: Nichtlineare Deformation, Fusion
- Teil XIII: Signalverarbeitung auf Diskreten Oberflächen



Universität Hamburg

Department  
Informatik

Arbeitsbereich  
Kognitive Systeme (KOGS)



# Teil VII: Gabor- und Wavelet-Transformation, Multiskalenanalyse

Quellen: P. Steldinger, H.S. Stiehl: VL Systemtheorie, WiSe 07/08, Univ. Hamburg  
H. Neumann, VL Computer Vision I, SoSe 07, Univ. Ulm



# Gabor- und Wavelet-Transformation

## From Joseph de Fourier to Dennis Gabor

### Fourier Transform revisited

- + spectral decomposition/analysis of multidimensional aperiodic signals

$$f(\vec{x}) \circ \bullet F(\vec{u})$$

- + duality of filtering in space/time and frequency domain

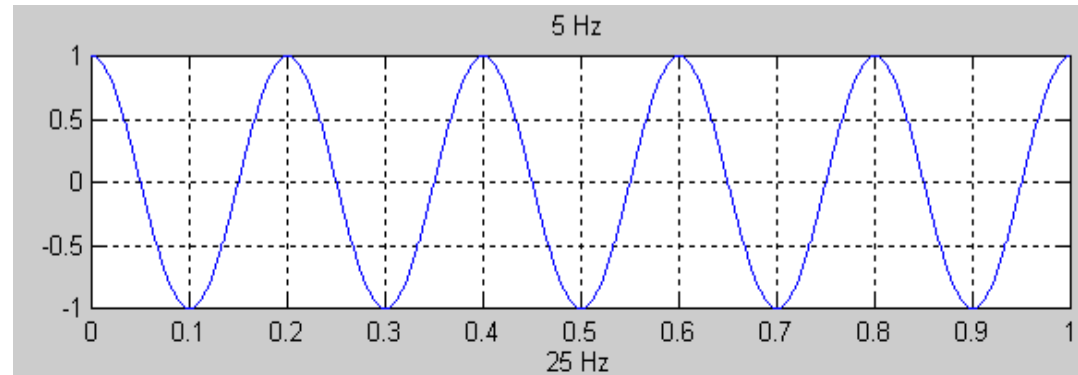
$$f(\cdot) \otimes g(\cdot) \circ \bullet F(\cdot) \cdot G(\cdot)$$

- + Discrete FT and Fast FT (FFT)
- global transformation, no representation and analysis of local signal structure

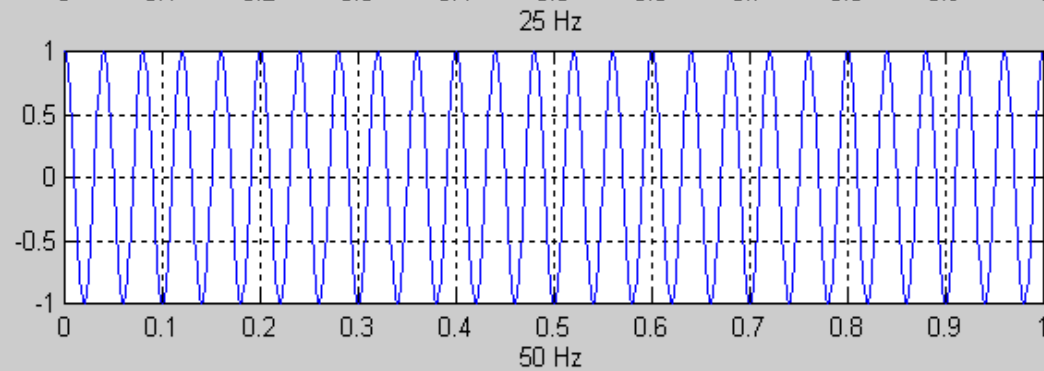


Stationäre Signale:

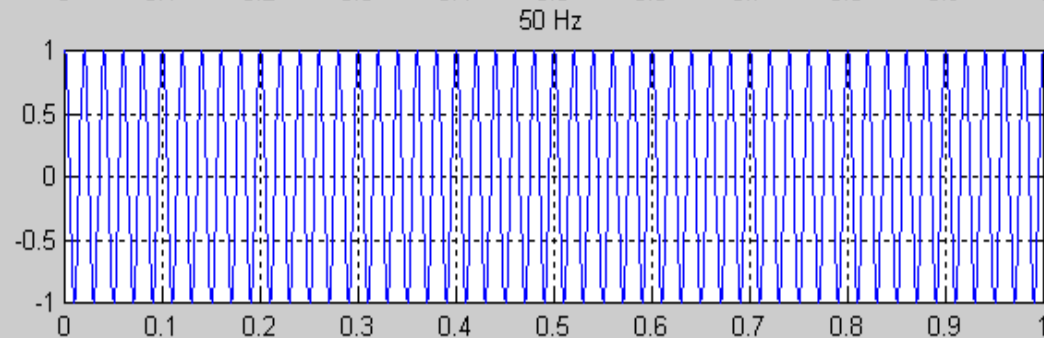
$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$



$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$

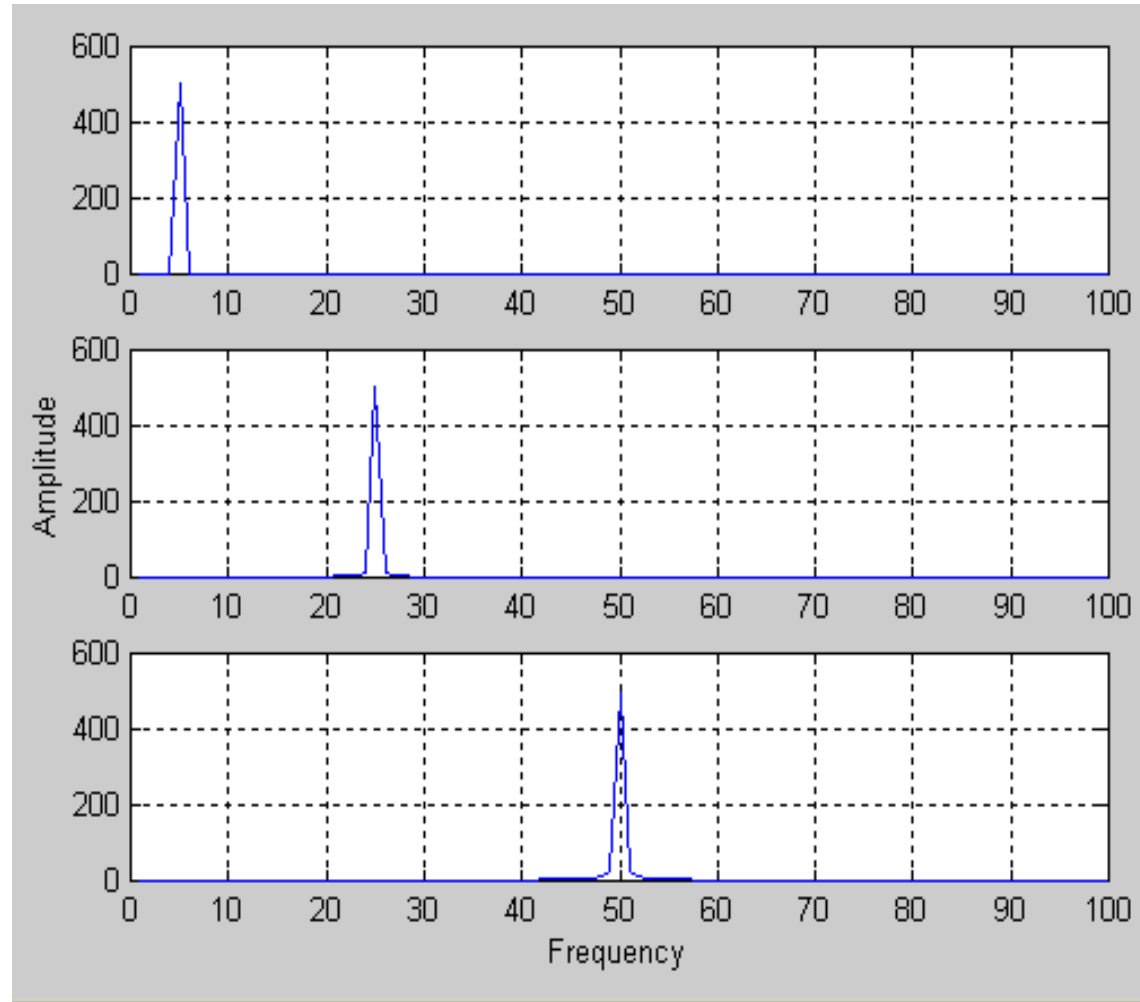


$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$





$$x_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X_1(\omega)$$

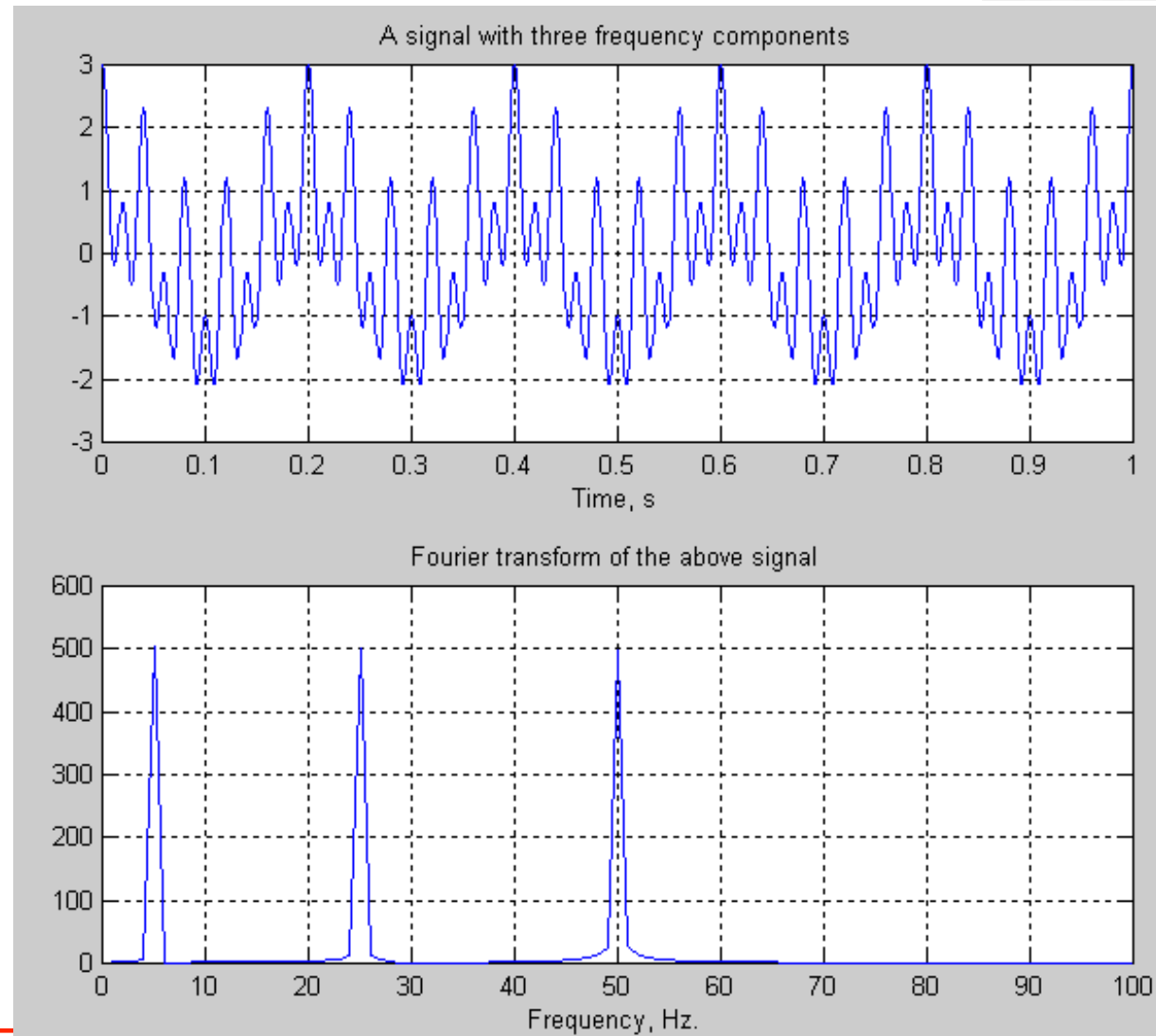


$$x_2(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X_2(\omega)$$

$$x_3(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X_3(\omega)$$



$$\begin{aligned}x_4(t) &= \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\ &+ \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\ &+ \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)\end{aligned}$$



$$x_4(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_4(\omega)$$



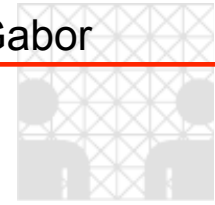
Die Fourier-Transformation liefert die spektrale Zusammensetzung eines Signals, sie liefert aber keine Information über die zeitliche Relation dieser Spektralkomponenten.

Stationäre Signale bestehen aus Spektralkomponenten, die sich über die Zeit nicht ändern:

- alle Spektralkomponenten bestehen über die gesamte Zeit
- eine Zeitinformation wird daher nicht benötigt
- die Fourier-Transformation arbeitet exzellent für stationäre Signale

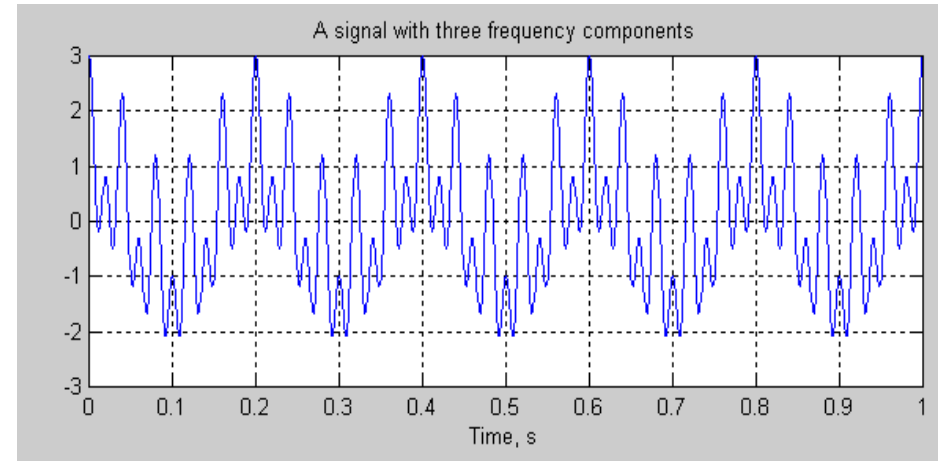
Nichtstationäre bestehen aus zeitveränderlichen Spektralkomponenten

- Viele Signale (beispielsweise Audiosignale) weisen typischerweise instationäres Verhalten auf, d.h. die im Signal enthaltenen Frequenzen sind zu gewissen Zeiten stärker, zu gewissen Zeiten weniger stark vertreten.
- Wie bestimmt man die zeitliche Lage der Spektralkomponenten?
- Die Fourier-Transformation zeigt nur, welche Spektralkomponenten im Signal vorkommen, nicht aber, welche Komponente zu welchem Zeitpunkt vorliegt.
- Wir benötigen eine andere Methode, die zeitliche Lage der einzelnen Spektralkomponenten zu bestimmen und darzustellen.



Stationäre Signale ändern sich nicht über die Zeit

$$\begin{aligned}
 x_4(t) &= \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\
 &+ \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\
 &+ \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)
 \end{aligned}$$

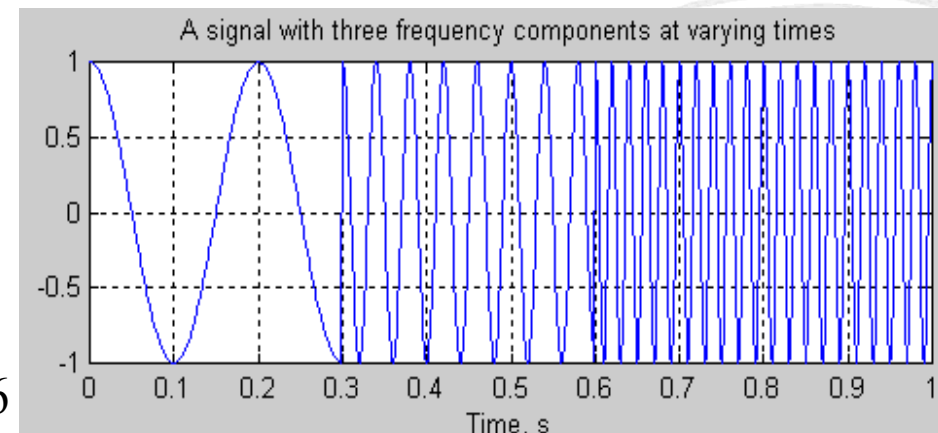


Nichtstationäre Signale besitzen ein zeitveränderliches Spektrum

$$x_5(t) = [x_1 \oplus x_2 \oplus x_3]$$

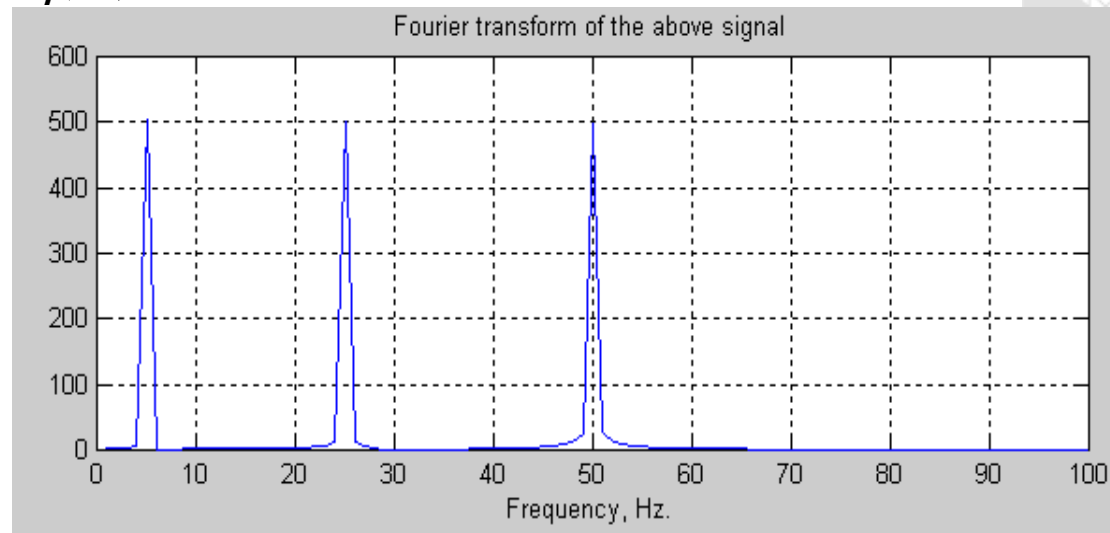
$\oplus$ : Aneinanderreihung

$$x_4(t) = \begin{cases} \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t < 0,3 \\ \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) & \text{für } 0,3 \leq t < 0,6 \\ \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) & \text{für } 0,6 \leq t < 1 \end{cases}$$



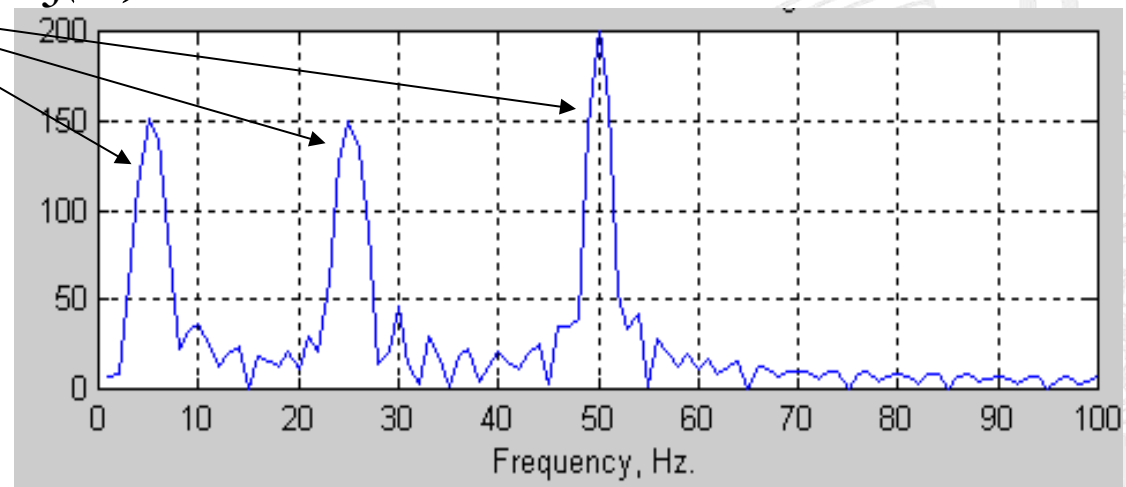


$$X_4(\omega)$$



Genauere Information,  
welche Frequenzen im  
Signal vorkommen, aber  
keine Information zu  
welchem Zeitpunkt eine  
Frequenzkomponente  
vorkommt.

$$X_5(\omega)$$





## Sinus-Signale und Exponentialsignale

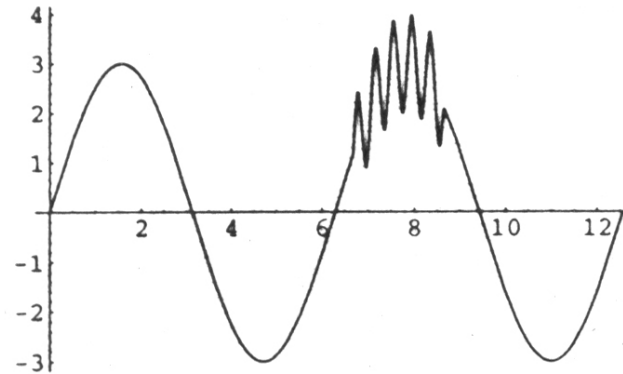
- sind in der Zeit unendlich ausgedehnt → keine zeitliche Lokalisation
- unendlich schmal im Frequenzbereich → exakte spektrale Lokalisation
- eine globale Analyse ist für ein nichtstationäres Signal nicht aussagekräftig .

Wir benötigen ein lokales Analyseverfahren für eine Zeit-Frequenz-Darstellung (time-frequency representation, TFR) von nichtstationären Signalen

- Kurzzeitspektralanalyse oder Spektrogramme (Short Time Fourier Transformation): Wir zerlegen das Signal in kurze Zeitintervalle, die kurz genug sind, dass wir das Signal in ihnen stationär annehmen können, und berechnen dann von jedem Segment die Fourier-Transformierte (Gabor 1946).
- Unterschiedliche Spektrogramme unterscheiden sich in der Wahl der Wichtungsfunktion
- Die Kurzzeitspektralanalyse ist ein wichtiger Baustein moderner Sprach- und Audiocodierverfahren sowie Verfahren zur Spracherkennung



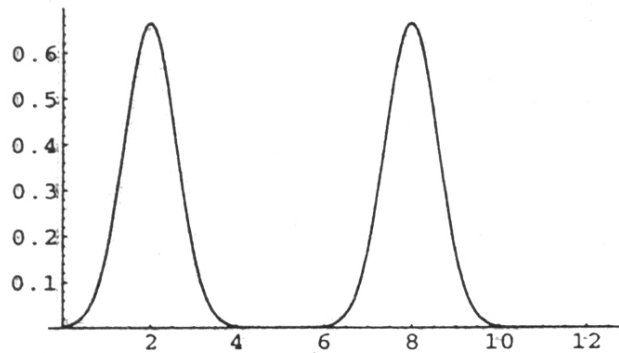
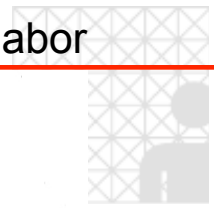
Example (from [8]): windowing



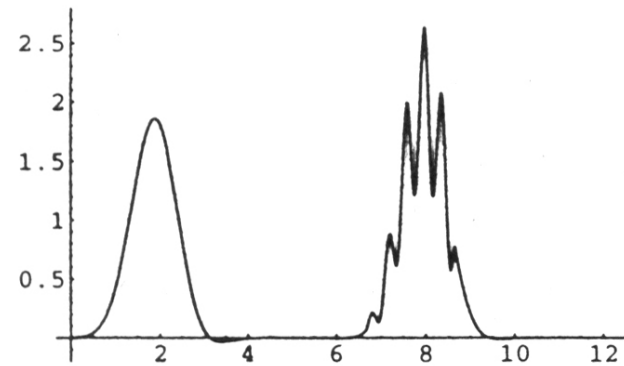
(a) Niederfrequentes Sinussignal mit teilweise überlagertem hochfrequenten Sinus

$$2.1 \text{ a) } \sin(\omega t) + \sin(k\omega t) \Big|_{3\pi-\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} = \sin(\omega t) + \sin(k\omega t) \cdot \text{rect}(t - t_0)$$

$$\frac{1}{2} j(\delta(\cdot) - \delta(\cdot)) + \frac{1}{2} j(\delta(\cdot) - \delta(\cdot)) \otimes (\text{sinc}(\cdot) \cdot e^{-j\omega t_0})$$



(b) Zwei Gaußfunktionen der Standardabweichung 0.6



(c) Multiplikation der beiden Signale (a) und (b)

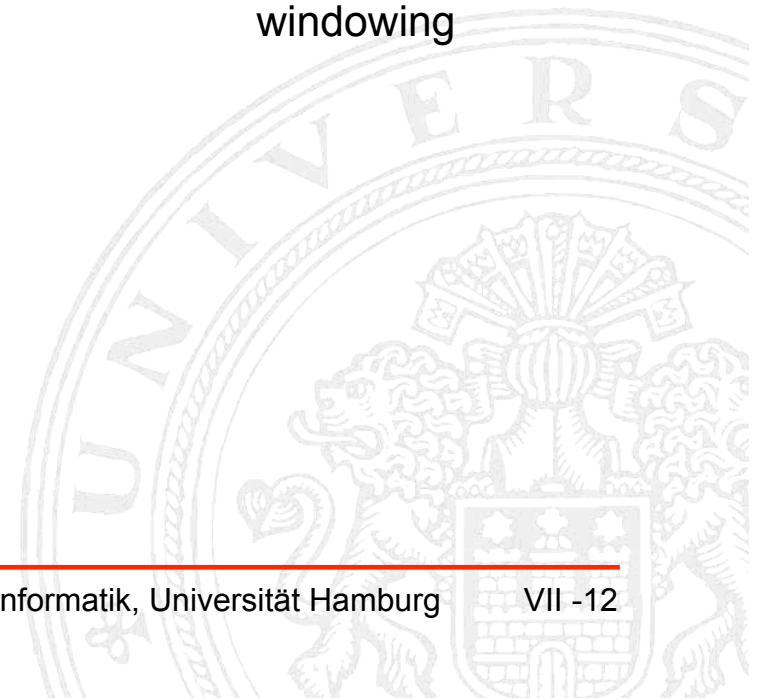
2.1 c)  $\sin(\omega t) \cdot G(t, \sigma; \mu = 2) + (\sin(\omega t) + \sin(k\omega t)) \cdot G(t, \sigma; \mu = 8)$  : Gaussian windowing

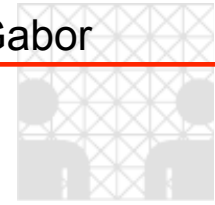


$$\approx \underbrace{F(G(\cdot)) + \frac{1}{2} j(\delta(\cdot) - \delta(\cdot)) \otimes F(G(\cdot))}_{\text{„locality thru windowing“}}$$

„locality thru windowing“

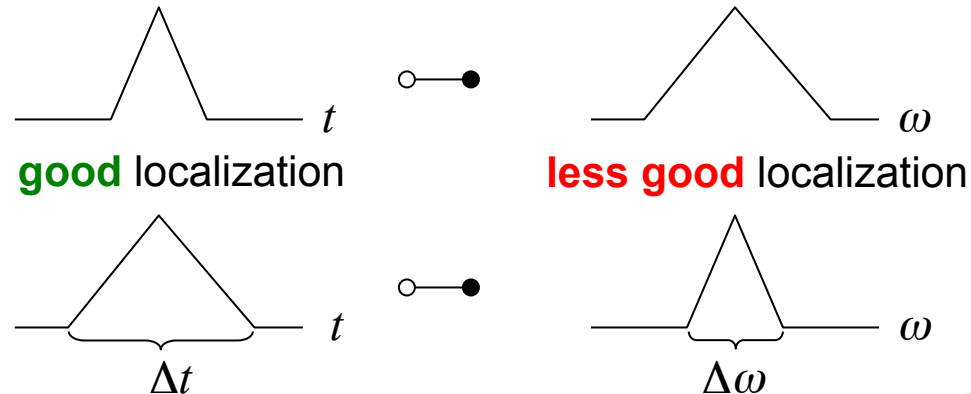
appropriate!





### Gedankenexperiment on window functions

- class(es) of window functions
- compact support of window function
- parameters = degrees of freedom
- tradeoff w.r.t. locality



- desiderata for window function
    - locality** in time/space and frequency domain *plus*
    - minimization** of uncertainty relation *plus*
    - window functions** with compact support and rapid decay *plus*
    - tuning of specificity** w.r.t. local signal structure *plus*
    - convolution** with filter kernels (= impulse response function of LTI system)
- **class of windowed FT** ... and beyond



- desiderata for window function:
  - locality** in time/space and frequency domain *plus*
  - minimization** of uncertainty relation *plus*
  - window functions** with compact support and rapid decay *plus*
  - tuning of specificity** w.r.t. local signal structure *plus*
  - convolution** with filter kernels ( $\equiv$  impulse response function of LTI system)
- **goals:** - signal representation w.r.t. localized time and frequency
  - complete signal representation; optimal w.r.t. ...
  - „... our everyday experiences – especially our auditory sensations – insist on a description in terms of both time and frequency.“ (D. Gabor, 1946, p. 429)

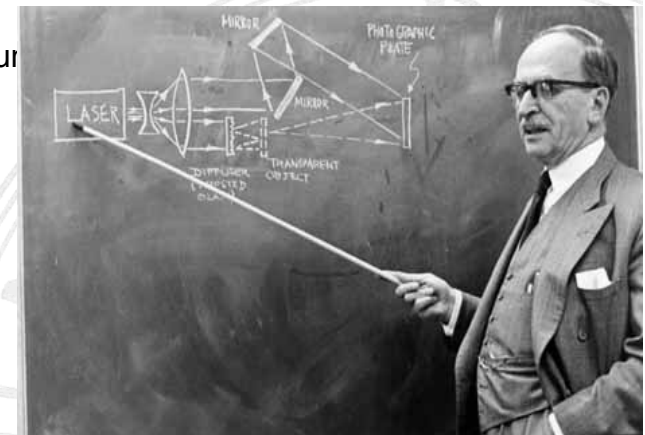
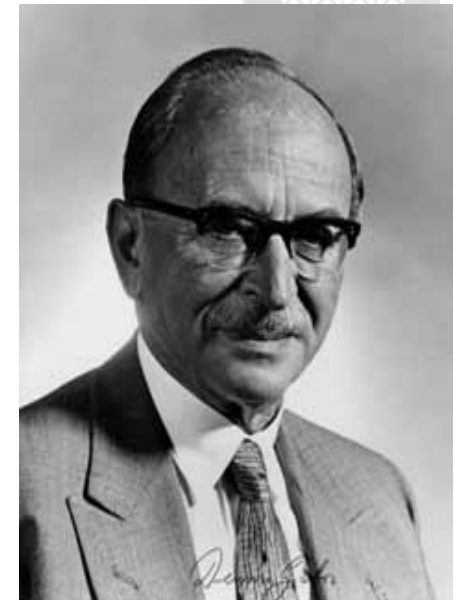
**Dennis Gábor** (eigtl. *Dénes Gábor*) (\* 5. Juni 1900 in Budapest, † 8. Februar 1979 in London) war ein ungarischer Physiker, der später die britische Staatsbürgerschaft annahm.

Er absolvierte das Studium der Physik 1920 an der Technischen Universität von Budapest. Weitere Studien an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg folgten von 1921 bis 1924 mit dem Abschluss als Diplomphysiker. 1927 ging er zur Siemens & Halske AG (heute Siemens AG) in Berlin, wo er seine ersten Erfindungen (Hochdruck-Quecksilberdampf Lampe) machte. Als Folge der politischen Entwicklungen im Dritten Reich emigrierte er 1933 nach England und erhielt dort die britische Staatsbürgerschaft. In England war er für die Firma Thomson-Houston tätig.

1946 entwickelte er die Gabor-Transformation, eine örtlich eingeschränkte Variante der Fourier-Transformation, ursprünglich zur Lösung quantenmechanischer Probleme.

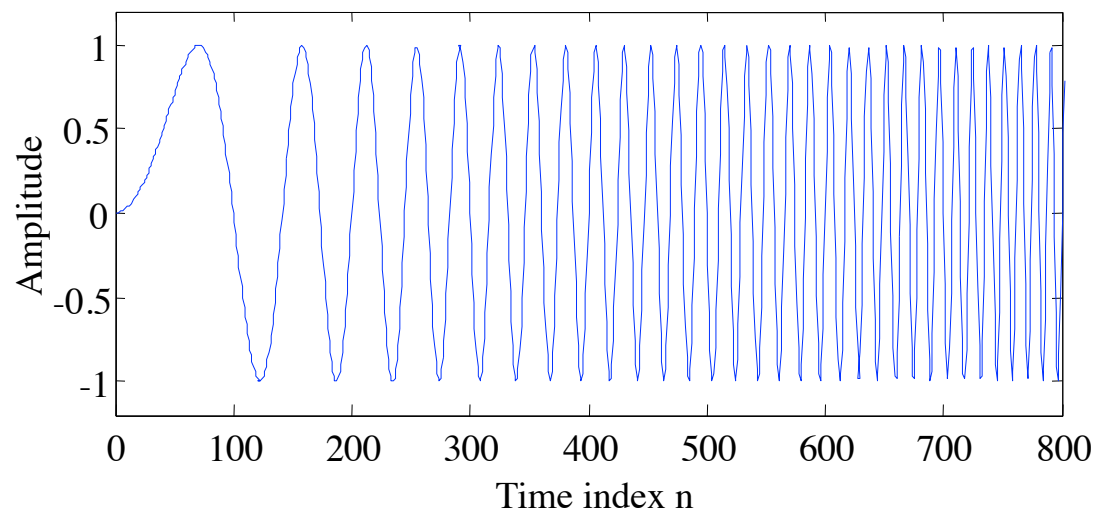
1947 entwickelte er das Prinzip der Holographie. Gábor trat 1949 in das Imperial College of Science and Technology in London ein, wo er 1958 Professor of Applied Electron Physics wurde. Gábor erhielt 1971 den Physik-Nobelpreis "für seine Erfindung und Entwicklung der holographischen Methode". Er meldete über 100 Patente an.

Erhalten geblieben ist auch Gábors wahrer Ausspruch:  
"Für die Mehrheit der Menschen ist Arbeit die einzige Zerstreuung,  
die sie auf Dauer aushalten können."





Beispiel: Chirp-Signal:  $x[n] = A \cos(\omega_0 n^2)$  für  $\omega_0 = 10\pi \times 10^{-5}$



Augenblicksfrequenz von  $x[n]$  ist  $2\omega_0 n$

Eine Fourier-Analyse über das gesamte Signal sagt zwar etwas über den gesamten Frequenzinhalt aus, nicht allerdings über die zeitlich veränderliche Charakteristik.

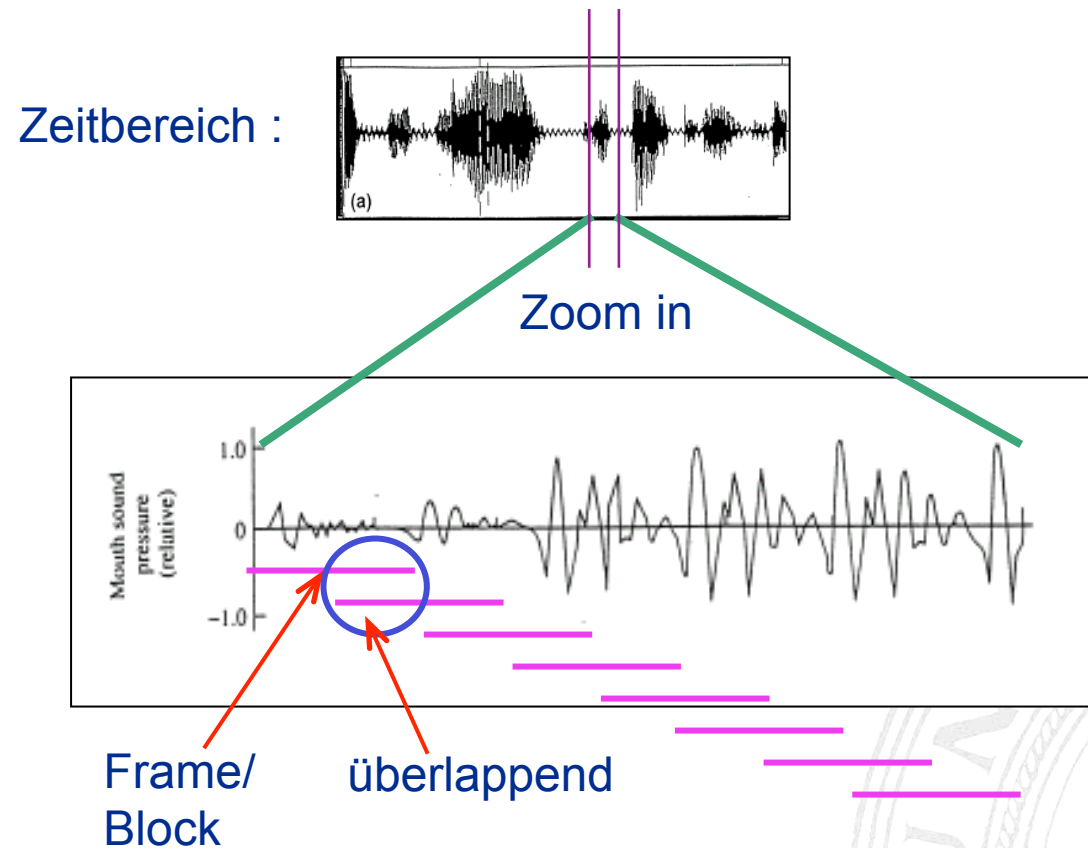
Abhilfe schafft die sogenannte *Kurzzeitspektralanalyse*.

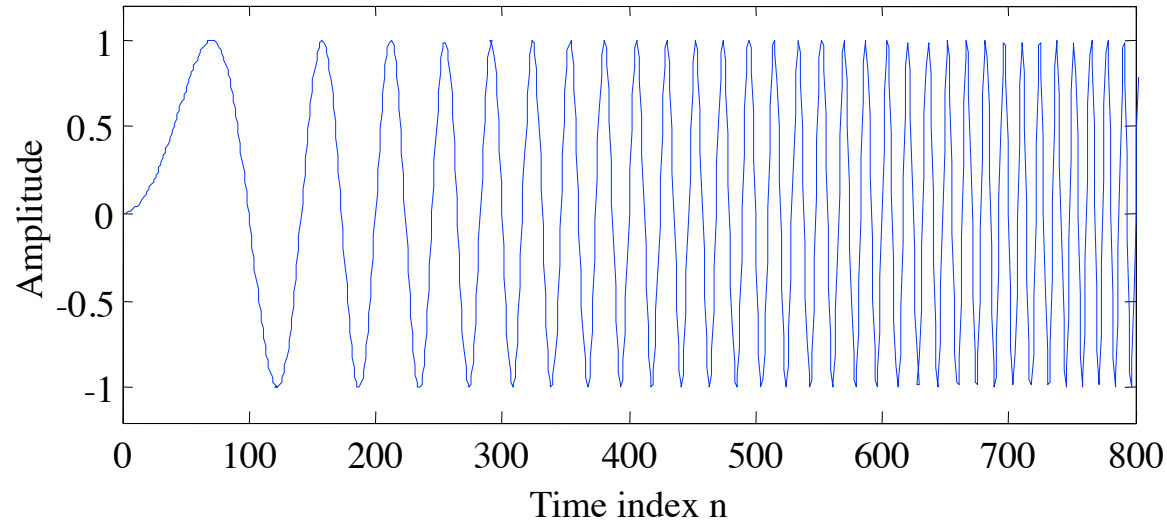
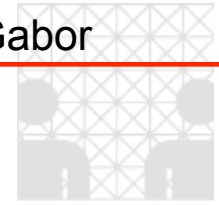




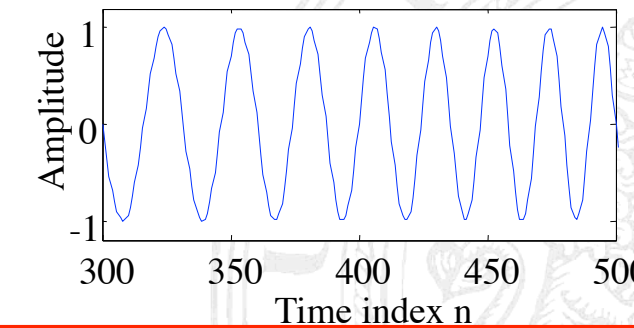
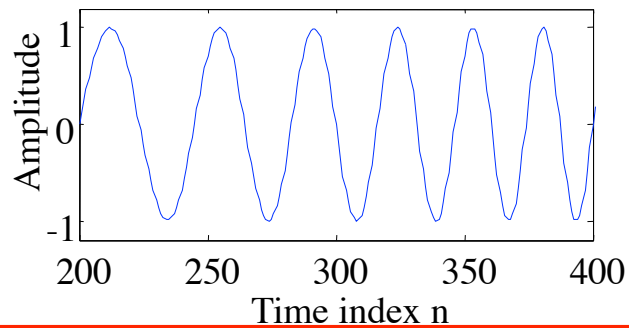
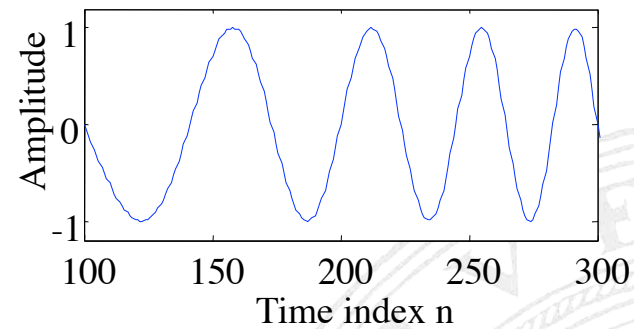
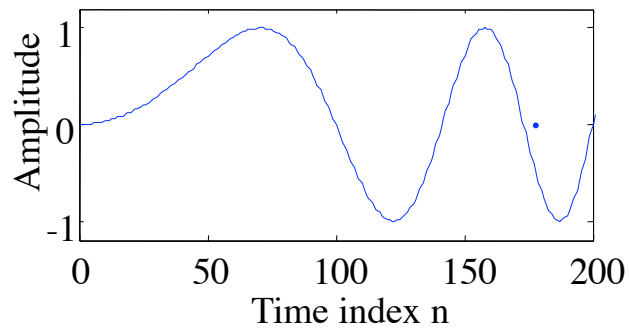
## Prinzip

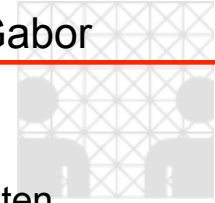
- Aus der Folge  $x[n]$  werden mit einer Fensterfunktion  $w[n]$  Blöcke der Länge  $N$  ( $N = 2^q$ ) herausgeschnitten.



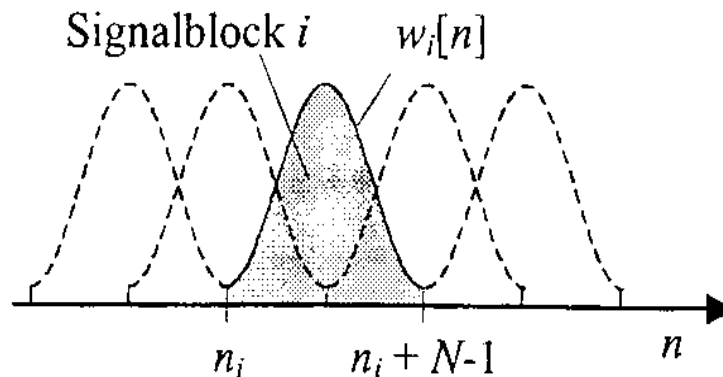


Vier Blöcke des Chirp-Signals, die durch ein rechteckiges Fenster mit je 200 Punkten Länge herausgeschnitten wurden





- Für jeden Block wird die FFT berechnet und in der Regel der Betrag der DFT-Koeffizienten graphisch dargestellt. Man erhält für jeden Block die so genannte Kurzzeit-Fouriertransformierte (engl.: Short-time Fourier transform, STFT)



$$X_{STFT}[n, k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] \cdot w[m] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X_{STFT}(t, \omega) = \int x(t-\tau) w^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

wobei  $w[n]$  eine geeignete Fensterfunktion darstellt.

- Für  $w[n] = 1$  reduziert sich die STFT zur DTFT von  $x[n]$
- Für  $w[n] = \delta[n] = \delta_{m,0}$  reduziert sich die STFT auf die Zeitfunktion
- Die Signalblöcke können sich dabei – wie in der Darstellung – überlagern, um bei der Darstellung zwischen den zeitlich aufeinander folgenden Spektren weiche Übergänge zu haben.
- $X_{STFT}[k, n]$  ist eine Funktion von 2 Variables: dem **Zeitindex**  $n$  und dem **Frequenzindex**  $k$
- $X_{STFT}[k, n]$  ist periodisch in der Frequenz mit der halben Samplefrequenz.
- Die Darstellung  $|X_{STFT}[k, n]|$ , bzw.  $|X_{STFT}[k, n]|^2$  nennt man **Spektrogramm**
- Zur Darstellung des Spektrogramms benötigt man 3 Dimensionen



## Kurzzeit-Fouriertransformierte:

Zeit-  
parameter

Frequenz-  
parameter

zu analysier-  
endes Signal

Kern der Fourier-  
Transformation  
(Basisfunktion)

$$X_{STFT}(t, \omega) = \int x(t - \tau) w^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Spektrogramm des  
Signals  $x(t)$

Signal um  $\tau$   
verschoben

Fensterfunktion



## Algorithmus zur Erstellung des Spektrogramms

Wähle eine Fensterfunktion endlicher Länge.

Die Fensterfunktion wird an den Signalanfang gelegt.

Wichte das Signal mit der Fensterfunktion.

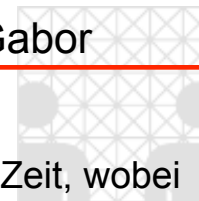
Berechne die Fourier-Transformierte des gewichteten Signals und speichere das Ergebnis.

Verschiebe die Signalfunktion um ein festes Intervall nach links.

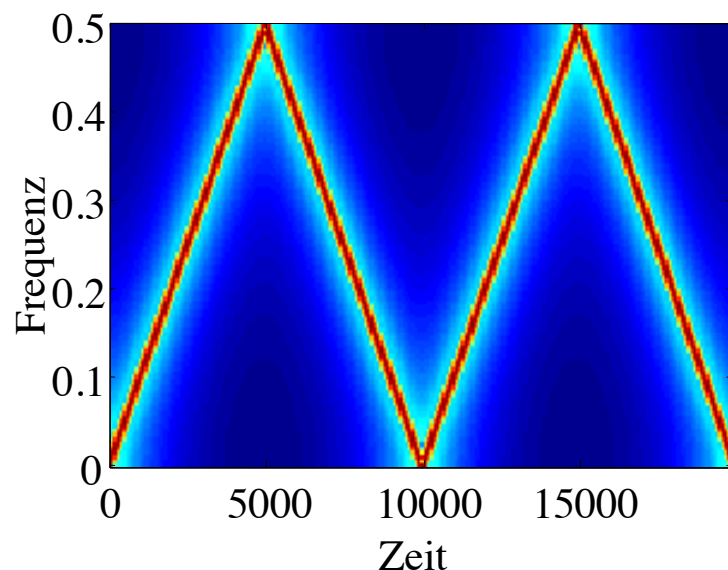
Gehe zu Punkt 3 zurück bis die Fensterfunktion den rechten Rand des Signals erreicht.

Wir erhalten für jede Fensterposition ein anderes Spektrum.

- Diese unterschiedlichen Spektren beinhalten somit die zu den einzelnen Zeitintervallen zugehörige spektrale Information. Dies ermöglicht uns eine gemeinsame Darstellung der Signalenergie über die Zeit und Frequenz.

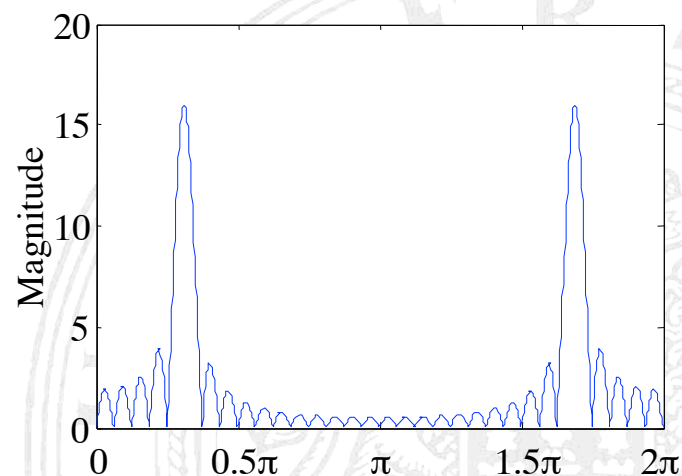


- Meist wird der Betrag der STFT 2-dimensional gezeichnet mit den Achsen Frequenz und Zeit, wobei der Betrag als Graustufe oder farbkodiert eingezeichnet wird.
- **Beispiel:** Plot des Betrags der STFT des Chirp-Signals  $x[n] = A \cos(\omega_0 n^2)$  mit  $\omega_0 = 10\pi \times 10^{-5}$  für 20 000 Abtastpunkte:



Die M-Form ergibt sich durch Aliasing!!

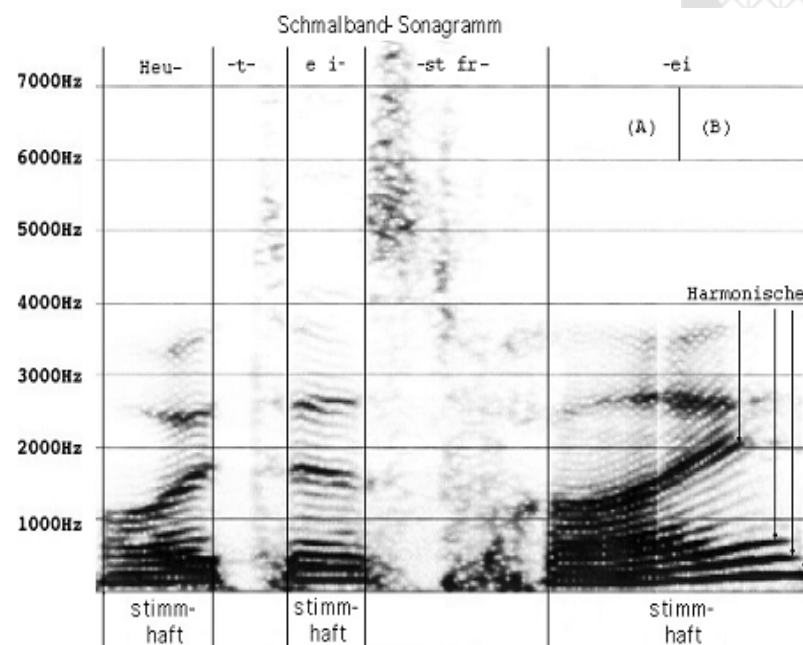
- Jede Spalte gibt das aktuelle Spektrum (die DFT) des Signals zum betreffenden Zeitpunkt an.
- Jedes einzelne Spektrum sieht in etwa so aus:



### Schmalband-Spektrogramm

Hohe Auflösung im Frequenzbereich, niedrige Auflösung im Zeitbereich .

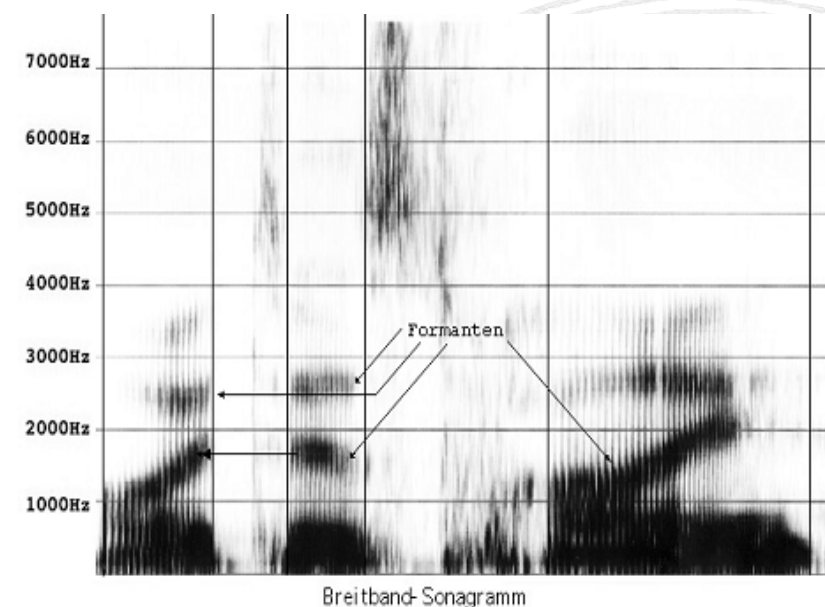
- Grundfrequenz und einzelne Harmonische (schmale parallele “Bänder”) sind gut zu erkennen und können sehr genau bestimmt werden.
- Formanten, d.h. Harmonische, die durch Resonanz eine maximale Intensität erreichen (Vokaltrakt) schwer zu erkennen.
- Einzelne Glottisschläge nicht sichtbar.

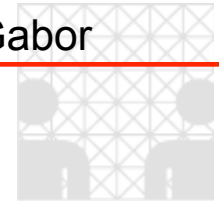


### Breitband-Spektrogramm

Hohe Auflösung im Zeitbereich, niedrige Auflösung im Frequenzbereich.

- Einzelne Glottisschläge sind gut sichtbar (die vertikale Linien).
- Die Formanten (breite horizontale “Bänder”) sind gut zu erkennen. Sie sind charakteristisch für die Laute, insb. für Vokale.





Man sieht die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Zeit- und Frequenzauflösung  
Entweder erzielt man eine hohe Zeitauflösung auf Kosten einer eingeschränkten spektralen Information, oder eine hohe Spektralauflösung wird mit einer Zeitverschmierung erkaufte.

Für die Auflösung (im Sinne von Trennung zweier Signale) im Zeitbereich  $\Delta T$  und im Frequenzbereich  $\Delta F$  gilt:

$$\Delta T \cdot \Delta F \approx 1$$

Die benötigte Fensterfunktion verbreitert die Auflösung zusätzlich.

Eine Integration über die Frequenzvariable ergibt im allgemeinen **nicht** die Zeitfunktion

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_{STFT}[n, k] \neq x[n]$$

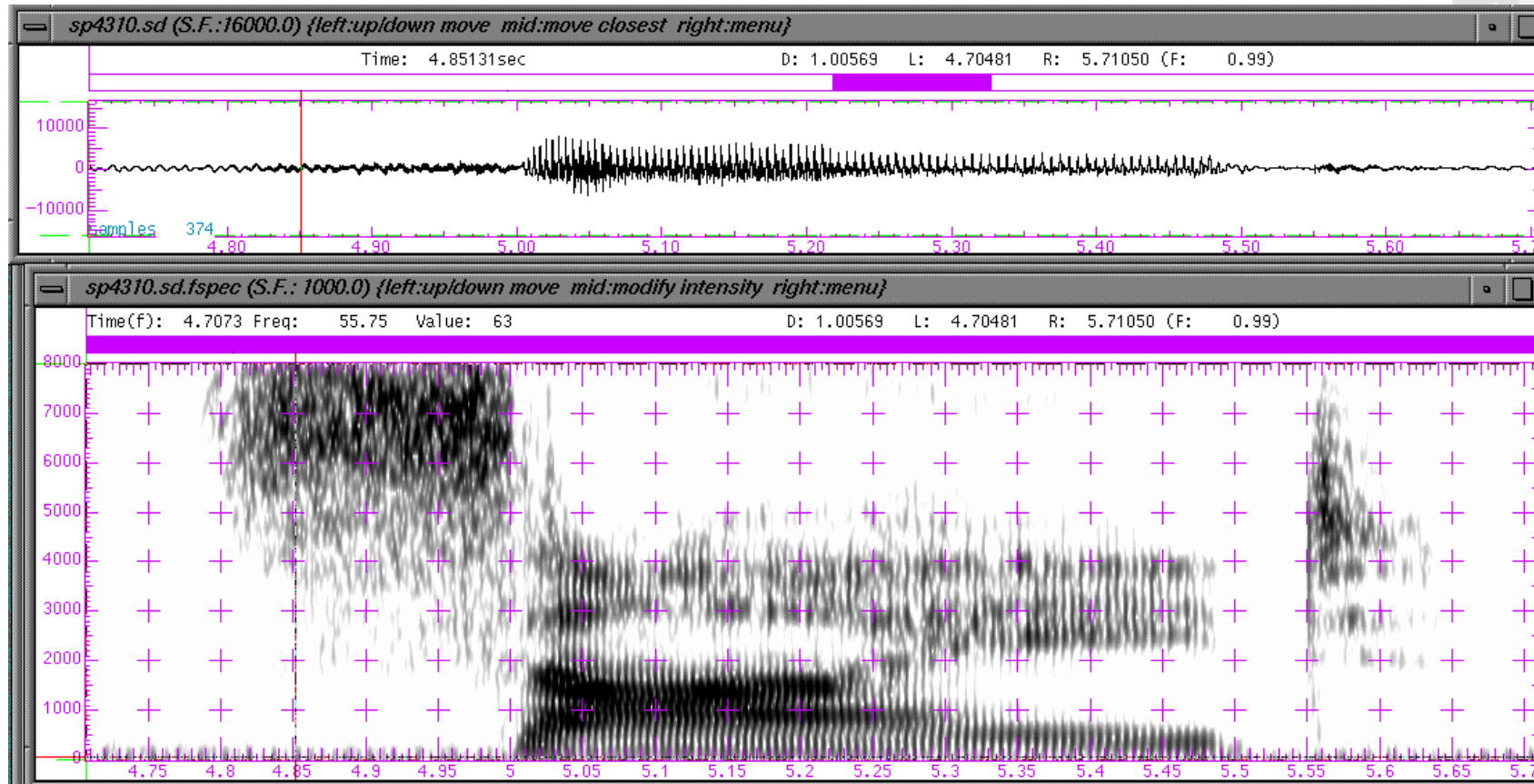
Eine Integration über die Zeitvariable ergibt im allgemeinen **nicht** die Frequenzfunktion

$$\sum_{n=0}^{N-1} X_{STFT}[n, k] \neq X[k]$$

Eine hierzu verwandte Darstellung ist die so genannte **Subband-Filterung**. Anstatt von der Zeitfunktion geht diese vom Spektrum aus und schneidet hieraus schmale Frequenzbereiche heraus, die sodann einzeln für sich in den Zeitbereich transformiert werden.



# 'side'

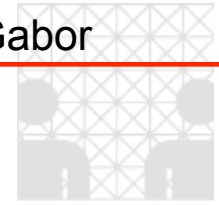


hochfrequenter **Reibelaut**,  
rauschähnlich

Stimmhafte Laute,  
Glottisschläge gut sichtbar

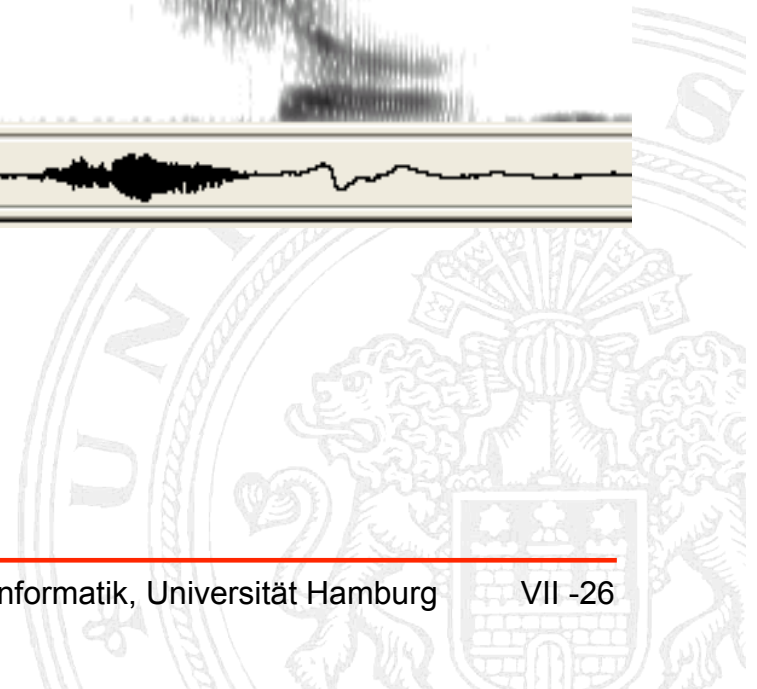
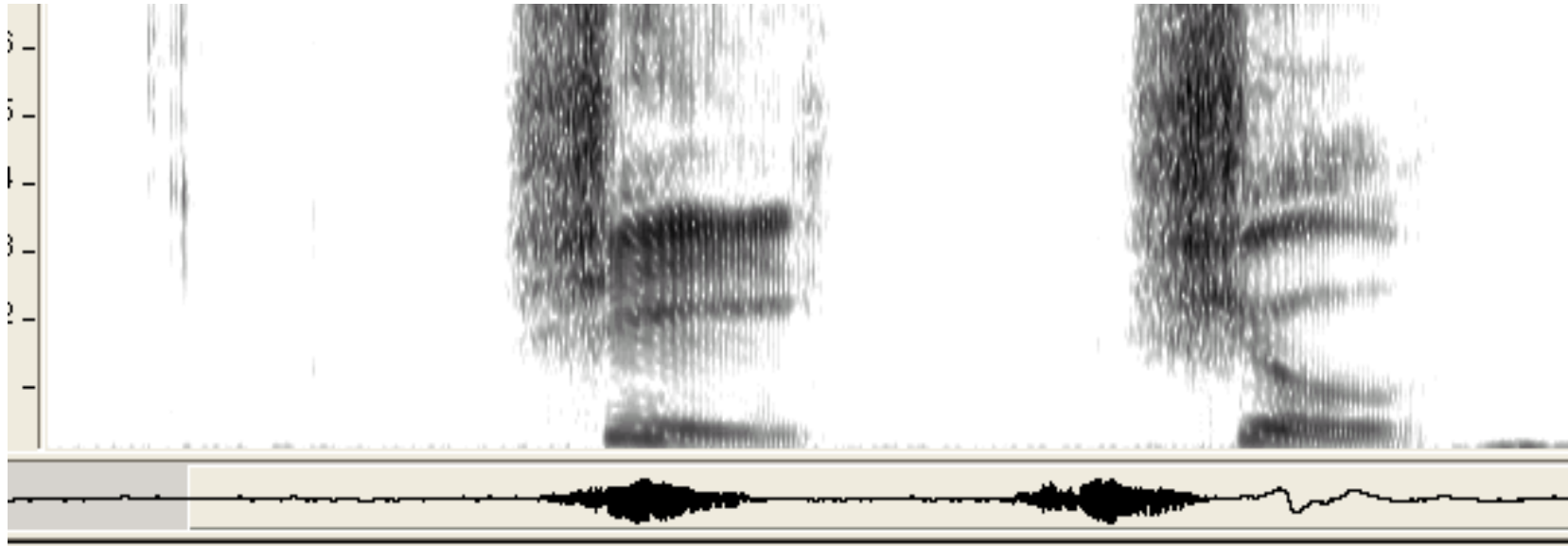
Pause

Verschlusslaut



***'she'***

***'shoe'***





Das Spektrogramm wird häufig in der Sprach- und Musikanalyse eingesetzt. Bei korrekter Anwendung entstehen keine Artefakte der Signalverarbeitung, d.h. alle auftretenden Strukturen entsprechen Signalanteilen.

➔ Die Interpretation ist einfach.  $X_{STFT}(t, \omega) = \int x(\tau) w^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Auflösung:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

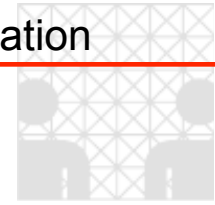
$$X_{STFT}[n, k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] \cdot w[m] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

**Zeitauflösung**, gibt den Mindestabstand um zwei Signale zeitlich aufzulösen.

**Frequenzauflösung**, gibt den Mindestabstand um zwei Signale im Spektrum zu trennen

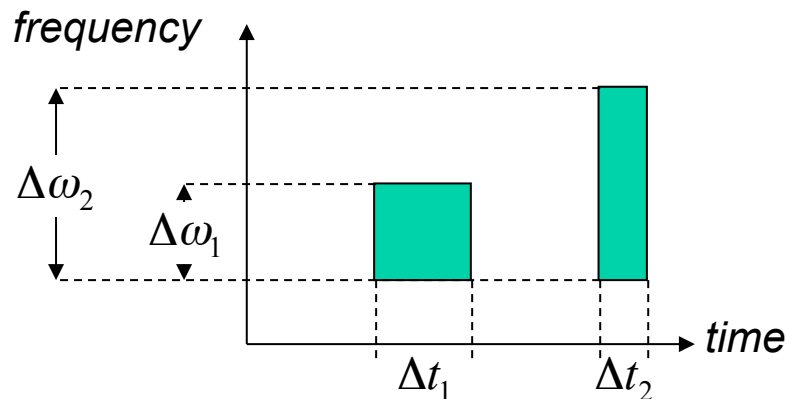
**Die Zeit- und Frequenzauflösung kann nicht gleichzeitig beliebig hoch sein!** (Heisenbergsche Unschärferelation, 1930)

➔ Wir können die zeitliche Lage und zugehörige Frequenz nicht gleichzeitig exakt bestimmen. Wir können nur für ein **endliches Zeitintervall** ein zugehöriges **Frequenzintervall** angeben, in dem die Signalenergie konzentriert ist.



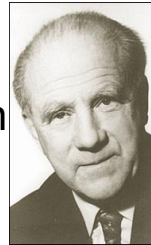
## Gabor-Transformation

- quantum theory of information (1946)



! Heisenberg 's uncertainty relation

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

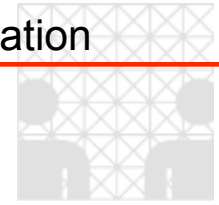


! Gabor 's **logon** of information with minimal area in information diagram, with variances  $\sigma_t$ ,  $\sigma_\omega$ .

- minimum of uncertainty relation for

$$e^{i\omega t} \cdot G(t; \sigma) = (\cos \omega t + i \sin \omega t) \cdot G(t; \sigma)$$

- full 2-dim. generalization of Gabor 's theory for 2-dimensional spatial filters by J.G. Daugman in 1985 ([2])

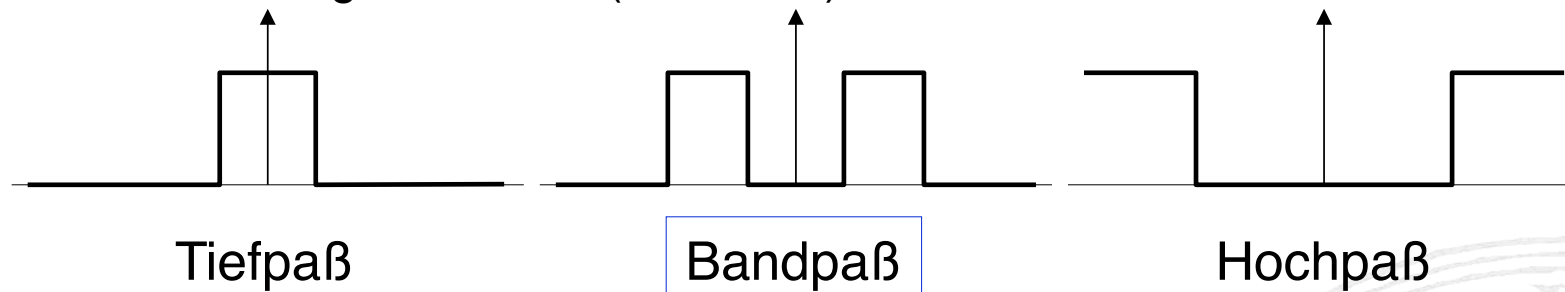


## Gabor-Transformation als Bandpaßfilter

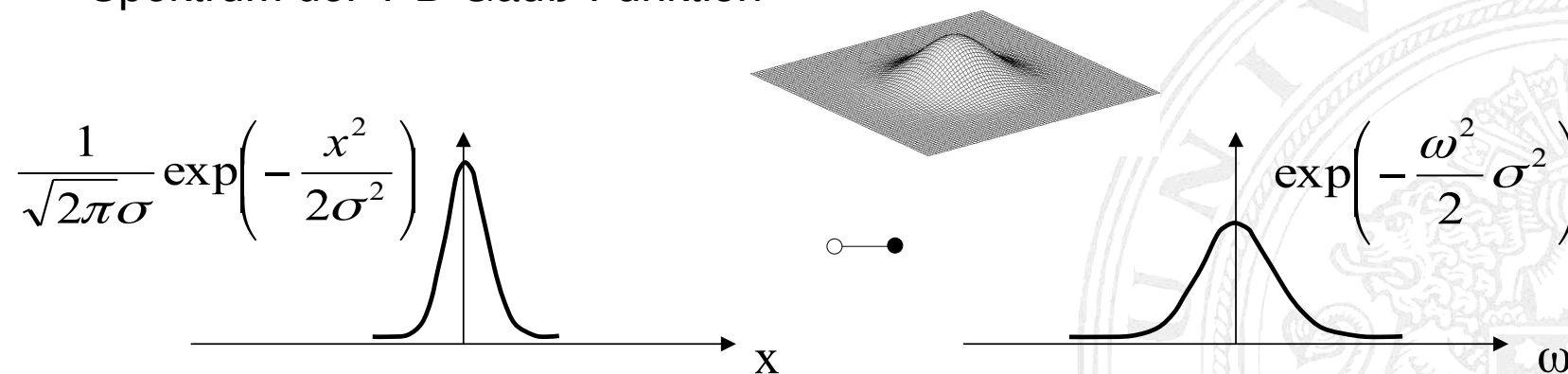
D.Gabor (1946): Untersuchung der Eigenschaften lokaler (komplexer) Signalrepräsentationen

### Tief- und Bandpaß

- Filter und ihre Eigenschaften (idealisiert)



- Spektrum der 1-D Gauß-Funktion





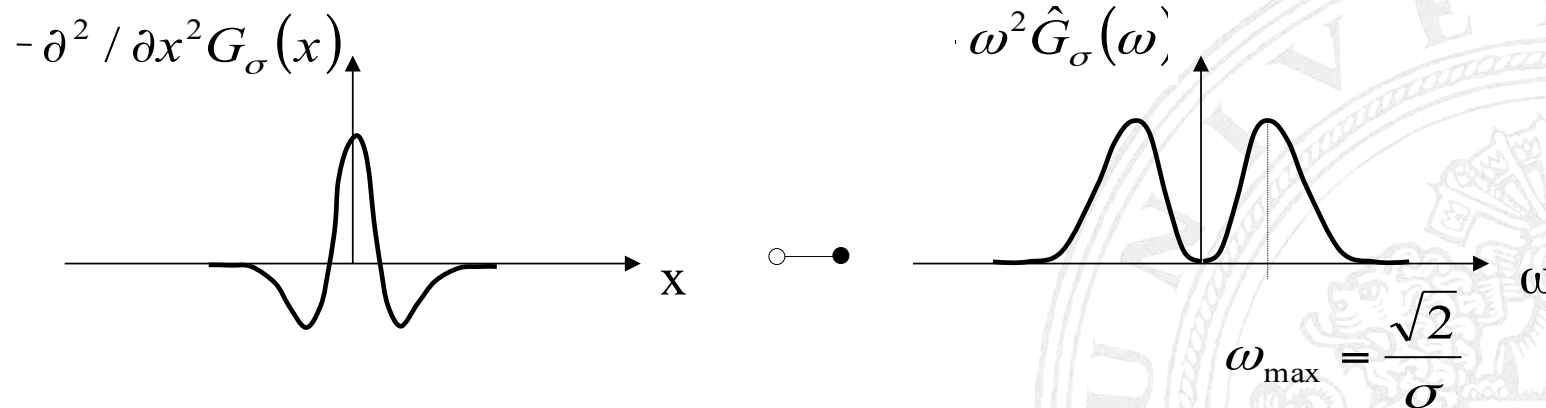
## Differentiations- und Verschiebungstheorem

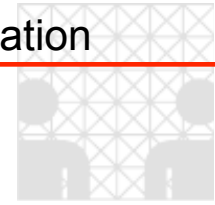
### ▪ Ableitung(en) der Gauß-Funktion und Amplitudenspektrum

allgemein : beliebige Funktion,  $f(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad -\omega^2 \cdot F(\omega)$$

Funktion : Gauß 'sche Dichtefunktion,  $G_\sigma(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}\sigma$



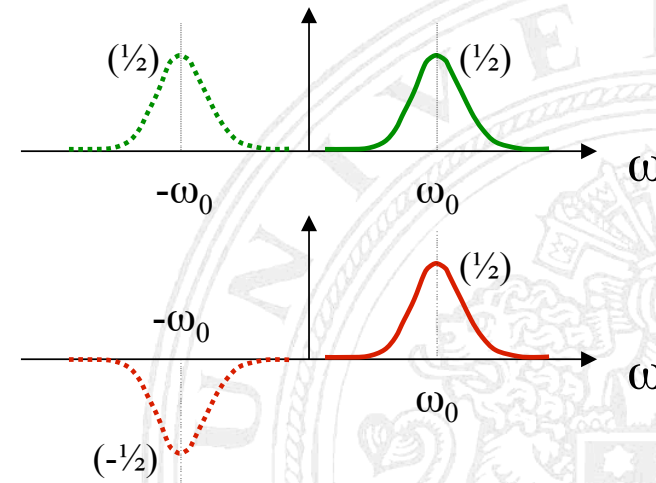
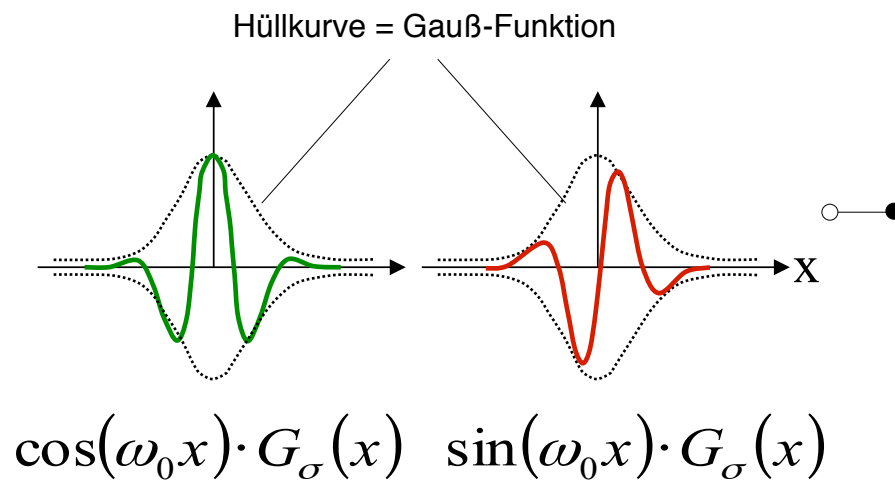


▪ **Verschiebung einer Funktion im Frequenzraum**

allgemein: beliebige Funktion (1D)

$$\begin{aligned}
 \exp(\mathbf{j}\omega_0 x) \cdot f(x) & \quad \circ \bullet \quad F(\omega - \omega_0) \\
 = (\cos \omega_0 x + \mathbf{j} \sin \omega_0 x) \cdot f(x) & \quad = \delta(\omega - \omega_0) * F(\omega) \\
 = (\cos \omega_0 x, \sin \omega_0 x) \cdot (f(x), 0) & \quad = \frac{1}{2} [(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))] \\
 \equiv (h_{\text{even}}(x), h_{\text{odd}}(x)) & \quad + [(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))] * F(\omega)
 \end{aligned}$$

hier: Gauß 'sche Dichtefunktion im Frequenzraum,  $\hat{G}(\omega)$





## 2D Bandpaßfilter mit Orientierungsselektivität

### Laplace

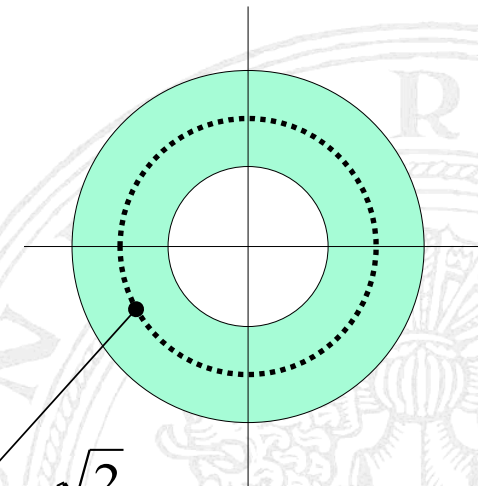
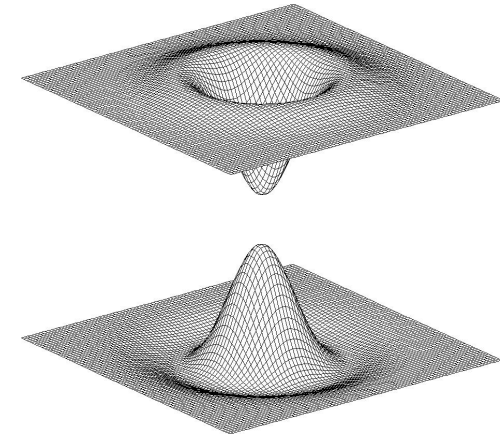
- Filter und ihre Eigenschaften

$$\begin{aligned}\Delta G(\vec{x}, \sigma) &= G_{xx}(\vec{x}, \sigma) + G_{yy}(\vec{x}, \sigma) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \cdot \left( 2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \cdot G(\vec{x}, \sigma)\end{aligned}$$

- Spektrum

$$\Delta G(\vec{x}, \sigma) \quad \circ \bullet \quad - \underbrace{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}_{\omega_r^2} \cdot \hat{G}(\vec{\omega})$$

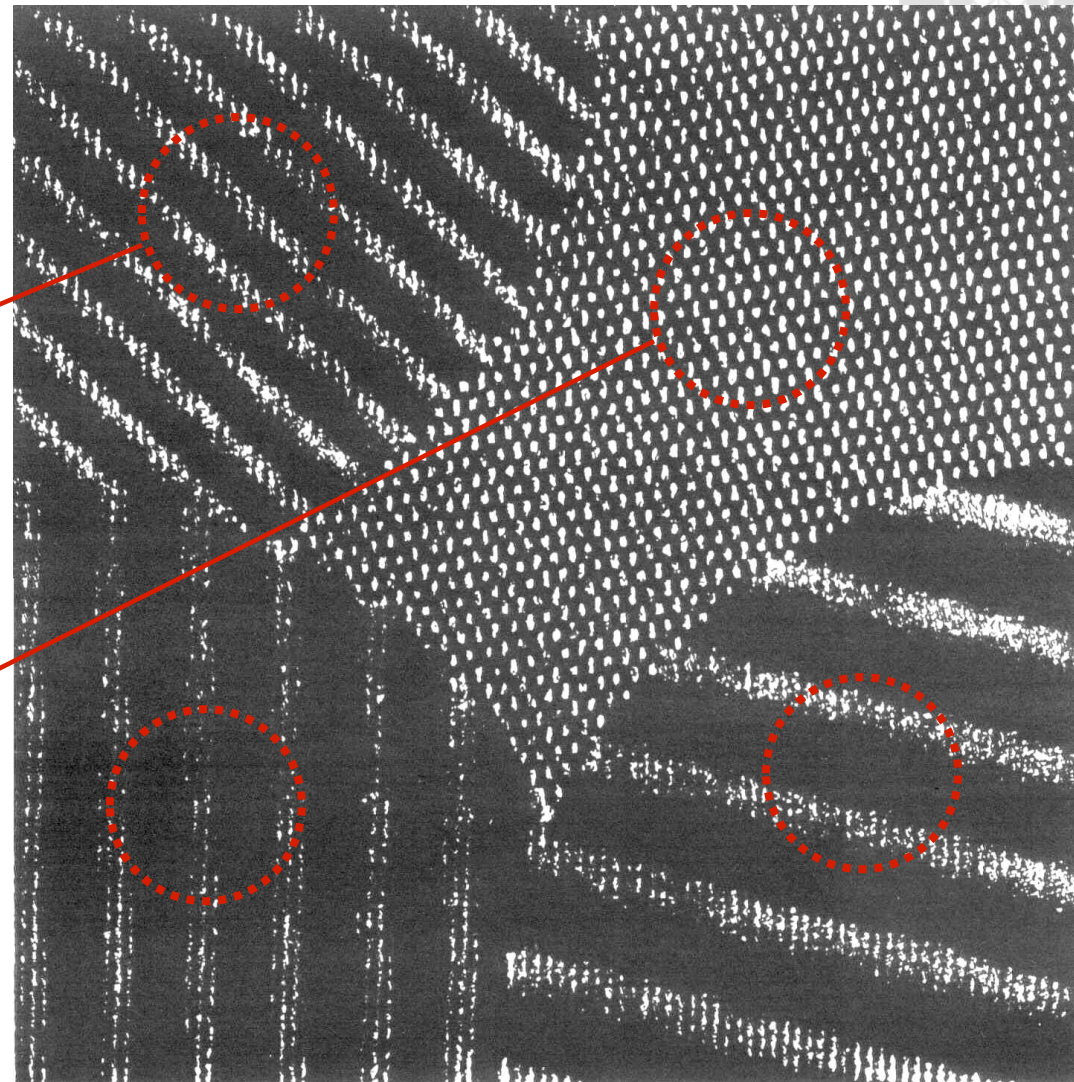
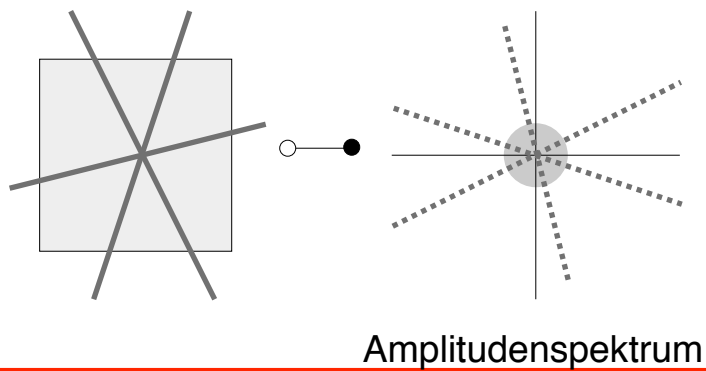
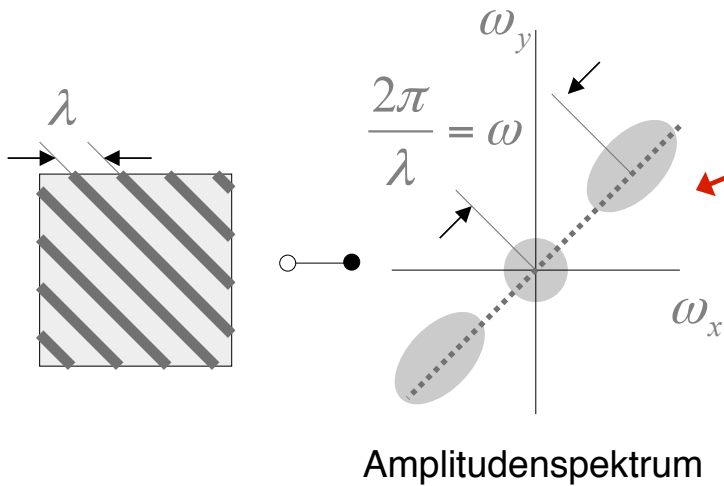
$$(\omega_x)_{\max} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$$

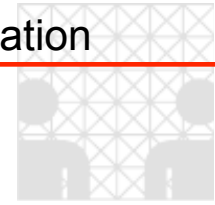




# Detektion orientierter Struktur (Texturen)

## Orientierte Strukturen im Frequenzraum





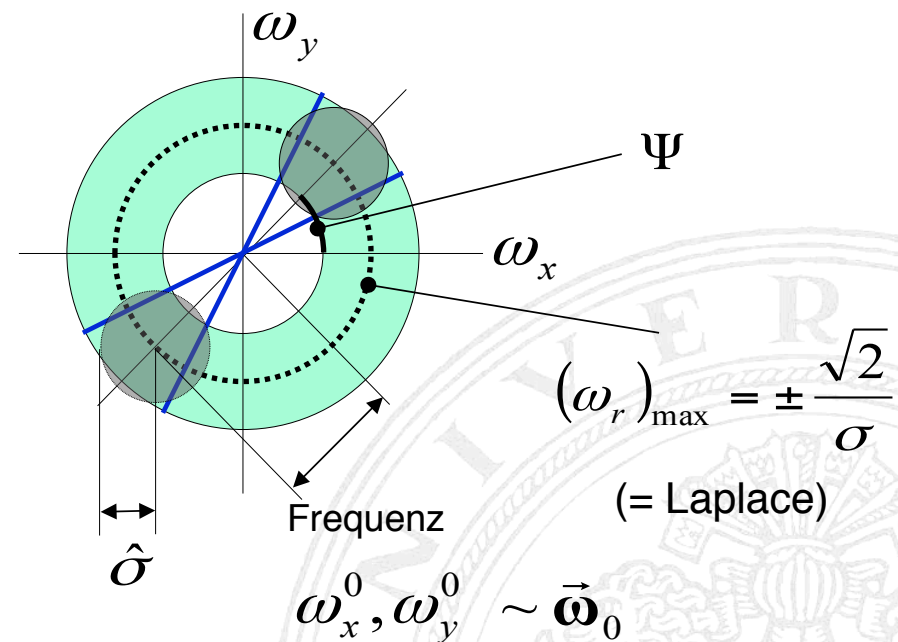
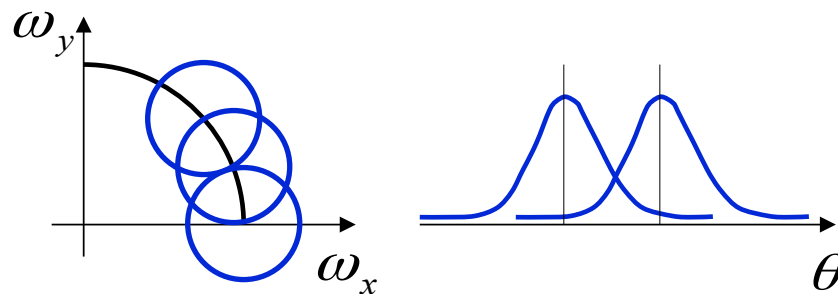
## Spektrum orientierter Bandpaßfilter

Laplace-Operator besitzt ein **isotropes** Spektrum, d.h. **Strukturen einer bestimmten Ortsfrequenz, aber unterschiedlicher Vorzugsrichtungen können nicht differenziert werden !**

- **Spektrum eines Bandpaßfilters mit Orientierungsselektivität – Gabor-Filter**

1. Sektor (mit Orientierung  $\Psi$ )
2. Gauß'sche Fensterfunktion

- **Abtastung des Ringes mit glatten Fensterfunktionen**





## Verschobene Gaussfunktionen und Ortsfilter in 2D

- 2D Gauss-Funktion und Fourier-Verschiebungstheorem (s.o.)

es gilt:

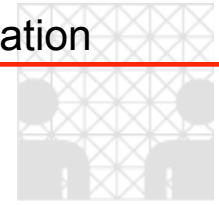
$$f(\vec{x}) \cdot \exp(\mathbf{j}(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x})) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad F(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$$

hier geg.: **Spektrum der Gauss-Funktion** im Frequenzraum, das um  $\vec{\omega}_0 = (\omega_x^0, \omega_y^0)$  verschoben wurde ( $\rightarrow$  **Gabor-Filter**)

$$\hat{G}(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\omega_x - \omega_x^0)^2 + (\omega_y - \omega_y^0)^2\right] \cdot \sigma^2\right)$$

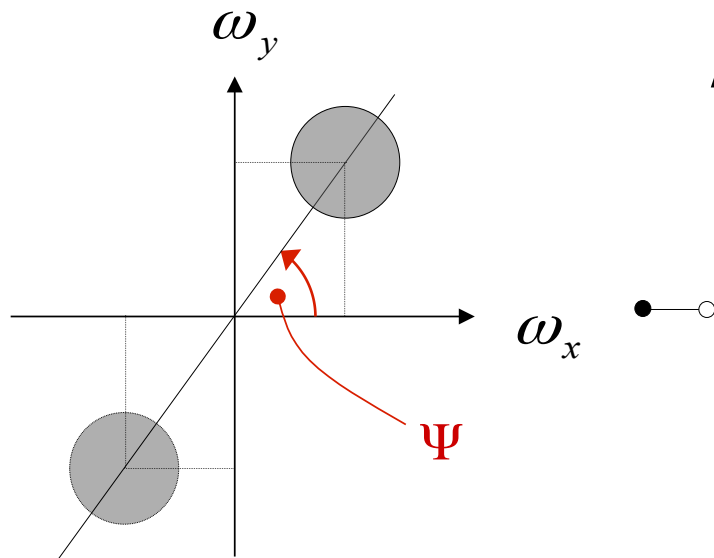
$$Gabor(\vec{x}) = \underbrace{\exp(\mathbf{j}(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}))}_{\cos(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}) + \mathbf{j} \sin(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x})} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\cos(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}) + \mathbf{j} \sin(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{x})$$

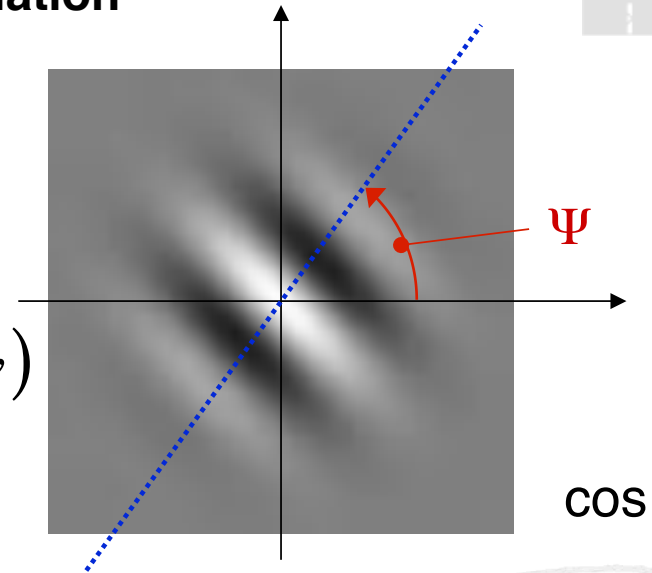


▪ **Gabor-Bandpass und seine Rücktransformation**

Parameter für ein gegebenes Spektrum  
 (  $\omega = 2\pi\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = 1/\lambda$  )

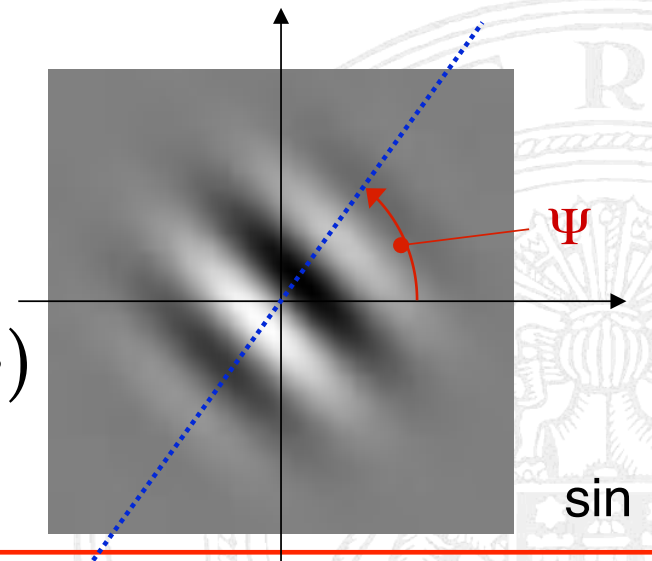


$h_{even}(x, y)$

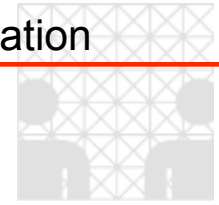


COS

$h_{odd}(x, y)$

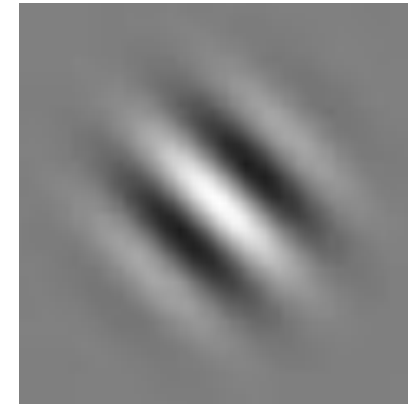
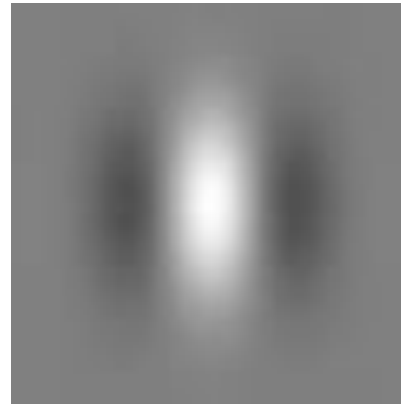
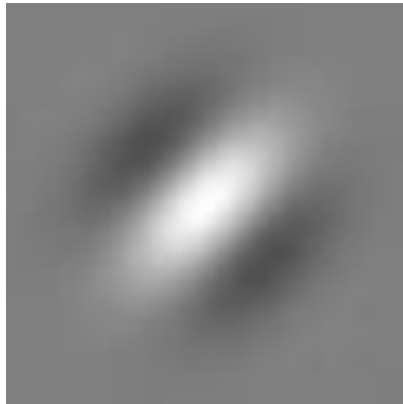


SIN

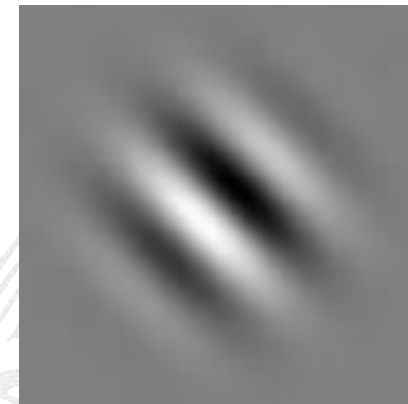
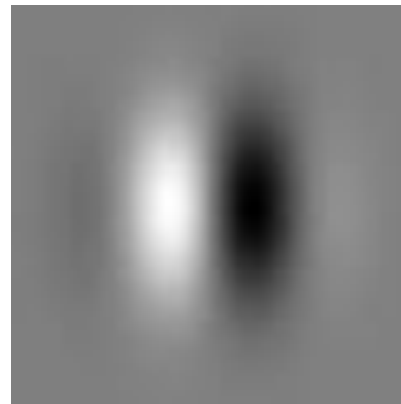
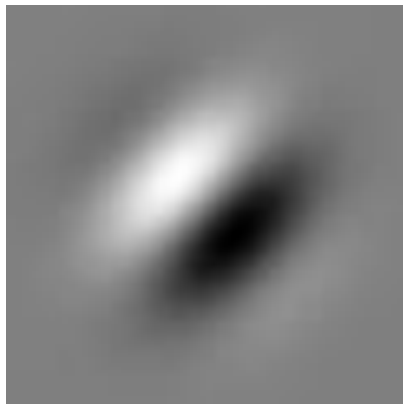


### Gabor-Funktionen (cos / sin)

COS



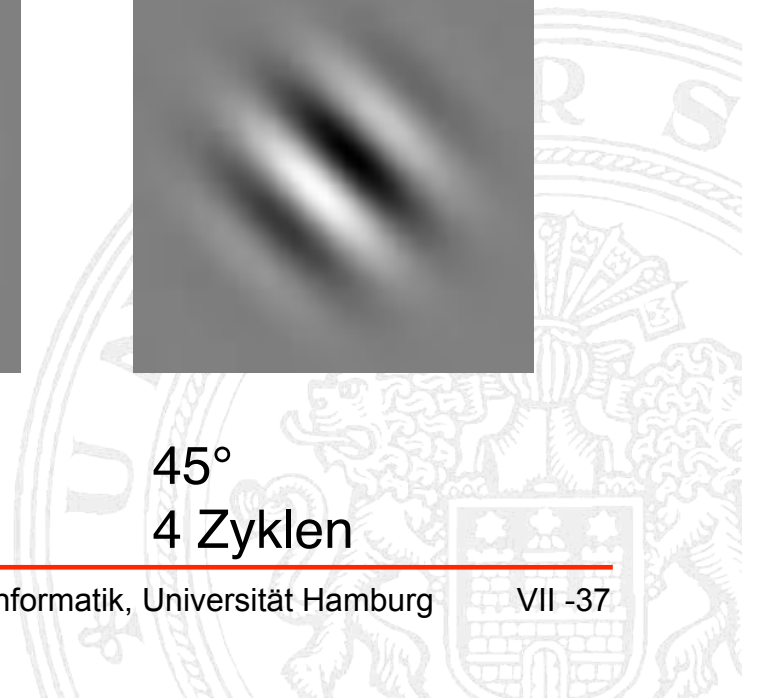
SIN



135°  
2 Zyklen

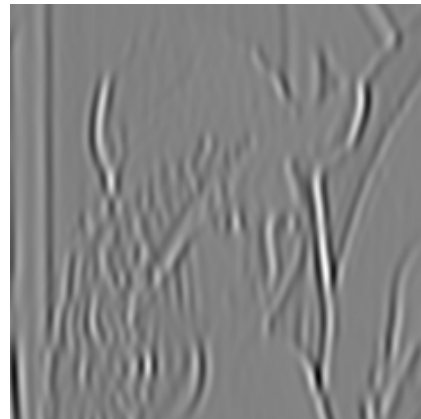
0°  
2 Zyklen

45°  
4 Zyklen

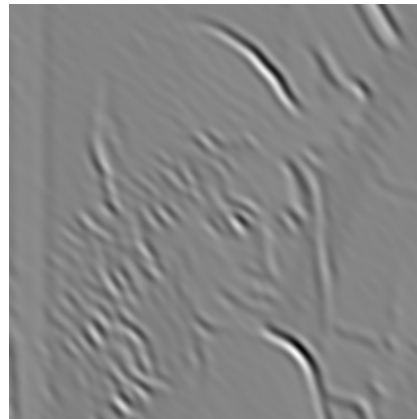


## Beispiel für 2D Gabor-Filterung

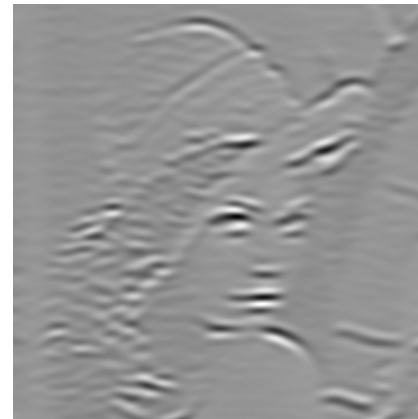
Typen:  $\text{type} \in \{\text{even} = \text{cos-Modulation}, \text{odd} = \text{sin-Modulation}\}$   
Filter-Parameter:  $\sigma = 5.0 \text{ pixel}; \lambda = 8 \text{ pixel}$   
Orientierungen:  $\theta \in \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$



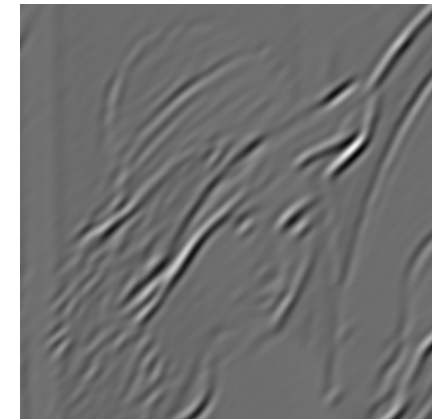
even 0°



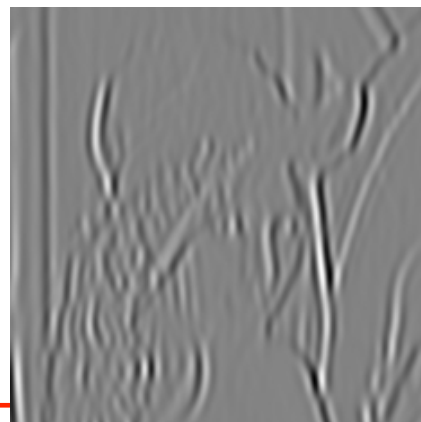
45°



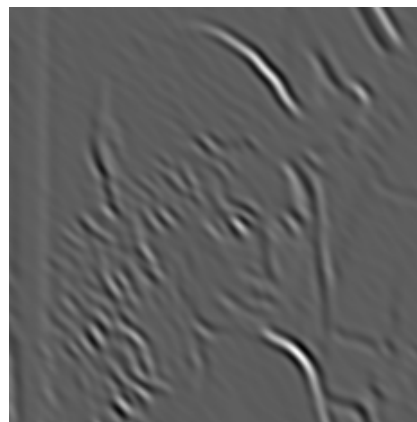
90°



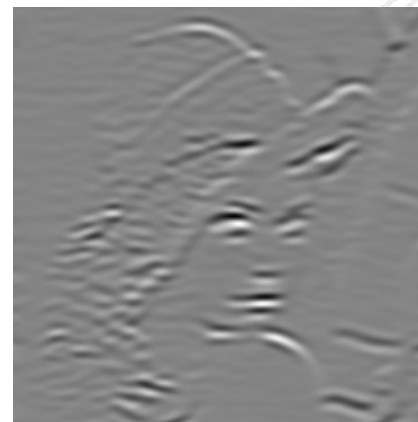
135°



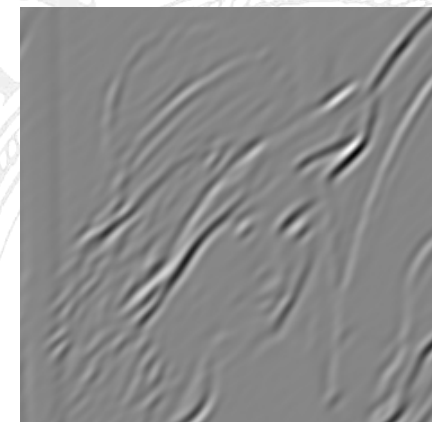
odd 0°



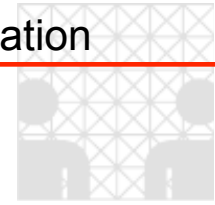
45°



90°



135°



# Gabor-Filter – Generierung und Eigenschaften

## Generierung von Gabor-Funktionen (Gauß 'sche Fensterfkt.)

### ▪ Parametrisierung – Frequenz-Selektivität und Tuning

- $\lambda$  : **Tuning (max. Sensitivität, Wellenlängen-Selektivität)**

$$\Rightarrow \text{Frequenz in rad. : } \omega_0 = 2\pi / \lambda$$

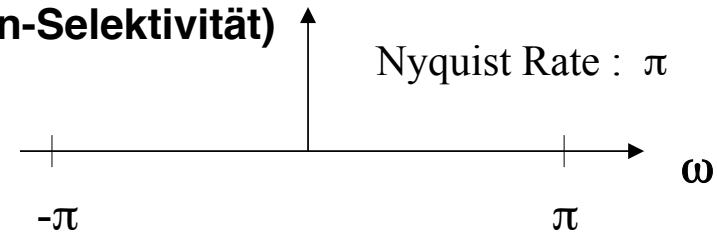
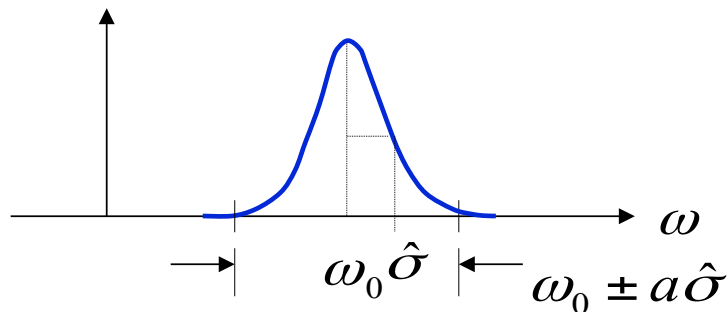
- $\beta$  : **Bandbreite (in Oktaven)**

$$b = 2^\beta \Leftrightarrow \beta = \log_2 b$$

- $a$  : **Weite des Amplitudenspektrums (Trägerfunktion im Frequenzraum)**

$$\Rightarrow \text{Bestimmung als Vielfaches von } \hat{\sigma} = 1 / \sigma$$

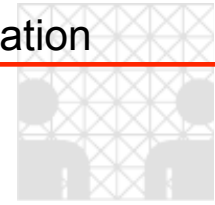
$\hat{\sigma}$  : Standardabweichung des Gauß 'schen Trägers im rad.-Frequenzraum  
default :  $a = 1.0$



Bandbreite des Bandpassfilters:

$$b = \frac{\omega_0 + a\hat{\sigma}}{\omega_0 - a\hat{\sigma}}$$

$$\beta = \log_2(\omega_0 + a\hat{\sigma}) - \log_2(\omega_0 - a\hat{\sigma})$$



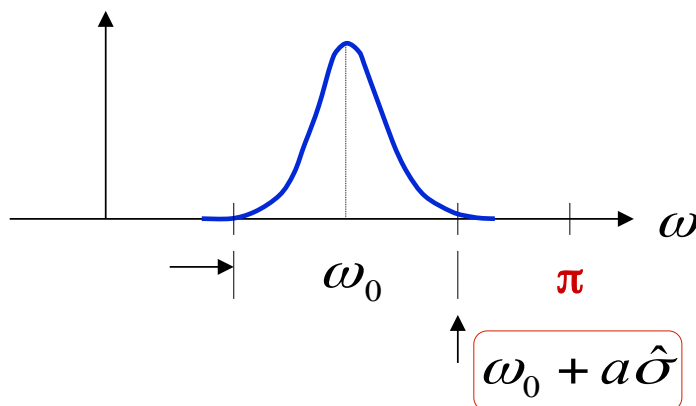
- Steuerung der Ortsfrequenzselektivität und Filter-Bandbreite

geg. :  $\omega_0, \beta, a$

**Ziel :** automatische Bestimmung der zugehörigen Standardabweichung  $\sigma$  der Gauß'schen Hüllfunktion im Ortsbereich

$$\left. \begin{array}{l} \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \hat{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = \frac{a\lambda(b+1)}{2\pi(b-1)} = \frac{a(b+1)}{\omega_0(b-1)}$$

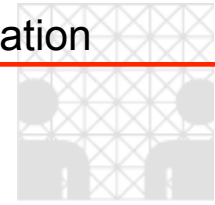
**Test auf Überschreitung der Nyquist-Rate (*Aliasing*):**



Bedingung zur **Erfüllung der Nyquist-Rate** :

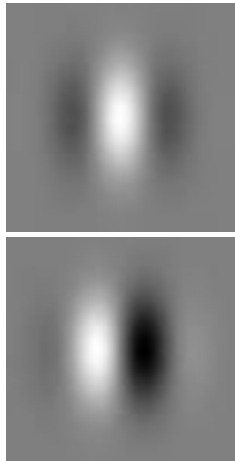
$$\omega_0 + a\hat{\sigma} < \pi \Rightarrow \lambda > \frac{4b}{b+1}$$





## Generierung mittelwertfreier Gabor-Filter (1D)

**Einordnung:** Bandpass-Filter sollten Signalanteile niedriger Frequenzen unterdrücken, z.B. auch diejenigen der Frequenz Null  
 → der Filter soll mittelwert-frei sein (= keine DC-Komponente) !



$$Gabor_{\cos}(\vec{x}) = \cos(\vec{\omega}_0 \vec{x}) \cdot G_{\sigma}(\vec{x})$$

$$\circ \bullet \frac{1}{2} [(\delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) + \delta(\vec{\omega} + \vec{\omega}_0))] * \hat{G}_{\sigma}(\vec{\omega})$$

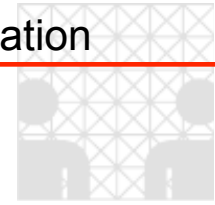
$$Gabor_{\sin}(\vec{x}) = \sin(\vec{\omega}_0 \vec{x}) \cdot G_{\sigma}(\vec{x})$$

$$\circ \bullet \frac{1}{2} [(\delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) - \delta(\vec{\omega} + \vec{\omega}_0))] * \hat{G}_{\sigma}(\vec{\omega})$$

**Beobachtung:**

- $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx = 0$  Der **sin-Filter**,  $Gabor_{\sin}(x)$ , ist ein **echter** Bandpaß-Filter, d.h. die Antwort auf eine konstante Funktion (Mittelwert) ist stets **Null**
- $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx$

Der **cos-Filter**,  $Gabor_{\cos}(x)$ , liefert **positive Antworten (!)** auf eine konstante Funktion



## Analyse des cos-Filters

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \underbrace{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \cdot \cos(\omega_0 x) dx \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sigma}{2} \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \sigma^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

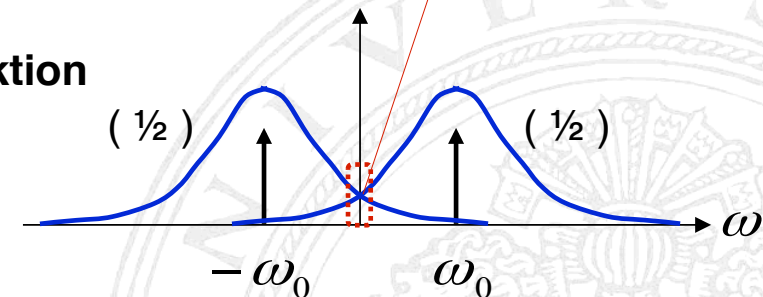
und somit gilt

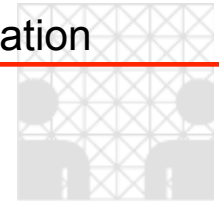
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx = \boxed{\exp\left(-\frac{1}{2} \omega_0^2 \sigma^2\right)} \quad \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_0^2 \sigma^2\right)$$

## Fourier-Spektrum der cos-modulierten Gauss-Funktion

$$\frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] * \hat{G}_{\sigma}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \exp\left(-\frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \sigma^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2} (\omega + \omega_0)^2 \sigma^2\right) \right)$$





### Kompensation – mittelwertfreier (*DC-level free*) Gabor-Filter, $G_{\cos}(x)$

- **Ausgangssituation:** Das Integral der cos-modulierten Gauss-Funktion ergibt sich zu (vgl. Ursprung in der Fourier-Ebene,  $\omega = 0$ )

$$A(\omega = 0) = \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_0^2 \sigma^2\right)$$

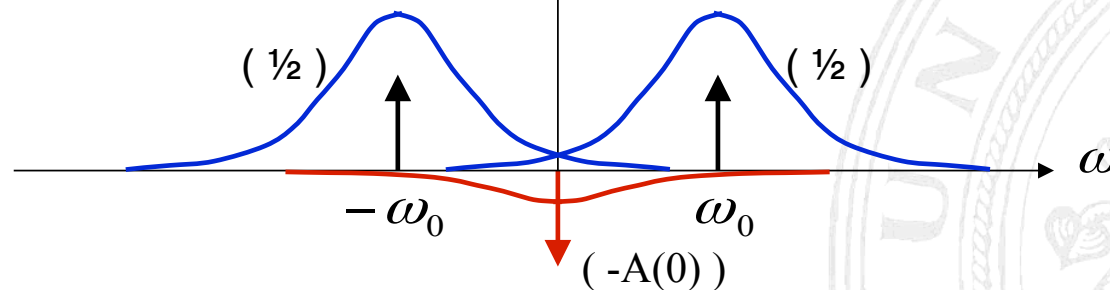
- **Korrektur** der cos-modulierten Gauß-Funktion: Ziel ist es, das Integral der geraden Funktion  $\cos(\cdot) \cdot G_{\sigma}(x)$  so zu verändern, dass es Null und damit mittelwertfrei wird

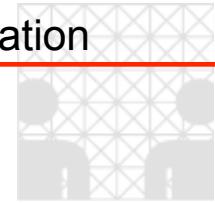
$$\cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) - A(0) \cdot G_{\sigma}(x) = (\cos(\omega_0 x) - A(0)) \cdot G_{\sigma}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 x) \cdot G_{\sigma}(x) dx = A(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(0) \cdot G_{\sigma}(x) dx = A(0) \left[ \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) - A(0) \cdot \delta(\omega) \right] * \hat{G}_{\sigma}(\omega)$$

- **Spektrum:**





## Beispiel für 2D Gabor-cos Filterung mit Mittelwertkompensation

Typ:  $\text{type} \in \{\text{even} = \text{cos-Modulation}\}$

Filter-Parameter:  $\sigma = 6.0 \text{ pixel}; \lambda = 20 \text{ pixel}$

Orientierung:  $\theta = 90^\circ$

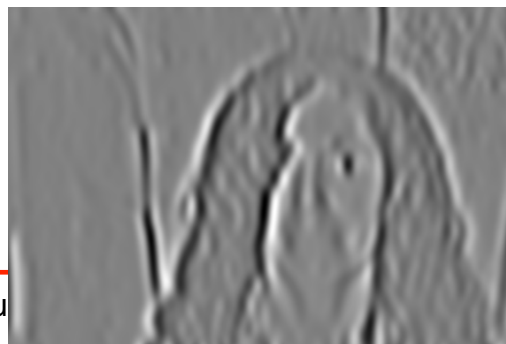
Input image



mit DC-komp.



ohne DC-komp.



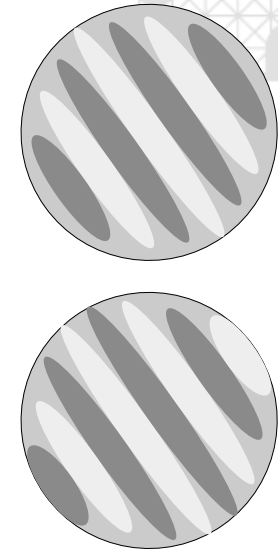
## Separierbarkeit

**Ziel:** Berechnung der Faltungen der Gaborfilter

$$\left. \begin{array}{l} Gabor_{\cos}(\vec{\mathbf{x}}) = \cos(\vec{\omega}_0 \vec{\mathbf{x}}) \\ Gabor_{\sin}(\vec{\mathbf{x}}) = \sin(\vec{\omega}_0 \vec{\mathbf{x}}) \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Intensitätsfunktionen (Bilder)  
durch separierte Funktionen !

$$G_{\sigma}(\vec{\mathbf{x}}) = G_{\sigma}(x) \cdot G_{\sigma}(y)$$



**Additionstheoreme:** (Skalarprodukt  $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\mathbf{x}} = \omega_x^0 x + \omega_y^0 y$ )

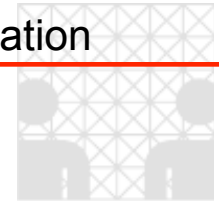
$$\cos(\omega_x^0 x + \omega_y^0 y) = \cos(\omega_x^0 x) \cdot \cos(\omega_y^0 y) - \sin(\omega_x^0 x) \cdot \sin(\omega_y^0 y)$$

$$\sin(\omega_x^0 x + \omega_y^0 y) = \sin(\omega_x^0 x) \cdot \cos(\omega_y^0 y) + \cos(\omega_x^0 x) \cdot \sin(\omega_y^0 y)$$

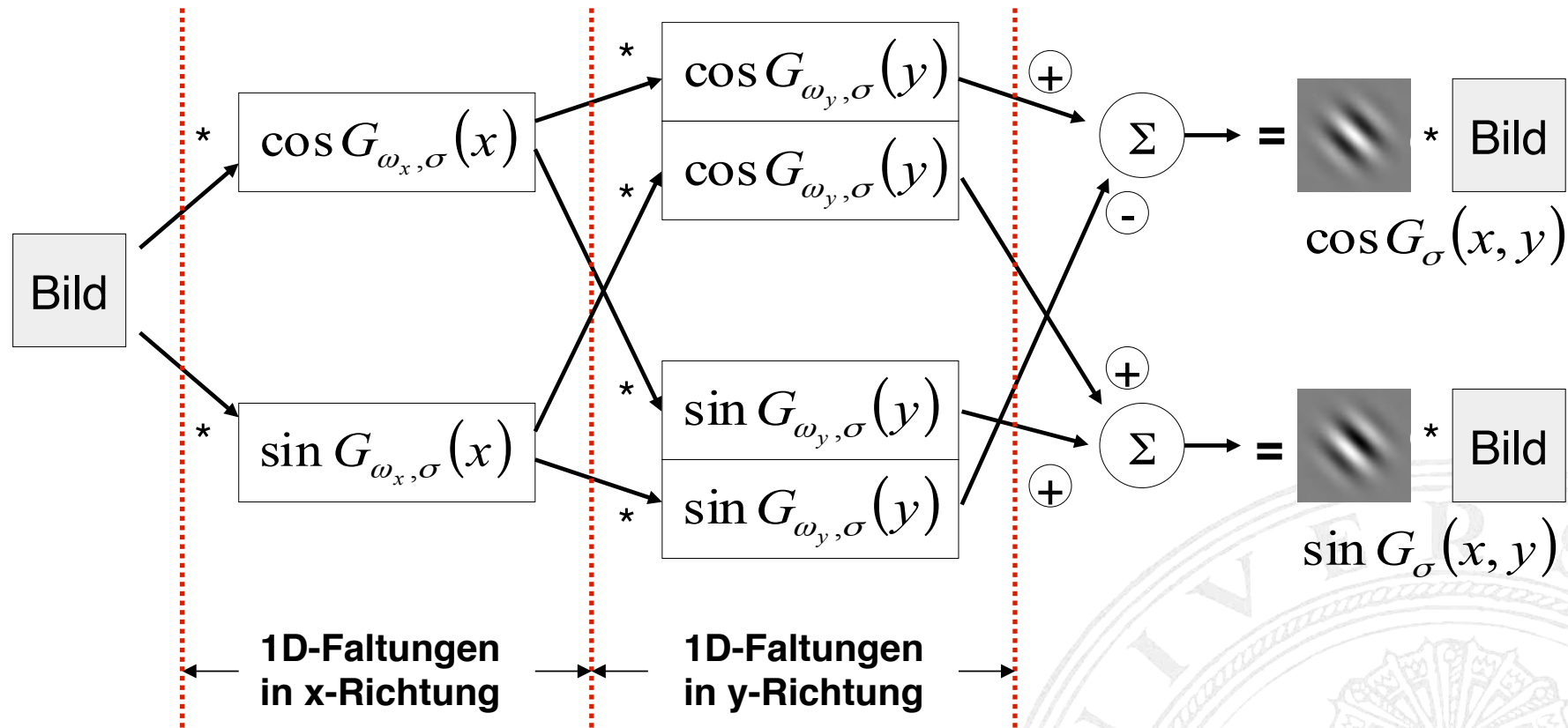
Repräsentation separierbarer Gabor-Filter Paare:

$$\left[ \cos(\omega_x^0 x) \cdot \cos(\omega_y^0 y) - \sin(\omega_x^0 x) \cdot \sin(\omega_y^0 y) \right] \cdot G_{\sigma}(x) G_{\sigma}(y)$$

$$\left[ \sin(\omega_x^0 x) \cdot \cos(\omega_y^0 y) + \cos(\omega_x^0 x) \cdot \sin(\omega_y^0 y) \right] \cdot G_{\sigma}(x) G_{\sigma}(y)$$



**Kaskade von 1-D Faltungen:**



Abkürzungen :

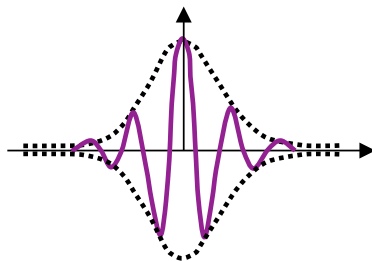
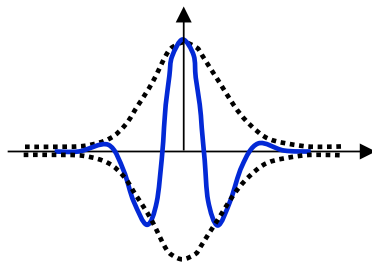
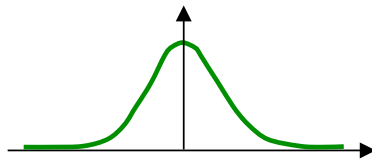
$\cos(\omega_x^0 x) \cdot G_{\sigma}(x) \equiv \cos G_{\omega_x, \sigma}(x)$	$\cos(\omega_y^0 y) \cdot G_{\sigma}(y) \equiv \cos G_{\omega_y, \sigma}(y)$
$\sin(\omega_x^0 x) \cdot G_{\sigma}(x) \equiv \sin G_{\omega_x, \sigma}(x)$	$\sin(\omega_y^0 y) \cdot G_{\sigma}(y) \equiv \sin G_{\omega_y, \sigma}(y)$



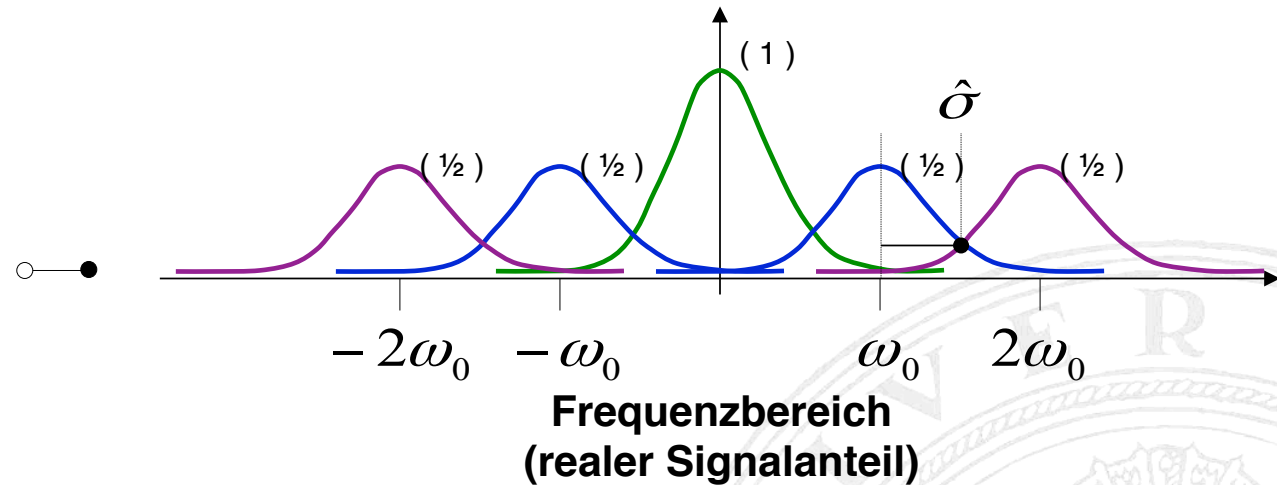
# „Kurzzeit“-Fouriertransformation

## Fensterfunktion und Fouriertransformation

Abtastung mit Fensterfunktionen konstanter Breite im Frequenzraum :  $\sigma = \text{const.}$



**Ortsbereich  
(cos-Modulation)**



Frequenz :

$$\omega_0 = 2\pi u = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = 2\pi / \omega_0$$

Abtastung der Frequenzachse :

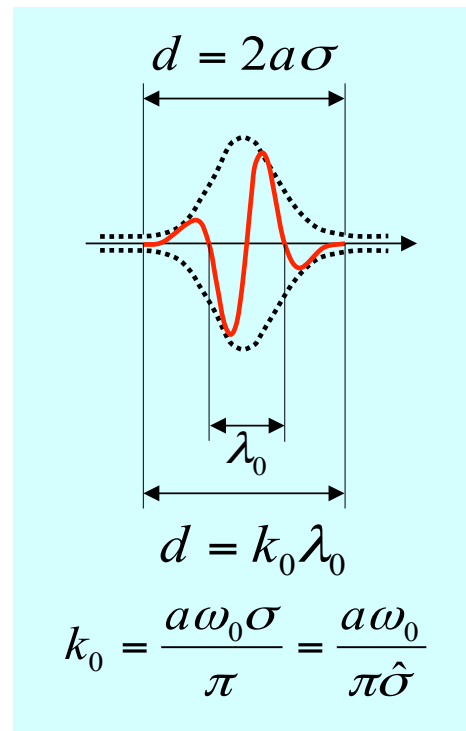
$$\omega_1 = q \cdot \omega_0 \quad , \quad q = 2$$

## Parametrisierung der Fensterfunktionen

Die **Breite der Fensterfunktionen** im Frequenzraum bleibt unabhängig vom Frequenz-Tuning **konstant** :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sigma} = \text{const.}$$

**Konsequenz:** Die **Breite der Fensterfunktion** bleibt sowohl im Frequenz- als auch im Ortsbereich **konstant**, d.h. die **Anzahl der Wellen** unter der Fensterfunktion im Ortsbereich **vervielfacht sich** mit der Vervielfachung der Tuning-Frequenz



**Anzahl der Wellen** (bei Erhöhung des Frequenz-Tunings) innerhalb der Fensterfunktion konstanter Breite :

$$d = 2a\sigma = \text{const.}$$

$$\omega_n = q\omega_0$$

$$d = k_n\lambda_n = \frac{2\pi k_n}{\omega_n} = \frac{2\pi k_n}{q\omega_0} = \frac{2\pi k_0}{\omega_0}$$

$$k_n = qk_0$$



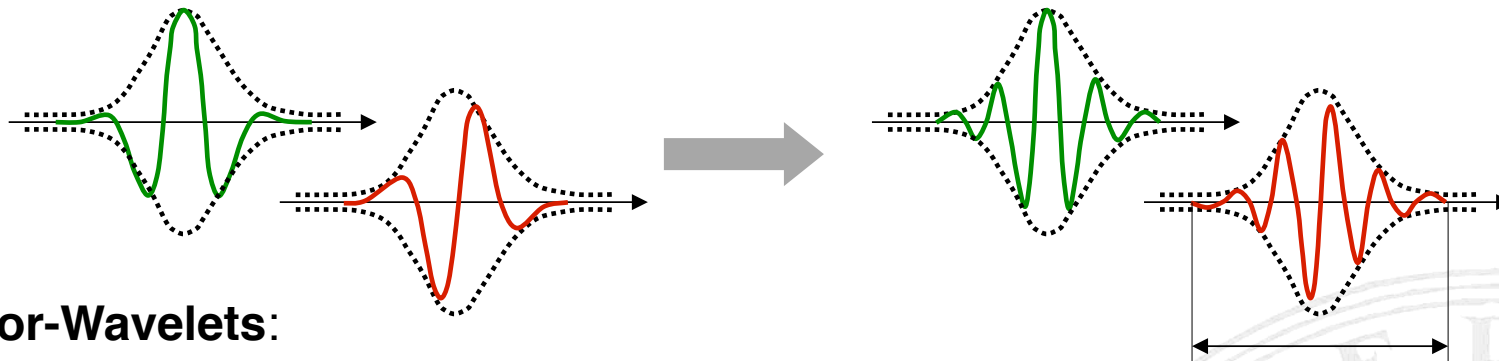


# Gabor-Pyramiden

## Konstruktionsprinzipien

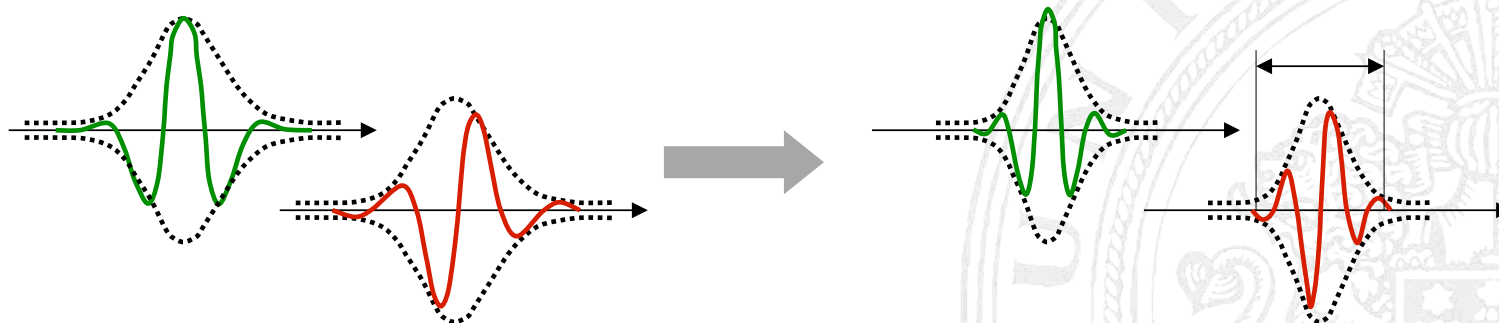
### 1. Schema nach D. Gabor mit konstanter Hüllkurve:

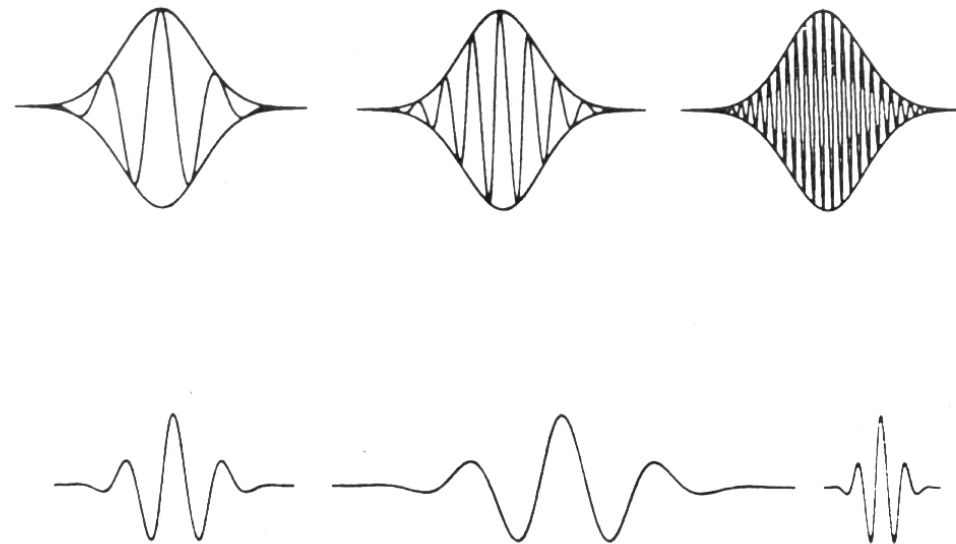
Die lokale Bandbreite ist konstant ! (die **Anzahl der Wellen** innerhalb des Fensters **nimmt** entsprechend des Ortsfrequenz-Tunings zu !)



### 2. Gabor-Wavelets:

Die lokale Bandbreite ist umgekehrt proportional zur Ausdehnung der Gabor-Funktion (die **Anzahl der Wellen** innerhalb des Fensters bleibt **konstant** !)

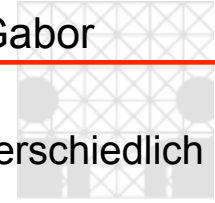




**Figure 2.2 Windowed Fourier Analysis versus Wavelets**

Above: In windowed Fourier analysis, the size of the window is fixed and the number of oscillations varies. A small window is “blind” to low frequencies, which are too large for the window. But if one uses a large window, information about a brief change will be lost in the information concerning the entire interval corresponding to the window.

Below: A “mother wavelet” (left) is stretched or compressed to change the size of the window. This makes it possible to analyze a signal at different scales. The wavelet transform is sometimes called a “mathematical microscope”: big wavelets give an approximate **image of the signal**, while smaller and smaller wavelets **zoom in on small details**.



- Die begrenzte Auflösung des Spektrogramms kann überwunden werden, indem unterschiedlich breite Fenster verwendet werden (J. Morlet<sup>1,2</sup>, ein Geologe, Ende 1970)
- Unterschiedlich breite Fensterfunktionen lösen verschiedene Komponenten auf:
  - Analyse hoher Frequenzen → Schmale Fensterfunktionen ergeben die beste Zeitauflösung
  - Analyse tiefer Frequenzen → Breite Fensterfunktionen ergeben eine gute Frequenzauflösung
- Dieses Verfahren ist immer dann gut geeignet, wenn das zu analysierende Signal hauptsächlich aus langsam variierenden Größen besteht und nur einzelne kurze hochfrequente Anteile enthält.
- Die Heisenbergsche Unschärferelation gilt nach wie vor!!!
- Massive Kritik und Ablehnung durch Mathematiker aufgrund Mangel an mathematischer Stringenz!!!
- Anfang der 1980er Jahre formalisiert Grossman, ein theoretischer Physiker, das Verfahren und leitet die inverse Transformation ab → Erste Wavelet-Transformation!
- Die Fensterfunktion nennt man heute das **Wavelet**

<sup>1</sup>P. Goupillaud, A. Grossmann und J. Morlet: Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis. *Geoexploration*, 23:85-102, 1984.

<sup>2</sup>A. Grossmann und J. Morlet: Decomposition of Functions Into Wavelets of Constant Shape, and Related Transforms. In: L. Streit (Herausgeber): *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*. World Scientific Publishing, Singapore, 1985.



## Beyond Gabor

Wavelets (engl.), Ondelettes (franz.), Wellchen (dt.), ...

- general problem statement ([7])

$f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  with finite energy  $\|f\|_2$

$$\bullet := \left\{ f(t), t \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \text{ with scalar product } \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) dt$$

$$\underbrace{F(\omega) \equiv \hat{f}(\omega) \quad \forall t!}$$

$F(\omega, t)$ ?  $\boxtimes$  particular frequency at particular time thru  
**appropriate windowing**

**$\Rightarrow$  time–frequency analysis**

- „A window function  $w(t)$  is a function in  $L^2(\mathbb{R})$  such that both  $w$  and  $\hat{w}$  have rapid decay (i.e.,  $w$  is well-localized in time, while  $\hat{w}$  is well-localized in frequency). Multiplying a signal by a window function before taking its Fourier transform has the effect of restricting the spectral information of the signal to the domain of influence of the window function.“



- parameters of window function  $w(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\text{center } t^* = \|w\|_2^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} t |w(t)|^2 dt, \quad \text{radius } \Delta_w = \|w\|_2^{-1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |w(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \text{width } 2\Delta_w$$

- windowed Fourier transform

$$\underbrace{T^w(\tau, \omega)(f)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$$

**localized spectral information of  $f$  in time window**  $[t^* + \tau - \Delta_w, t^* + \tau + \Delta_w]$

**and in frequency window**  $[\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{w}}]$

$\Rightarrow$  **time-frequency window**  $[...] \cdot [...]$

centered at  $(t^* + \tau, \omega + \omega^*)$  with width  $2\Delta_w$  and height  $2\Delta_{\hat{w}}$  and constant area  $4\Delta_w \Delta_{\hat{w}}$



- **integral wavelet transform** of  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\underbrace{(W_\Psi f)(a,b)}_{\text{wavelet coefficients}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad \text{where } \underbrace{\Psi_{a,b}(t)}_{\text{wavelets with implicit scaling (father) function}} = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

wavelet  
coefficients

**wavelets with implicit scaling (father) function**

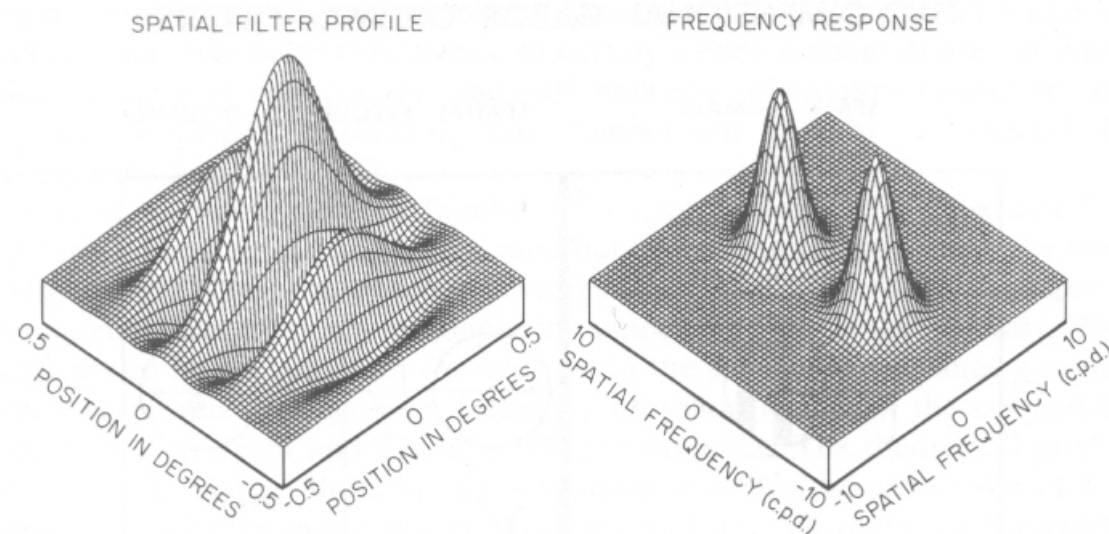
with  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  and  $\underbrace{\Psi \in L^2(\mathbb{R})}_{\text{mother wavelet}}$  and  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$

**localizes the spectrum of  $f(t)$**  within **time window**  $[at^* + b - a\Delta_\Psi, at^* + b + a\Delta_\Psi]$   
and **frequency window**  $[a^{-1}\omega^* - a^{-1}\Delta_{\hat{\Psi}}, a^{-1}\omega^* + a^{-1}\Delta_{\hat{\Psi}}]$

$\Rightarrow$  **variable time-frequency window** (with centers  $t^*$  and  $w^*$  and radii  $\Delta_\Psi$  and  $\Delta_{\hat{\Psi}}$ )  
with width  $2a \cdot \Delta_\Psi$  (inversly proportional to center frequency  $a^{-1}\omega^*$ ) and  
height  $2a^{-1} \cdot \Delta_{\hat{\Psi}}$  (directly proportional to center frequency) and  
constant area  $4\Delta_\Psi \cdot \Delta_{\hat{\Psi}}$

**iff** both  $\Psi$  and  $\hat{\Psi}$  are admissible window functions

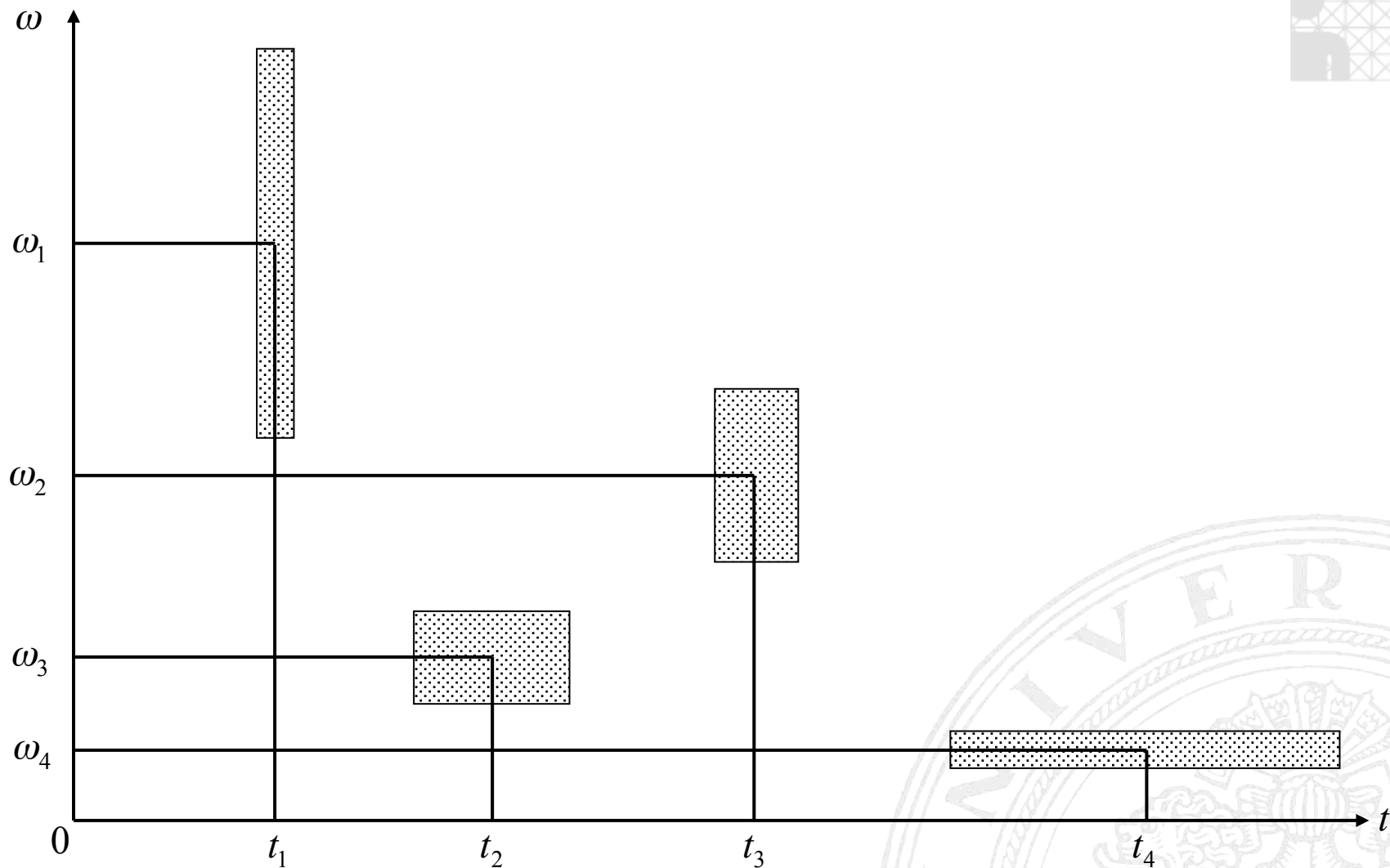
- case study: 2-dim. Gabor wavelets



**FIGURE 1** An even-symmetric member of the family of optimal ‘2D Gabor’ filters, with unity width/length ratio, and its 2D Fourier transform. Members of this family have minimal joint entropy, i.e. the sharpest possible joint resolution in the two 2D domains. The spatial period and orientation of the sidelobes determine the preferred spatial frequency and orientation; the number of significant sidelobes determines spatial frequency bandwidth and their significant length determines orientation bandwidth. Different members of this optimal family are an excellent description of simple cell 2D receptive fields found in the striate cortex. The general optimal functional form in the two 2D domains is given by the following equations, for a receptive field centered on spatial coordinates  $(x_0, y_0)$  with width and length dimensions  $1/a$  and  $1/b$  and preferred spatial frequency  $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  and preferred orientation  $\arctan(v_0/u_0)$ :

$$f(x, y) = e^{-\pi [(x-x_0)^2/a^2 + (y-y_0)^2/b^2]} e^{-2\pi i [u_0 (x-x_0) + v_0 (y-y_0)]},$$

$$F(u, v) = e^{-\pi [(u-u_0)^2/a^2 + (v-v_0)^2/b^2]} e^{-2\pi i [x_0 (u-u_0) + y_0 (v-v_0)]}. \quad (\text{from: [1], p. 99})$$



after: Figure 5.1: Wavelet time frequency windows. (from: [7], p. 107)



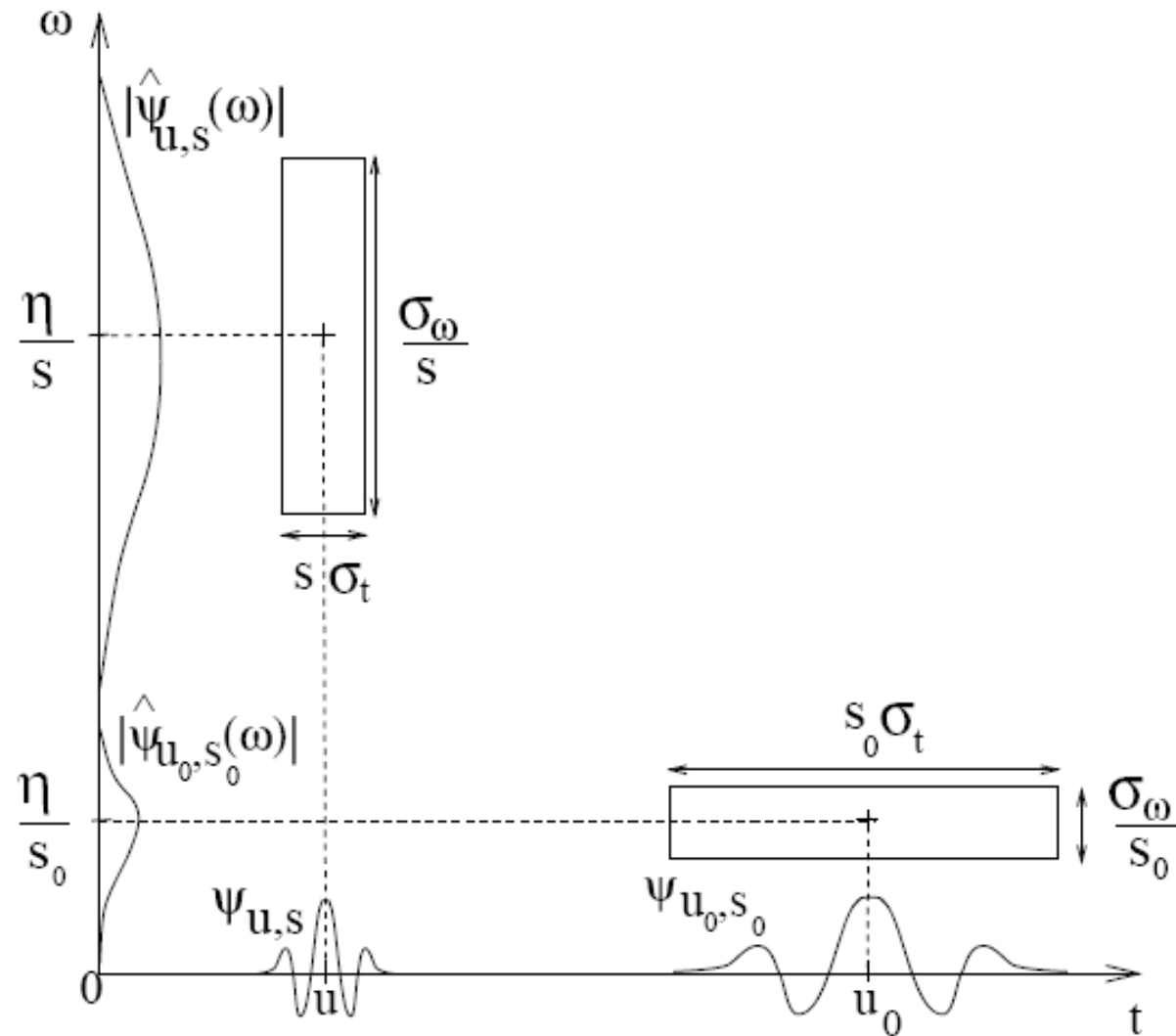


Figure 4.9 from [Mallat, 1999]

TWO-DIMENSIONAL GABOR OPTIMAL FILTERS

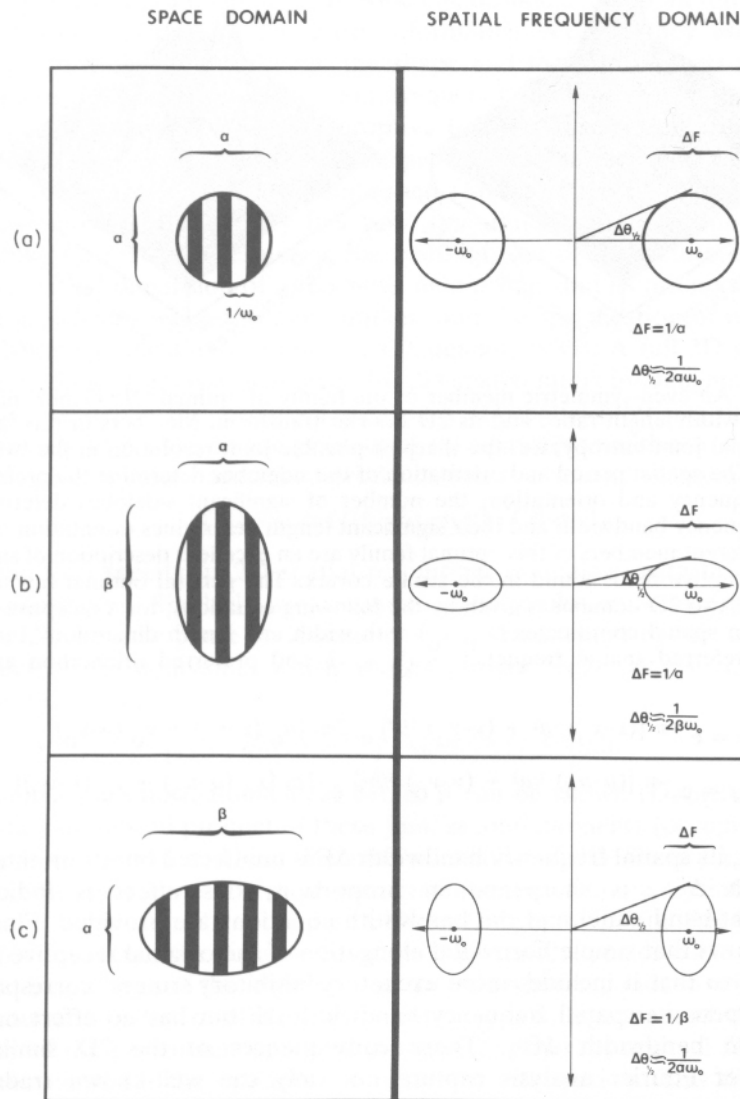


FIGURE 2 Birds-eye view of three members of the set of Gabor optimal filters, all having the same preferred spatial frequency and orientation. The panels demonstrate the dependence of the filter's spatial frequency bandwidth and orientation bandwidth on the space-domain envelope dimensions, although the preferred frequency and orientation are independent of those dimensions. (a) A circular filter envelope in the space domain occupies a circular region in the spatial frequency domain, with both spatial frequency bandwidth and orientation bandwidth inversely related to the receptive field area. (b) Elongating the receptive field in the direction parallel to the modulation sharpens the orientation bandwidth  $\Delta\theta_{1/2}$  but has no effect on spatial frequency bandwidth  $\Delta F$ . (c) Elongating the field in the perpendicular direction sharpens the spatial frequency bandwidth  $\Delta F$  but has no effect on the orientation bandwidth  $\Delta\theta_{1/2}$ . Thus, such filters can negotiate the necessary trade-offs for resolution in different ways, attaining, for example, sharp resolution along the Y direction (at the expense of orientation selectivity) or sharp resolution along the X direction (at the expense of spatial frequency selectivity), to favor the extraction of different kinds of information. Always, however, the product of occupied areas in the two 2D domains is the same, and is equal to the theoretical minimum.

TABLE 1 Predicted correlation between spatial frequency bandwidth and orientation bandwidth for 2D Gabor filters having a width/length ratio of 0.6.

Spatial frequency full-bandwidth, octaves	Orientation half-bandwidth, degrees
0.5	5.9
1.0	11.5
1.5	16.7
2.0	21.1
2.5	24.8

(from: [1], p. 100f)

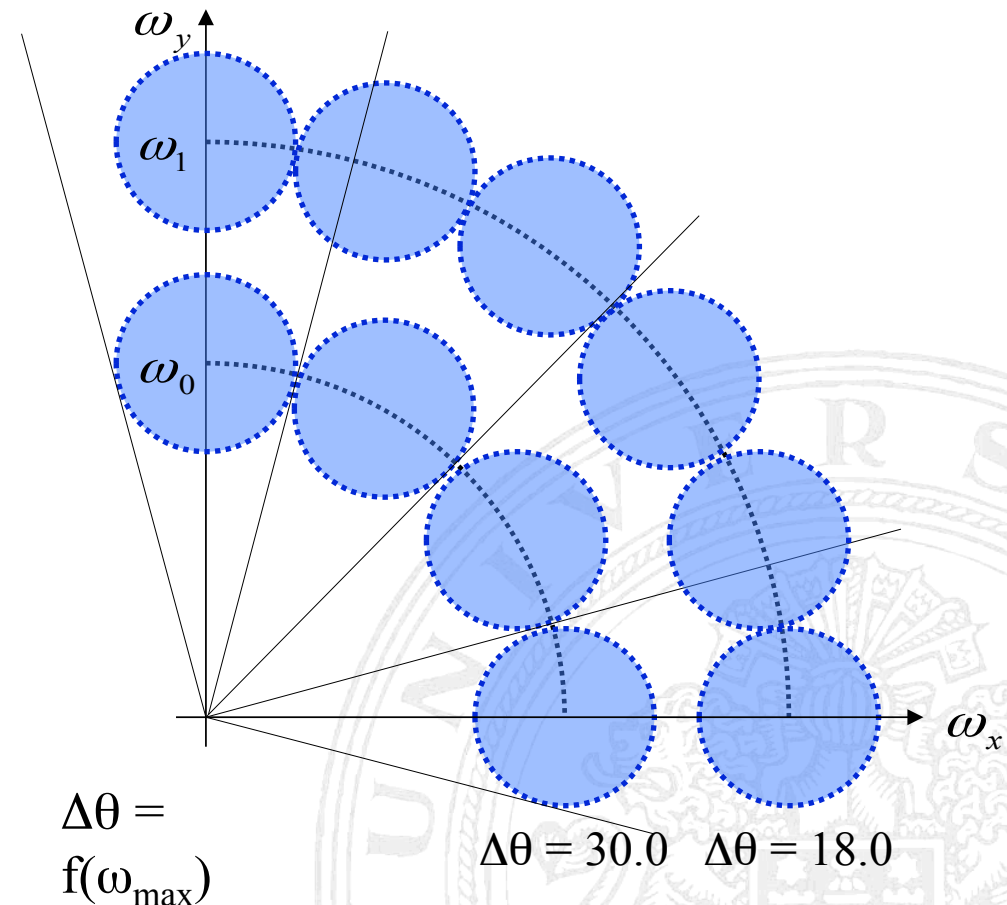
## Probleme bei der Generierung von Gabor-Filtern mit festen Fensterfunktionen

- **Instabilitäten** in den höchsten Frequenzen

Die Gauß'sche **Fensterfunktion** im Frequenzraum **bleibt in ihrer Größe konstant** – unabhängig von ihrer Verschiebung (Frequenz-Selektivität), d.h. die Modulationsfrequenz der Hüllkurve (im Ortsbereich) steigt an !

- Die **(Orientierungs-) Selektivität** (bei **2D Gabor-Filtern**) ist bei verschiedenen Frequenzen (Ortsfrequenz-Tuning) nicht konstant

Die Anzahl der Orientierungen ist eine Funktion des Frequenz-Tunings,  $\Delta\theta = f(\omega_{\text{tune}})$

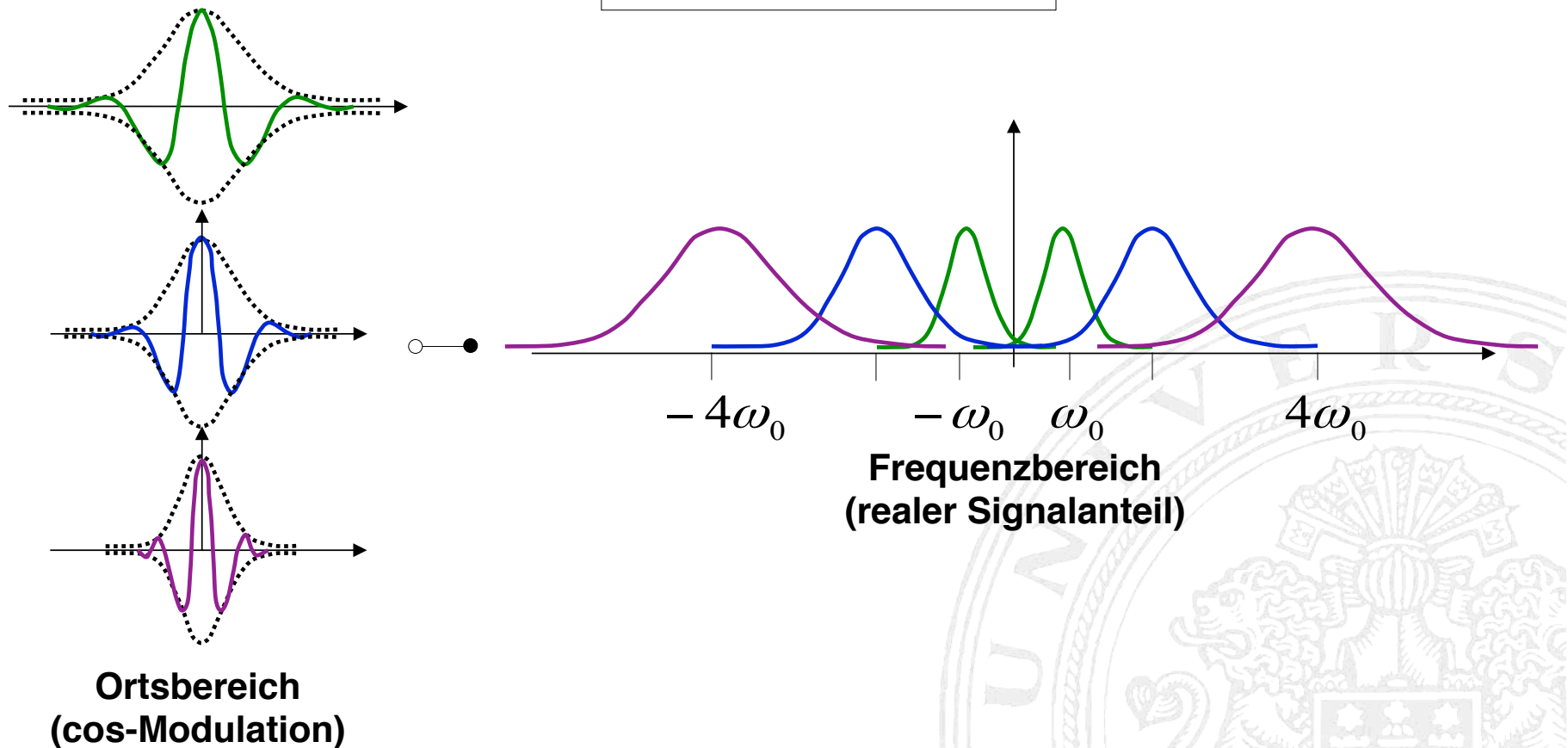




## Gabor-Wavelets

### Variable Fensterbreite in Abhängigkeit des Frequenz-Tunings

Konstantes Vielfaches der Wellenlänge unter der Hüllkurve,  
unabhängig vom Frequenz-Tuning :  $d_n = k \cdot \lambda_n$ , mit  $k = \text{const.}$



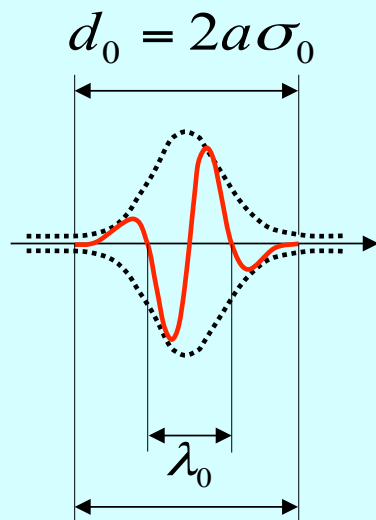


## Parametrisierung der Fensterfunktionen

Die **Wellenzahl** bleibt unabhängig vom Frequenz-Tuning **konstant**:

$$k = \text{const.}$$

**Konsequenz:** Die **Breite der Fensterfunktion** im **Ortsbereich** muß für höhere Tuning-Frequenzen proportional zu den kürzeren Wellenlängen abnehmen – die **Anzahl der Wellen** unter der Fensterfunktion bleibt **konstant** !



$$d_0 = k\lambda_0$$

$$k = \frac{a\omega_0\sigma_0}{\pi} = \frac{a\omega_0}{\pi\hat{\sigma}_0}$$

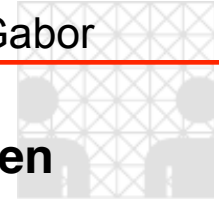
Konstante **Anzahl der Wellen** (bei Erhöhung des Frequenz-Tunings) innerhalb der Fensterfunktion :

$$d_0 = 2a\sigma_0 = k\lambda_0 \quad d_n = 2a\sigma_n = k\lambda_n$$

$$\omega_n = q\omega_0$$

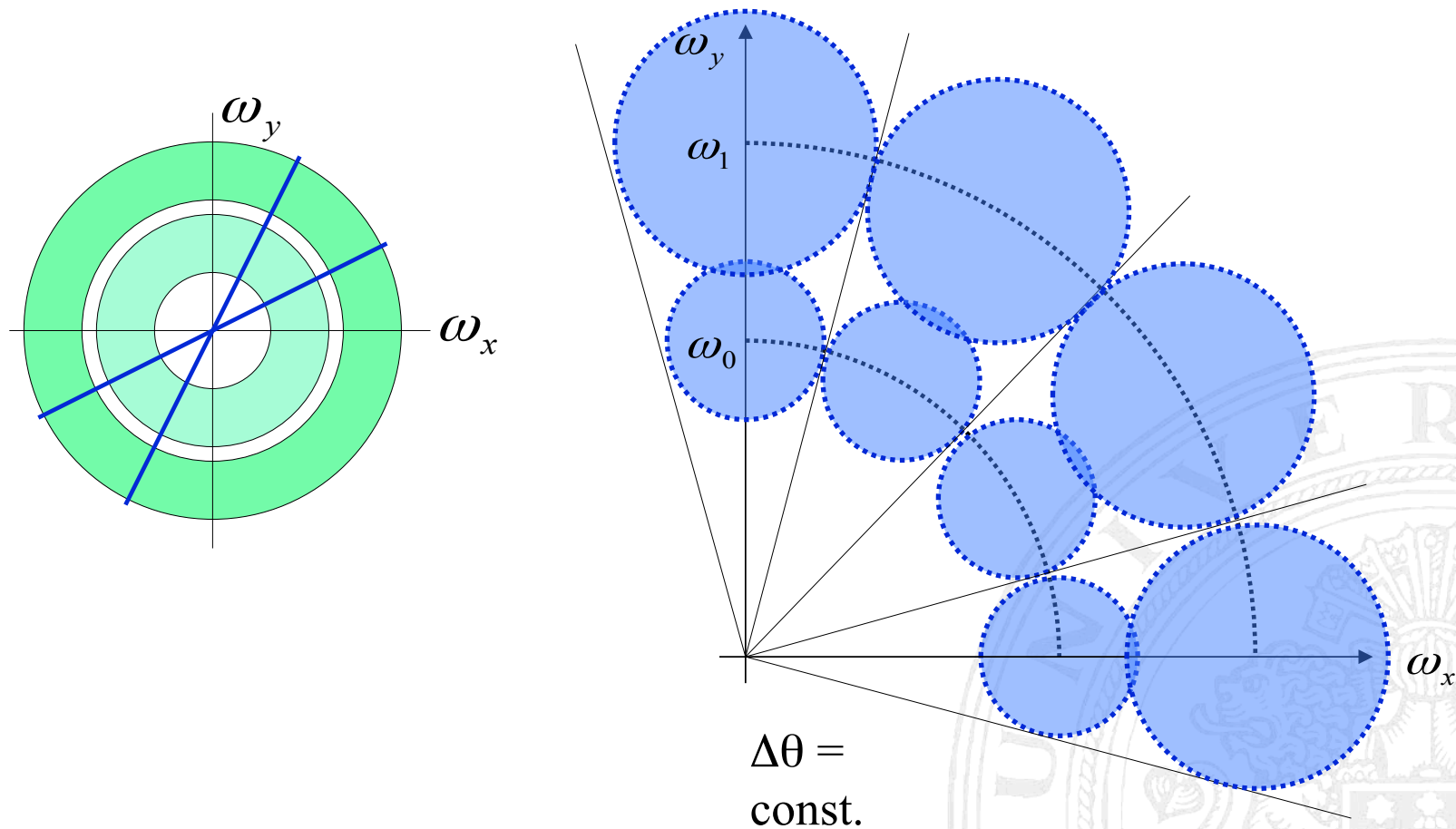
$$\frac{d_n}{\lambda_n} = \frac{d_0}{\lambda_0} = k \Rightarrow \frac{\sigma_n \omega_n}{2\pi} = \frac{\sigma_0 \omega_0}{2\pi}$$

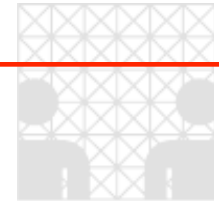
$$\sigma_n = \frac{1}{q} \sigma_0 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_n = q \hat{\sigma}_0$$



## Generierung von 2D-Filtern für eine gegebene Anzahl von Orientierungen

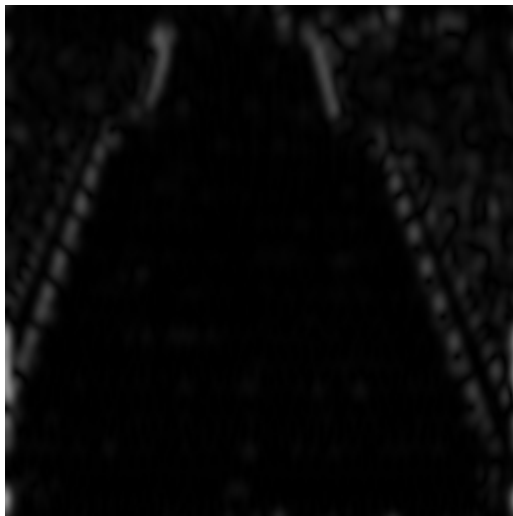
Bandpassfilter mit unterschiedlichem Ortsfrequenz-Tuning (innerer und äußerer Ring) sollen in eine feste Anzahl von Segmenten zerlegt werden,  $\Delta\theta = \text{const.}$



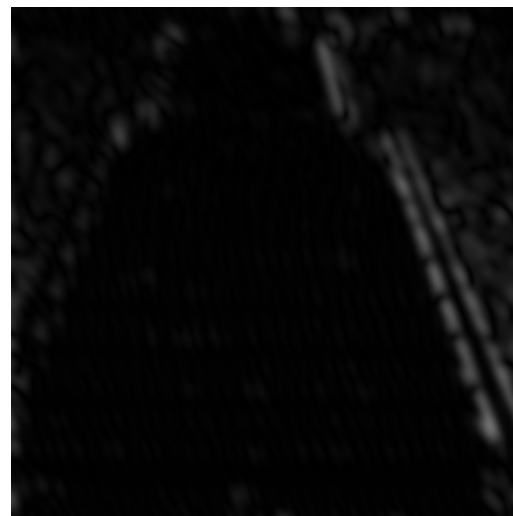


Originalbild

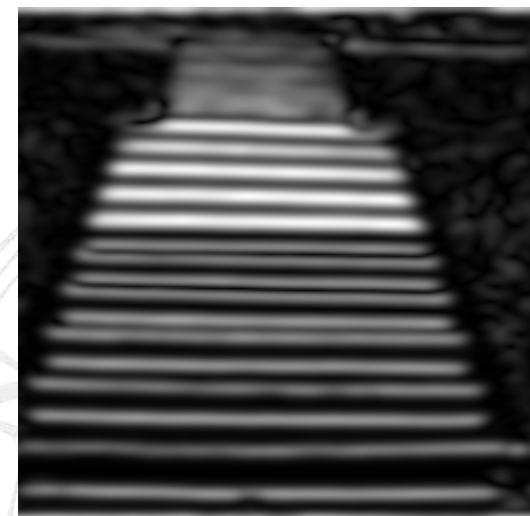
Filterantworten bei Skala 1



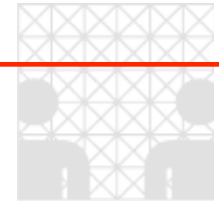
Orientierung: 0°



30°



90°



Originalbild

Filterantworten bei Skala 2



Orientierung: 0°

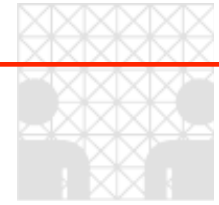


30°



90°





Originalbild

Filterantworten bei Skala 4



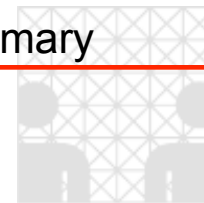
Orientierung: 0°



30°



90°



## Wavelet Transform: First Summary

- ***zoo of wavelets***, e.g. Haar, Shannon, Meyer, Daubechies, Battle-Lemarié wavelets
- ***variety of theoretical properties***  
e.g.     - wavelet basis and vector space decomposition  
          - compactness of support  
          - smoothness of wavelet function  
          . . .
- ***construction of wavelets w.r.t. requirements from theory and practice***  
e.g.     compactly supported biorthogonal wavelets for linear phase FIR (finite impulse response) subband filtering
- ***range of applications in multidimensional signal processing***  
e.g.     - denoising  
          - multiscale/multiresolution approximation of  $L^2(\mathbb{R})$   
          - multiresolution decomposition and reconstruction of functions in  $L^2(\mathbb{R})$   
          - multiscale edge detection and representation  
          - FIR subband filtering (for data compression)
- ***discrete/fast wavelet transform***



cortical simple cell receptive field profiles as 2-D Gabor elementary functions (Daugman 1980, 1985):

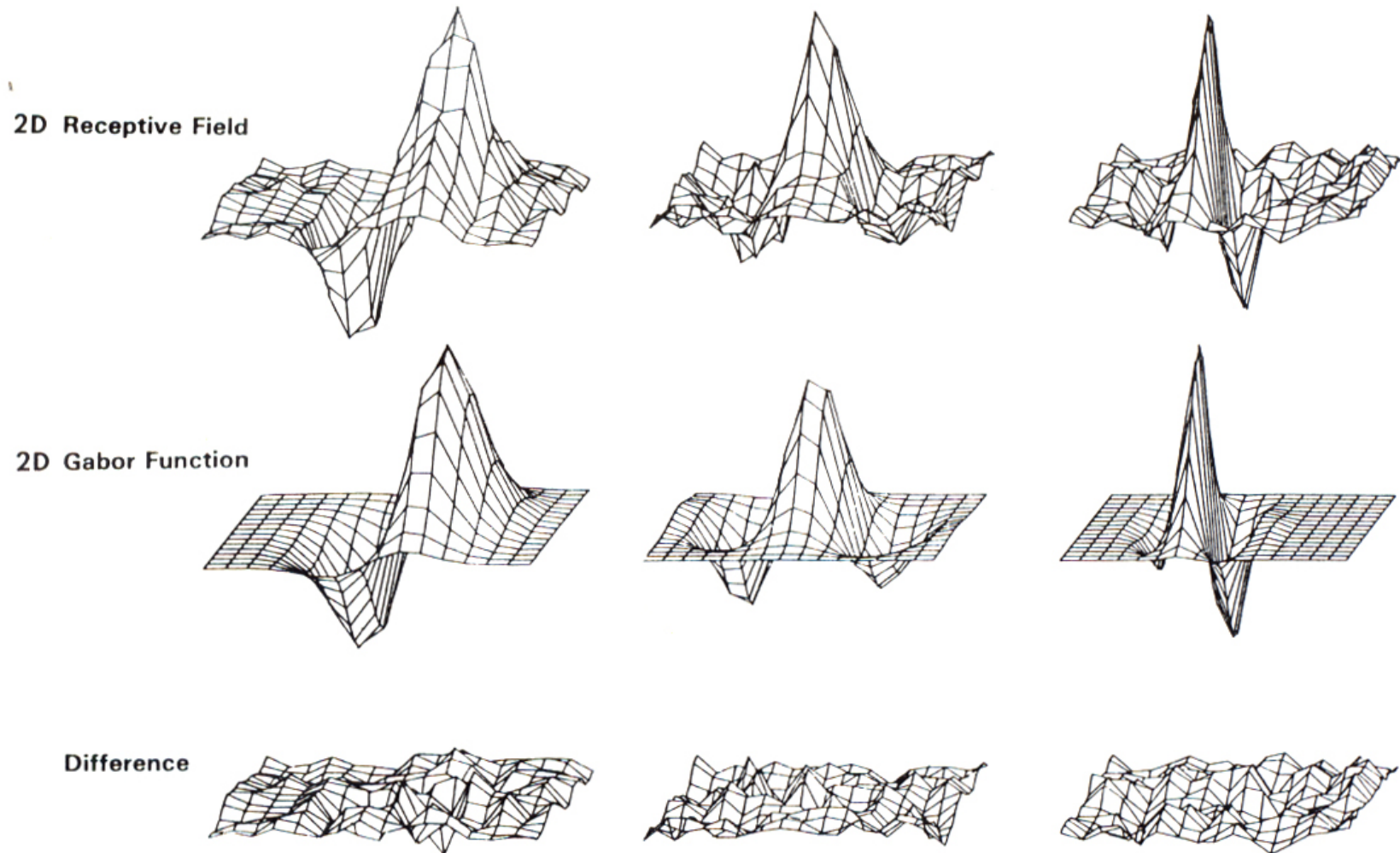
$$G(x, y) = \exp\{-\pi[(x - x_0)^2/\alpha^2 + (y - y_0)^2/\beta^2]\} \\ \times \exp[-2\pi i(u_0 x + v_0 y)]. \quad (10)$$

The parameters of such expansion functions simultaneously capture the physiologically observed neural tuning properties both in 2-D spatial terms [location  $(x_0, y_0)$ , width  $\alpha$ , length  $\beta$ ] and in 2-D spectral terms [so that if a cell's preferred orientation is  $\theta$  and its preferred spatial frequency is  $\omega$ , then the 2-D spectral parameters in equation (10) are given by  $\mu_0 = \omega \cos(\theta)$  and  $v_0 = \omega \sin(\theta)$ , with the orientation bandwidth and spatial frequency bandwidth determined by the relationship among  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_0$ , and  $v_0$ ].

(from: [3], pp. 403-423)

⇒ generalized uncertainty relation (Daugman, 1985)

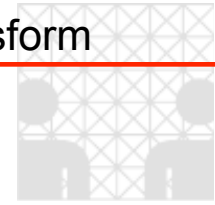
$$(\Delta x)(\Delta y)(\Delta u)(\Delta v) \geq \frac{1}{16} \pi^2$$



**Figure 5.**  
Top row: illustrations of cat simple cell 2-D receptive field profiles, measured by Jones and Palmer (1987). Middle row: best-fitting 2-D

Gabor wavelet for each neuron, described by equation 10. Bottom row: residual error of the fit, which for 97% of the cells studied was indistinguishable from random error in the  $\chi^2$  sense.

(from: [3], pp. 403-423)



Normierungskonstante

Verschiebungsparameter, Zeit      Dehnungsparameter, Frequenz

zu analysierendes Signal

$$X_{WT}^{\psi}(t, f) = \sqrt{f} \int x(\tau) \psi^*(f(\tau - t)) d\tau$$

Kontinuierliche Wavelet-Transformation des Signals  $x(t)$  berechnet mit dem Wavelet  $\psi(\cdot)$

Das “Mutter-Wavelet” (mother wavelet). Alle Transformationskerne leiten sich aus diesem ab durch Verschiebung und / oder Dehnung ab

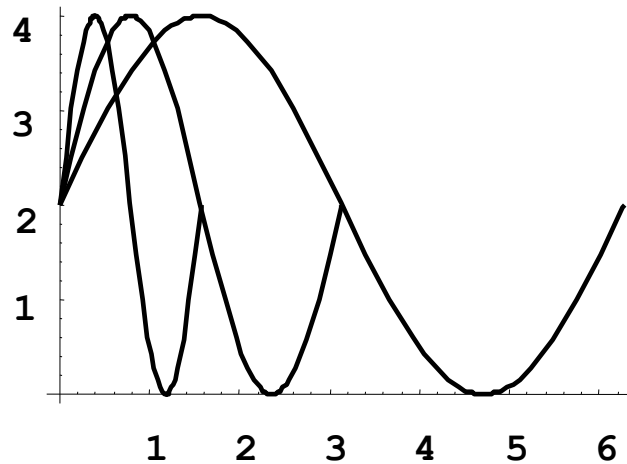
Manchmal findet man auch folgende Definition:

$$CWT_x^{\psi}(\tau, s) = X_x^{\psi}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_t x(t) \psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) dt$$

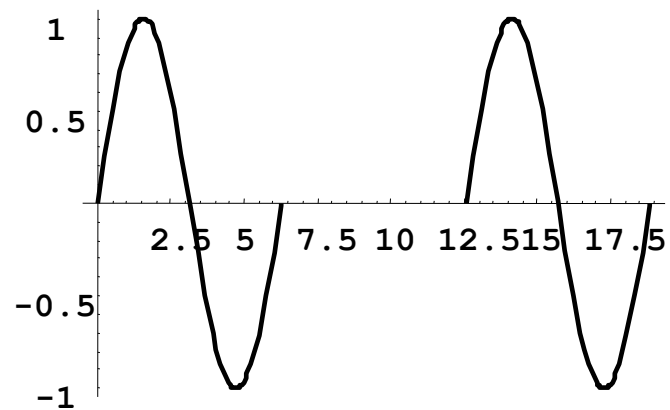
$s$ =Skalenfaktor= 1/Frequenz



- Skalierung bedeutet einfach Dehnung oder Stauchung!



- Verschiebung meint eine Zeitverschiebung





Durch eine dyadische Unterteilung der Zeit-Frequenzebene ergibt sich ein sehr effizienter Algorithmus zur Berechnung der Diskreten Wavelet-Transformation:

- Subband coding (Zerlegung in “Töne”, d.h. in Frequenzintervalle mit konstanter relativer Breite)
- Die dyadische Frequenz-Zeiteinteilung und die Zerlegung in Intervalle gleicher relativer Breite kann durch eine Serie von aufeinander folgender Filter (“Hoch-” und “Tiefpass-Filter”) mit anschließendem Down-Sampling erreicht werden. (Das Down-Sampling eliminiert die Redundanz im Informationsgehalt nach den Filterstufen.)

Die diskrete Wavelet-Transformation wird sehr erfolgreich zur Datenkompression eingesetzt, die die allermeisten DFT-Koeffizienten sehr klein sind und daher ohne Auflösungsverlust weggelassen werden können. Für viele Anwendungen ist eine grobe Näherung nützlicher als die feinen Details

- Für Datenkompression bei Bilder (JPEG2000) oder Musik (MPEG)
- Rauschunterdrückung, Analyse und Diagnose, Codierung, Quantisierung und Kompression, Übertragung und Speicherung, Aufbereitung, Rekonstruktion und Synthese von Signalen.



Warum benötigen wir Datenkompression bei Bildern?

Bildgröße eines kleinen digitalen Photos ohne Kompression:

$$\begin{aligned} &1280 \times 800 \\ &\times 3 \text{ (RGB)} \\ &= 3 \text{ Mb} \end{aligned}$$





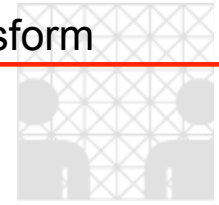


Originalbild  
3 Mb

JPEG2000 komprimiert  
19 K bytes



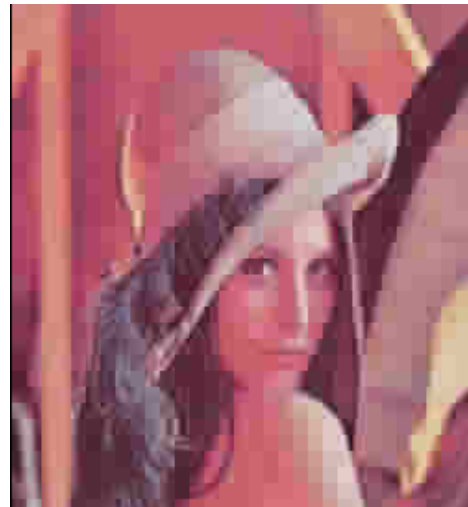
- Kompressionsverhältnis:  $>$  Faktor 150!
- Kein bemerkbarer Unterschied in der Bildqualität



**Original Bild**



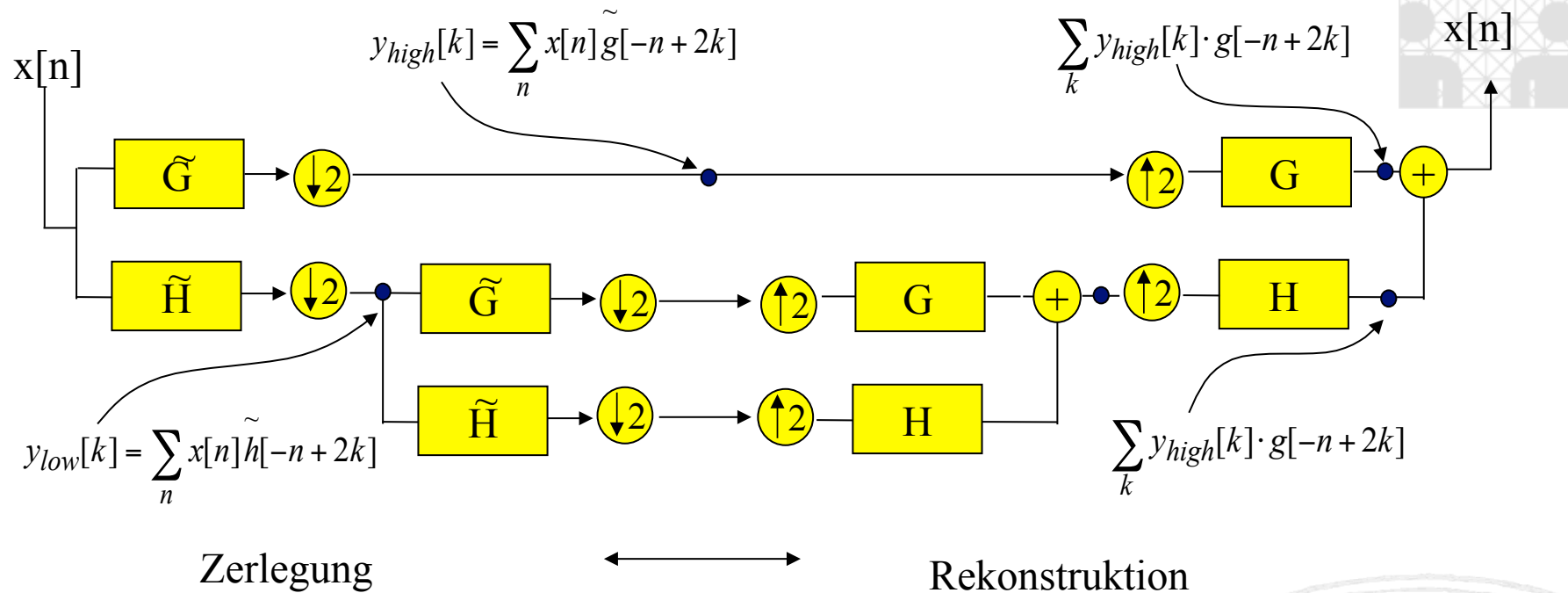
**JPEG (=FFT)**



**JPEG2000**

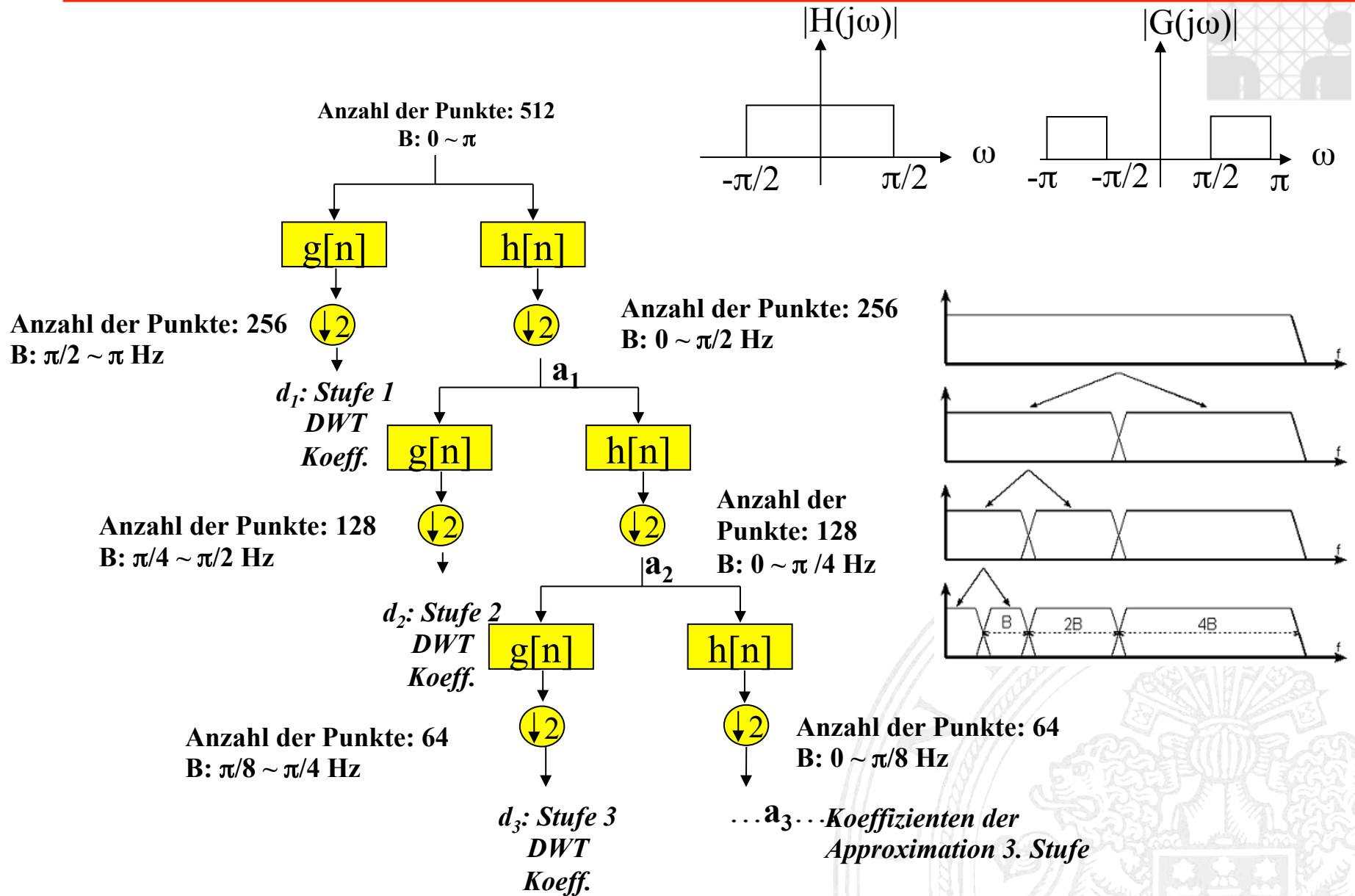


**Kompressionsverhältnis: 50:1**



- |   |                          |   |   |               |
|---|--------------------------|---|---|---------------|
| G | Half band Hochpassfilter | ↕ | 2 | Down-sampling |
| H | Half band Tiefpassfilter | ↕ | 2 | Up-sampling   |

2-stufige DWT Zerlegung: Die Zerlegung kann solange fortgesetzt werden, solange noch Samples zum Down-Samplen vorhanden sind.





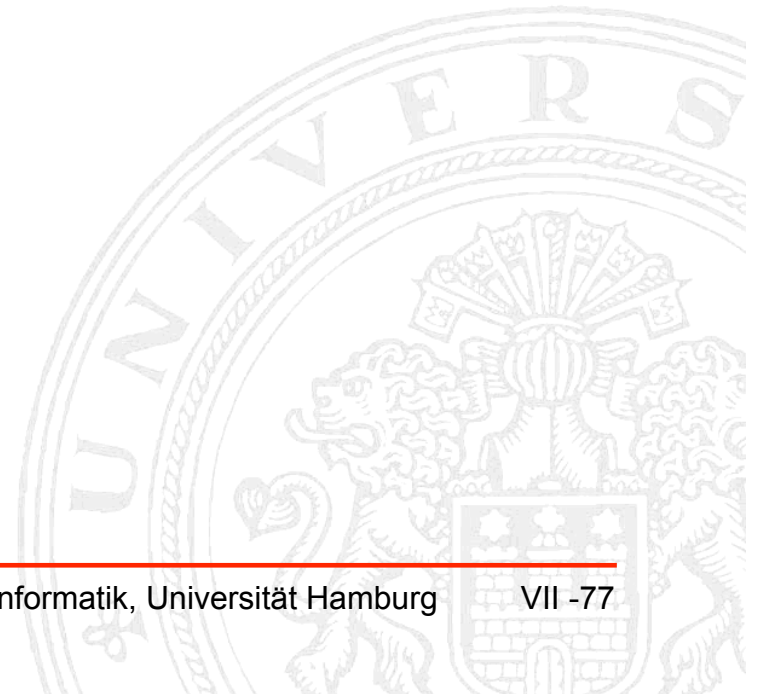
Beispiel für Wahl der Filterfunktion:

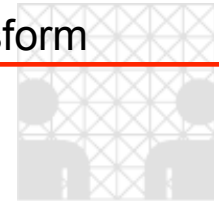
Tiefpass-Filter: Gleitender Mittelwert:

- $y(n) = x(n)/2 + x(n-1)/2 \rightarrow h(0)=1/2 \text{ und } h(1)=1/2$

Hochpass-Filter: Gleitende Differenz:

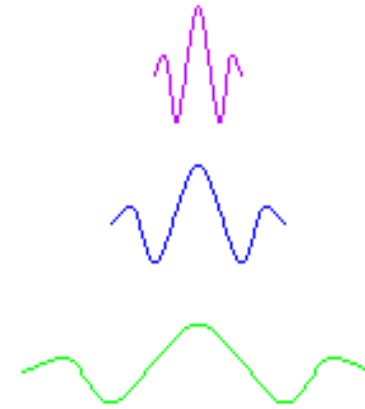
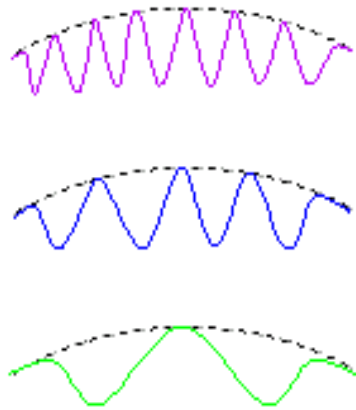
- $y(n) = x(n)/2 - x(n-1)/2 \rightarrow h(0)=1/2 \text{ und } h(1)=-1/2$





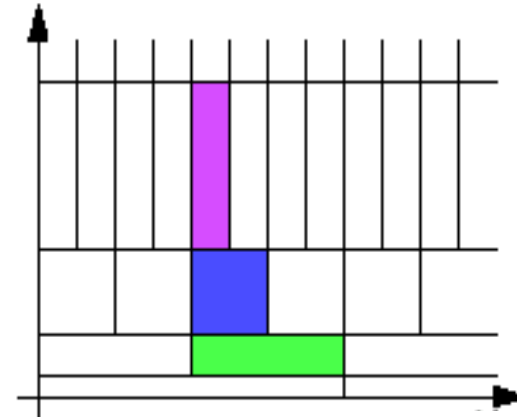
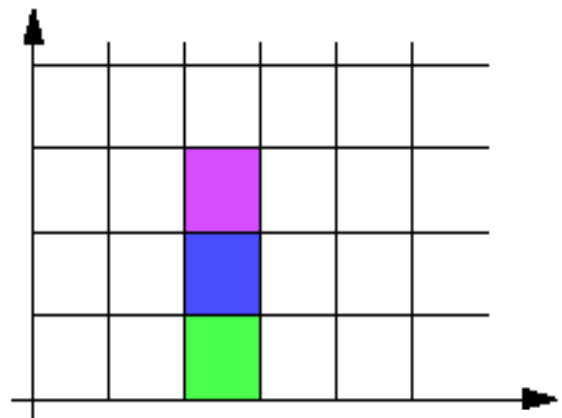
Short Time Fourier-Transformation: Spektrogramm

Wavelet-Transformation: Skalogramm



Frequenz

Frequenz



Stelle

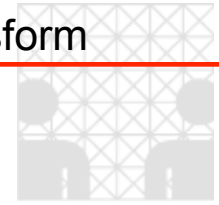
Zeit

ale (MMS), Dept. Informatik, Universität Hamburg

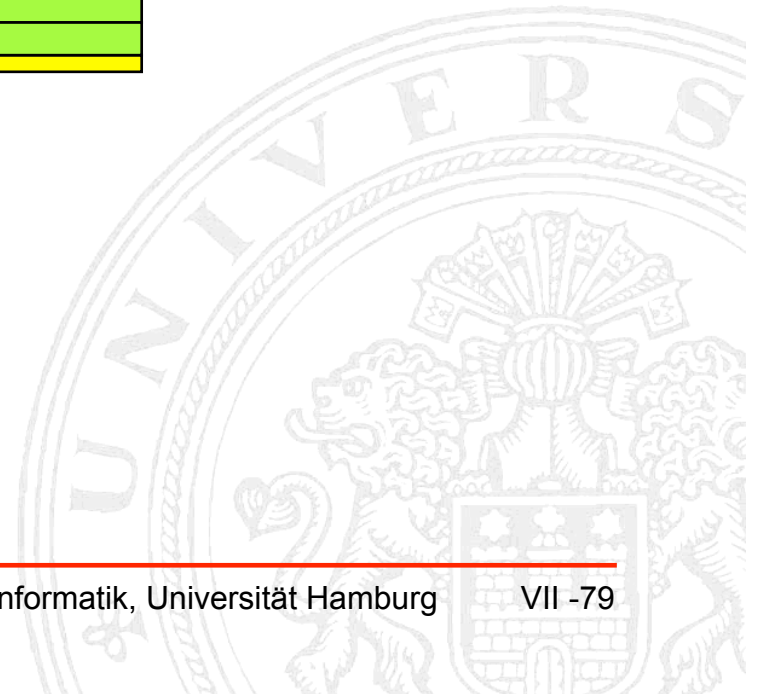
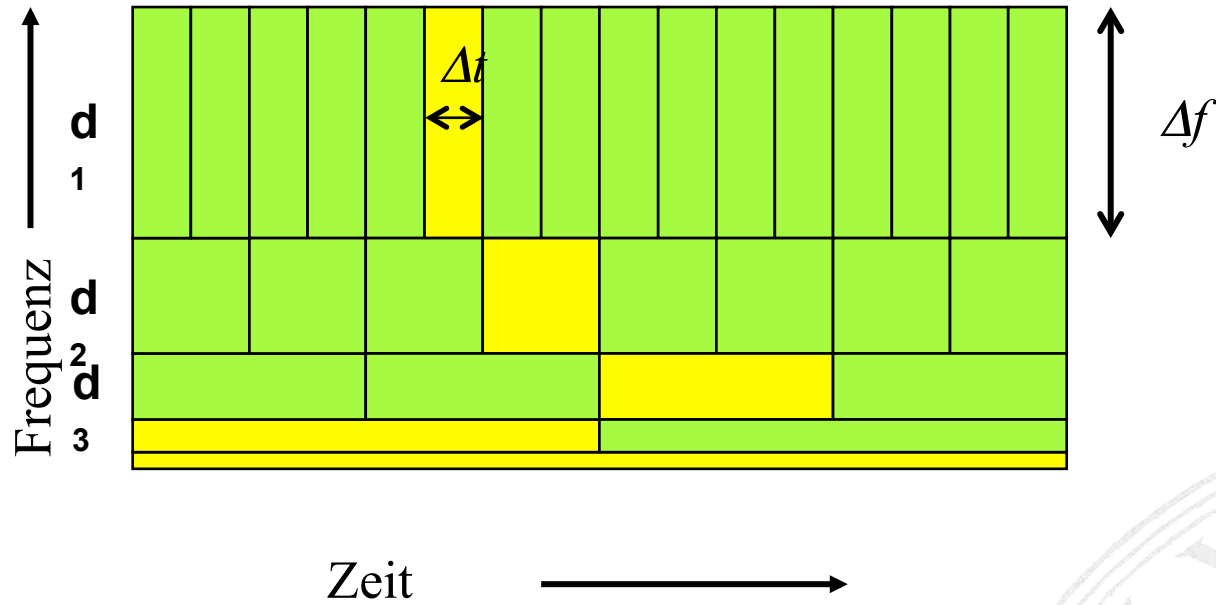
Zeit

II-78





Wavelet-Transformation: Skalogramm



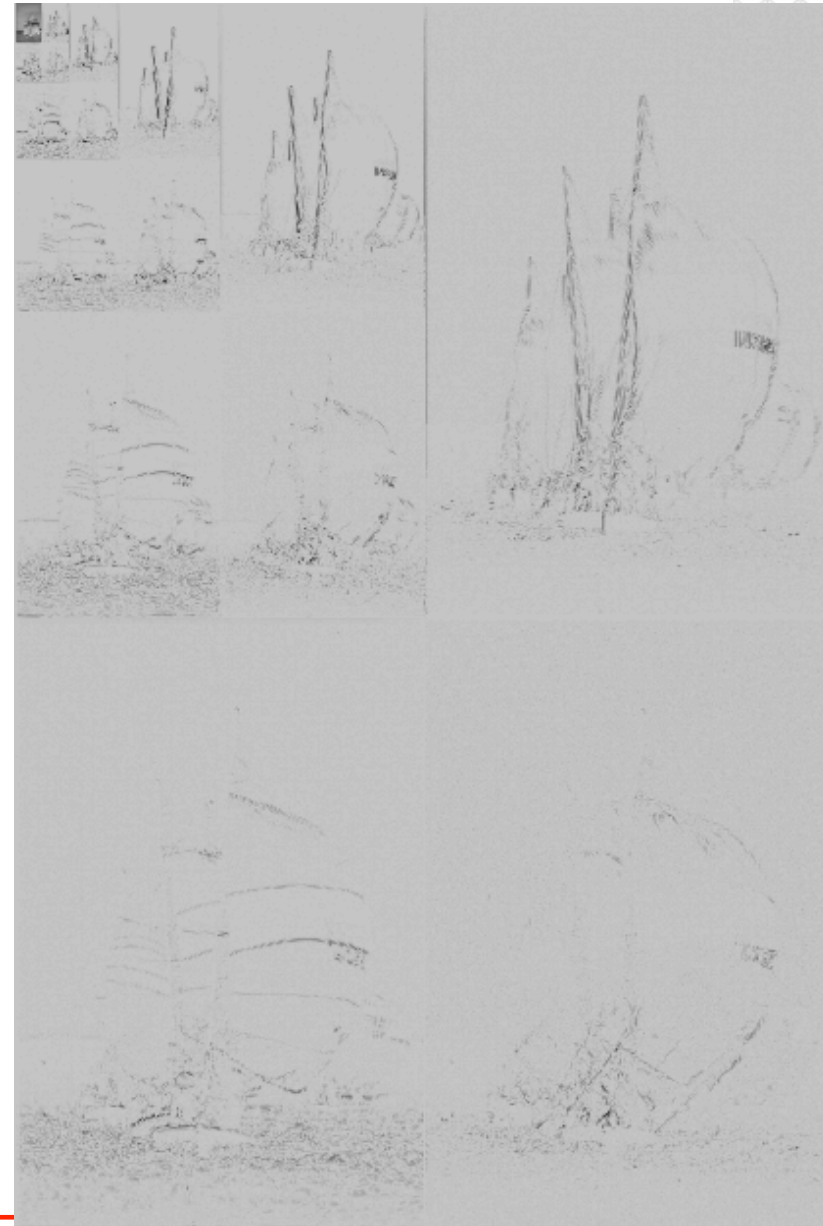


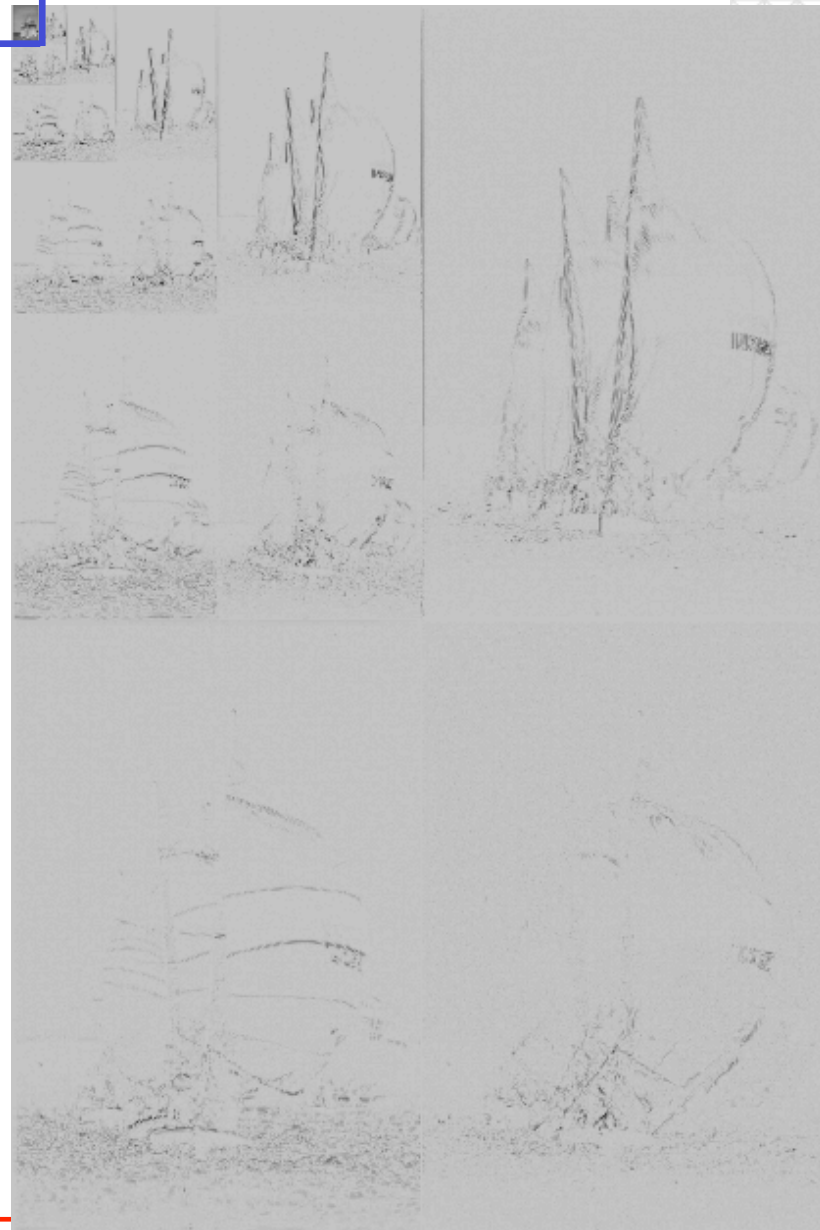
## Subbands bei Bildern

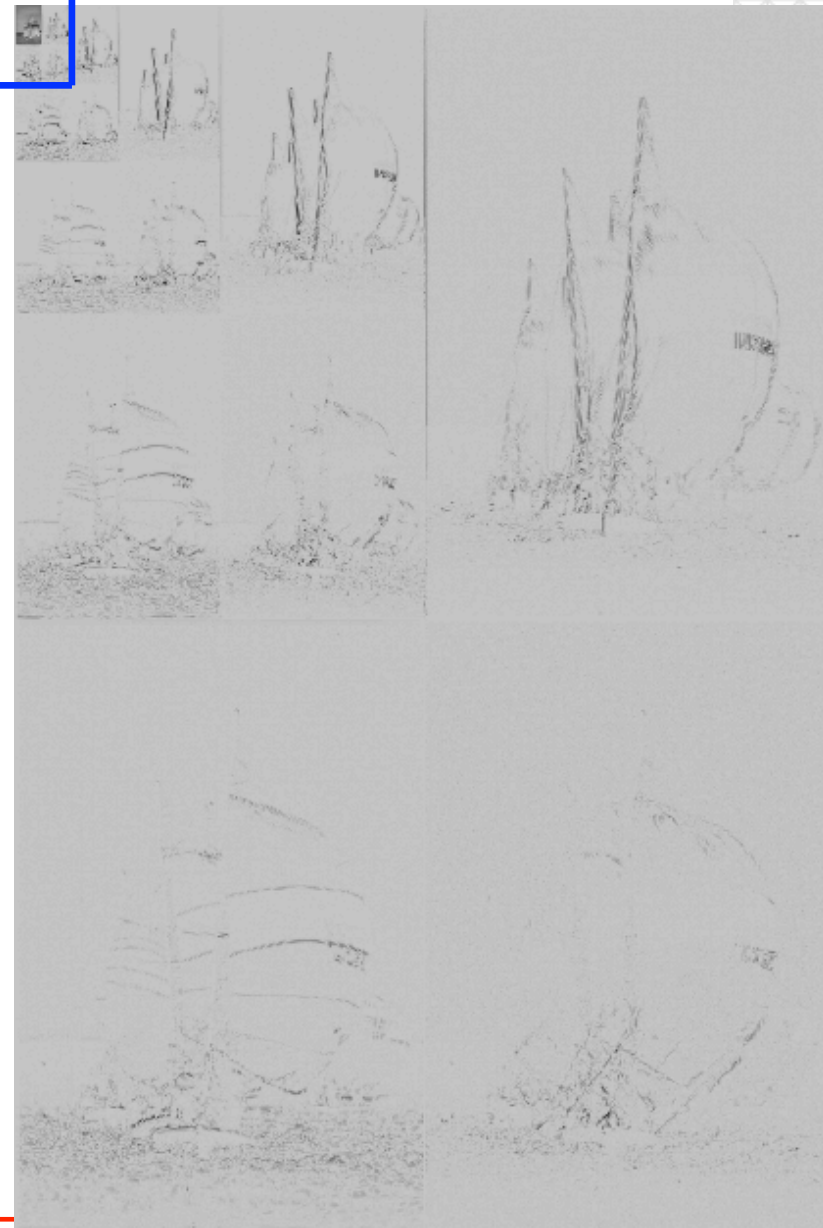
LL, LL	LH, LL	H,L
LL, LH	LH, LH	
L,H		H,H

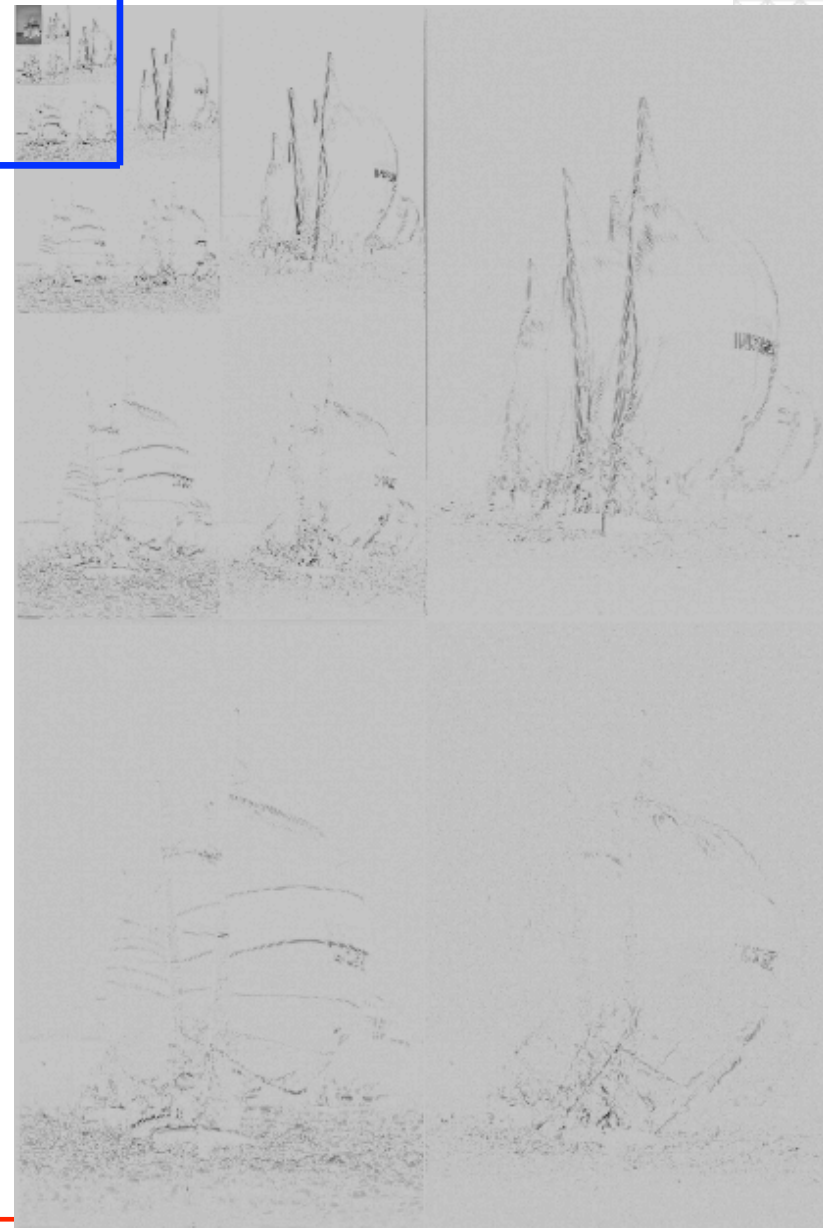
- Der erste Buchstabe bezieht sich auf die horizontale Filterung, der zweite auf die vertikale.
- L,H bedeutet beispielsweise, dass horizontal ein Tiefpass-Filter und vertikal ein Hochpassfilter auf die Daten angewandt wurden.

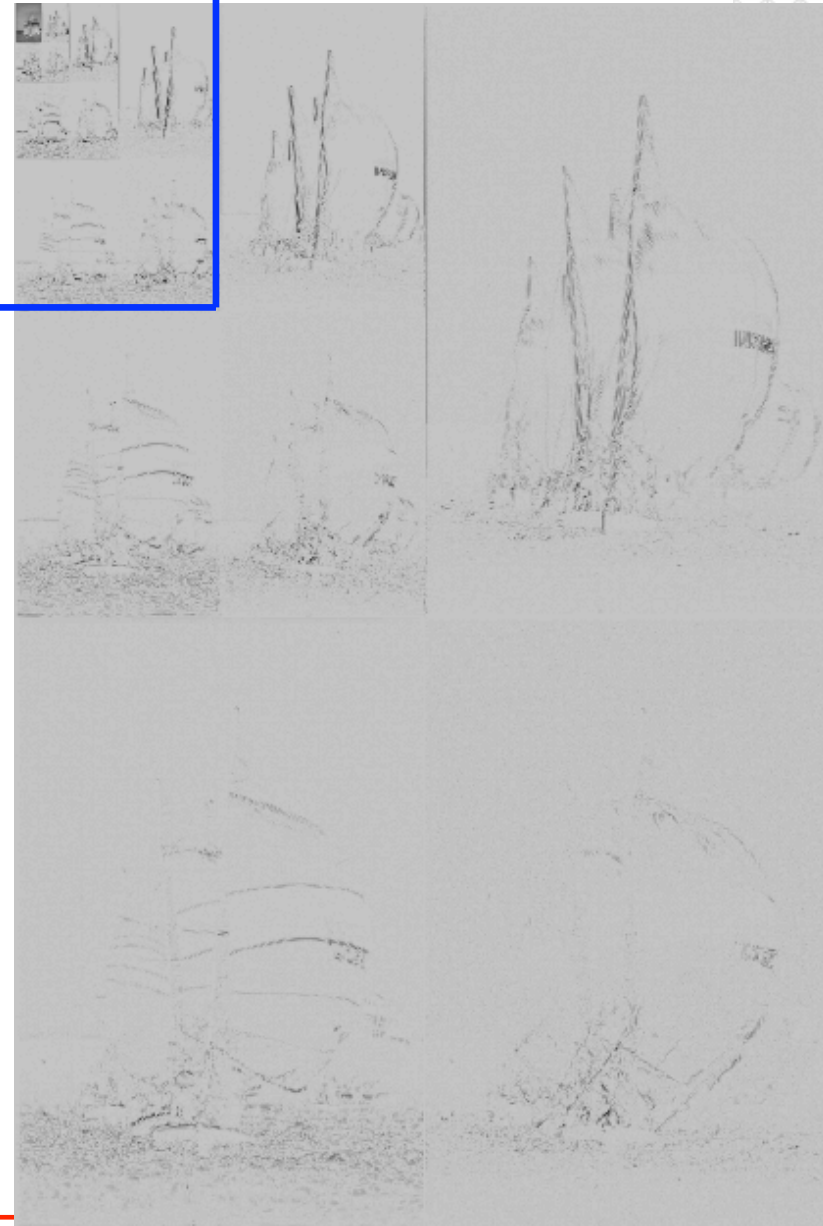


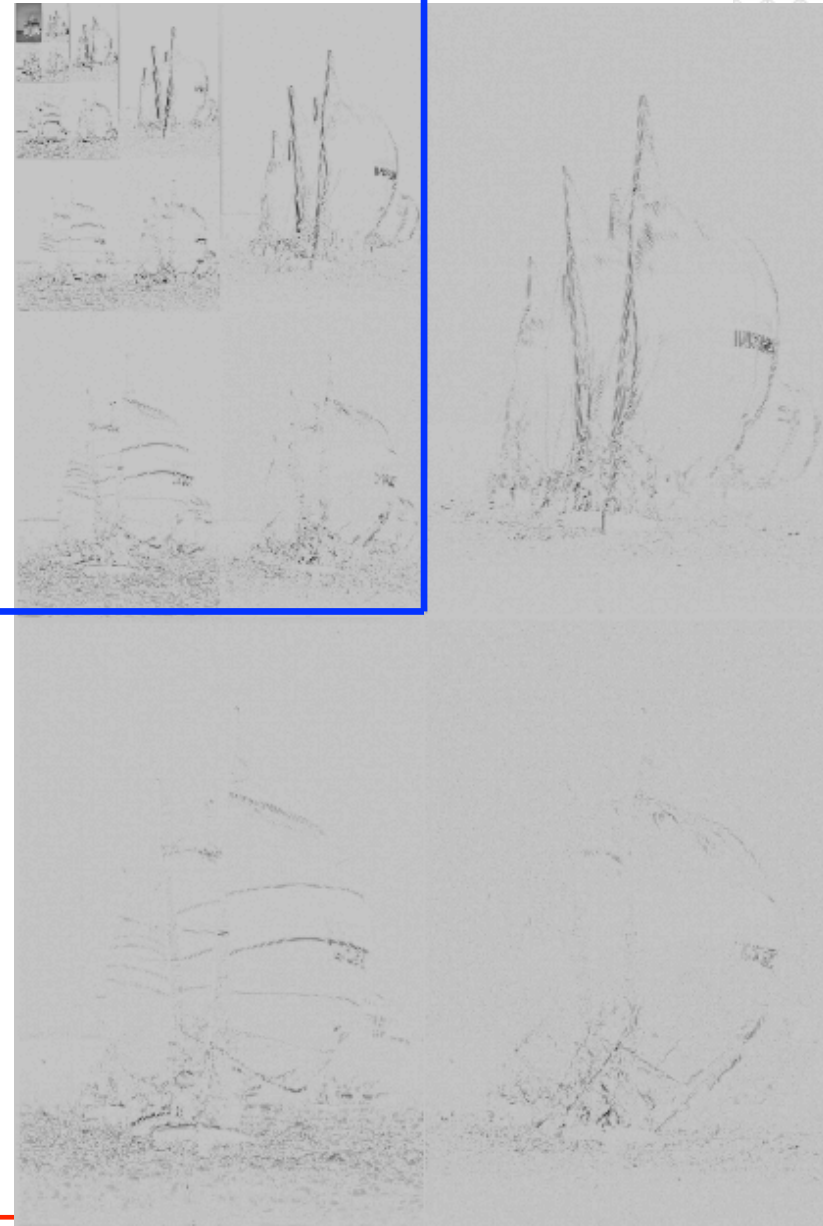


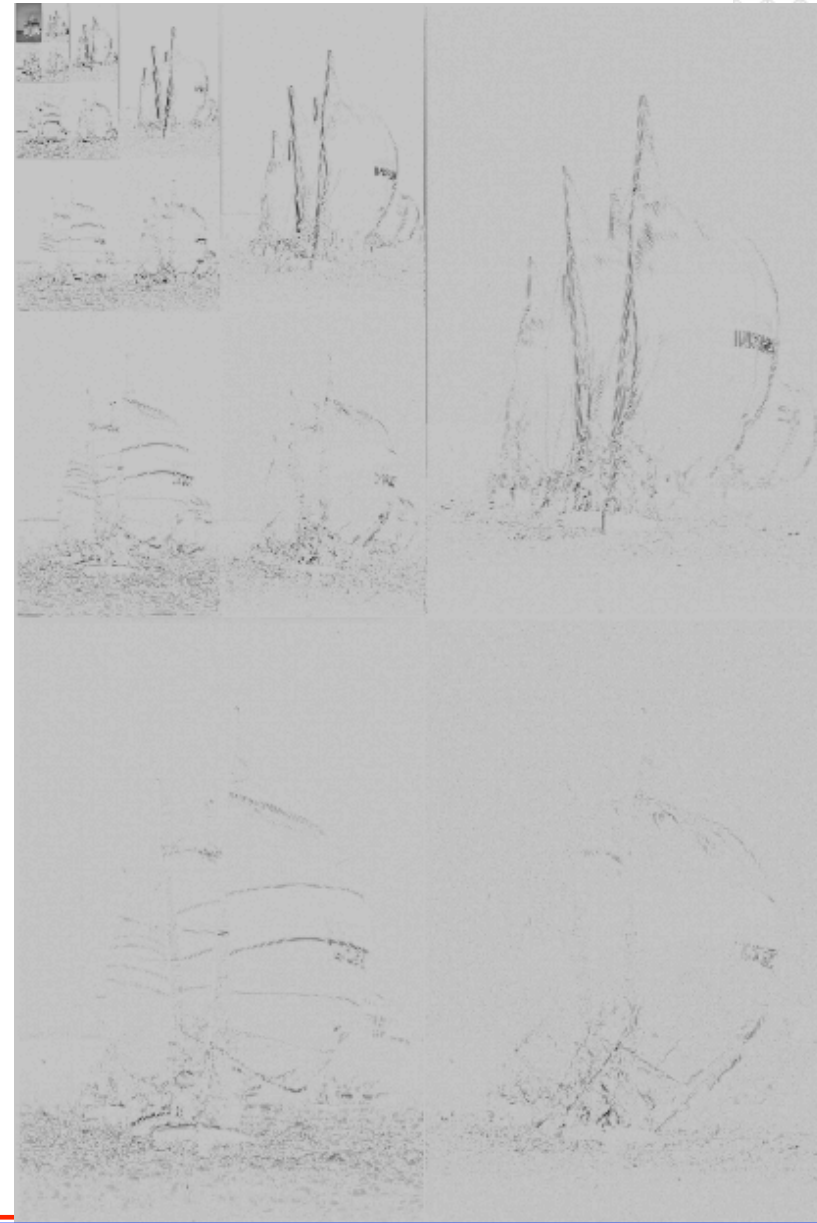






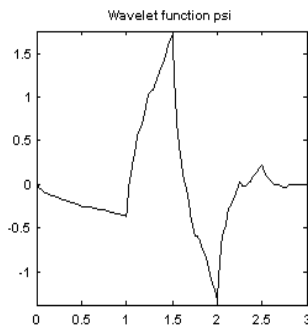






Ingrid Daubechies<sup>4,5</sup>:

- diskrete Zeit und Skalenparameter in der Wavelet-Transformation
- 1986: Wavelet Rahmen
- 1988: vollständige und orthonormale Basisfunktion für Wavelets (Daubechies wavelets)
- zeigt: Freiheit in der Wahl der Basisfunktionen auf Kosten von Redundanz



<sup>4</sup>I. Daubechies: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(7):909-996, 1988.

<sup>5</sup>I. Daubechies: The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36(5):961-1005, 1990



Stephane Mallat<sup>6</sup>:

- Doktorarbeit 1988 bei Mayer über Multiresolution Analysis
- 1989: Diskrete Wavelet Transformation: Schnelle Berechnung der Wavelet-Transformation mit Hilfe von Filterbänken

Zerlegung einer Funktion in dyadisch Spektralanteile,  
Croisier, Esteban and Galand, 1976 (!)



Martin Vetterli & Jelena Kovacevic

- 1986: Berechnung der Wavelet-Koeffizienten über Filterbänke
- 1988: Vollständige Rekonstruktion der Signale durch Einsatz von FIR Filterbänke
- Subband coding
- 1992: Mehrdimensionale Filterbänke



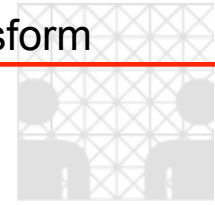
<sup>6</sup>S. G. Mallat: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., 11(7):674-693, July 1989.



Vergleich der Transformations-Kerne:

$$S(a, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_a^*(t - \tau) \cdot s(t) \cdot dt$$

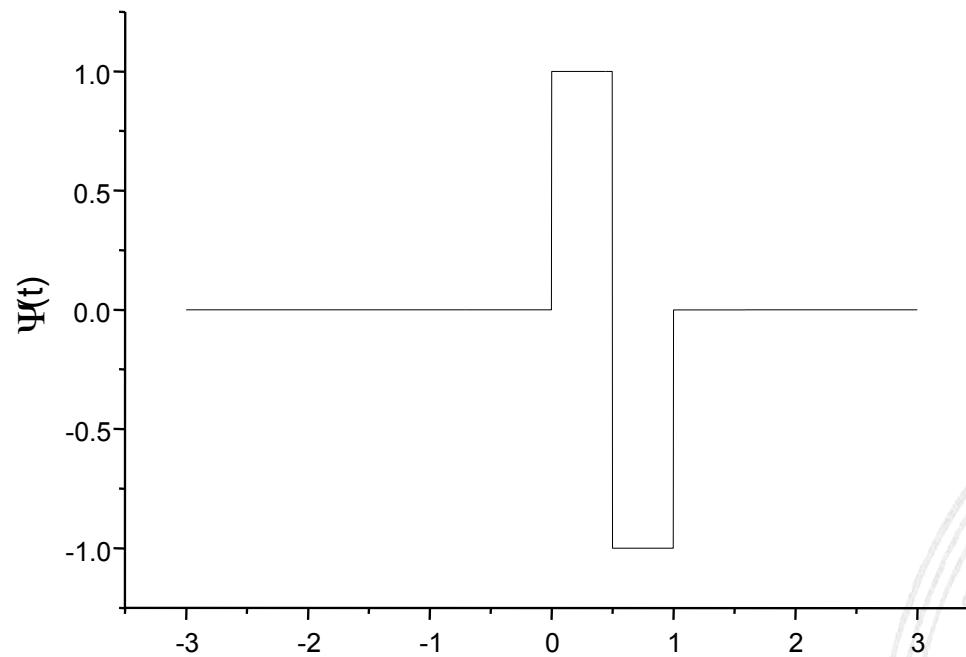
	$\Psi_a(t - \tau)$
FOURIER	$e^{i \cdot t/a}$
GABOR	$e^{i \cdot t/a} \cdot w(t - \tau)$
WAVELETS	$\frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right)$

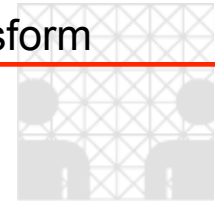


Wahl der Wavelet-Funktion:

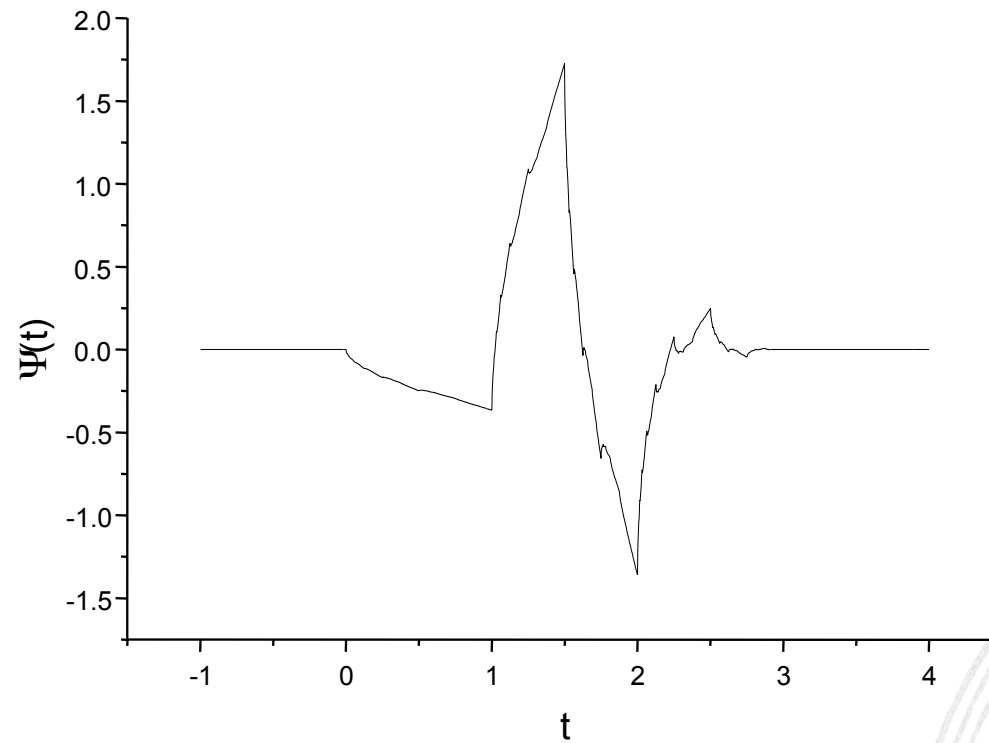
- bisher freie Wahl der Wavelets

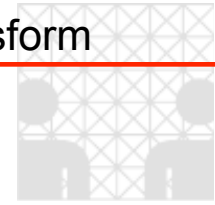
Haar Wavelet (1909)



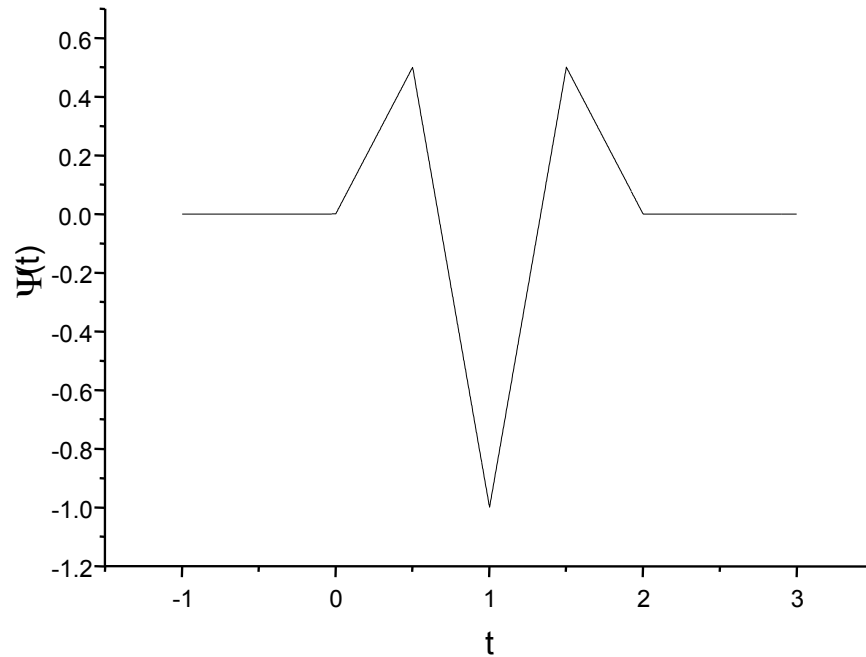


Daubechie Wavelet (4. Ordnung), 1987:

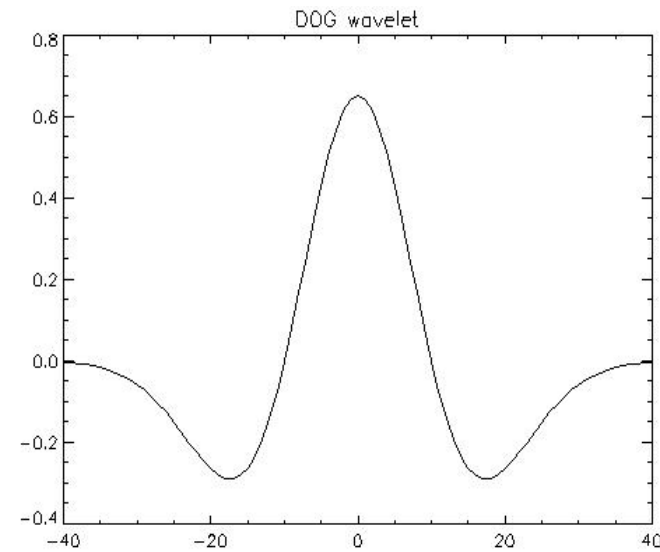




Gerader Spline:



Mexican Hat  
(2. Ordnung)



$$\psi_0(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \frac{d^m}{d\eta^m} e^{-\eta^2/2}$$

$$\Psi_0(t) = (1 - t^2) \cdot e^{-t^2/2}$$



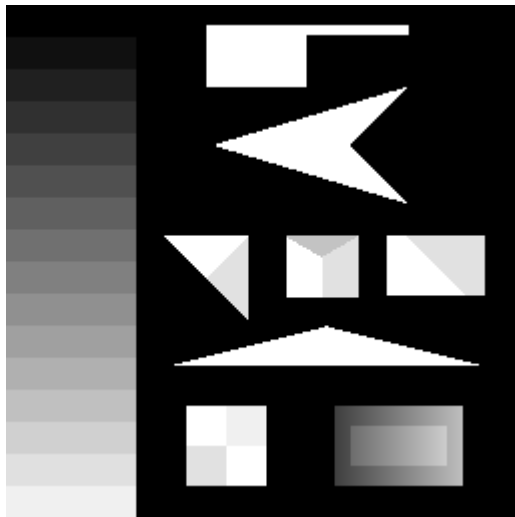
## Multiskalenanalyse

Die Wavelet-Transformation stellt eine Multiskalenrepräsentation des Signals dar: Signalinformationen werden auf identische Weise für verschiedene Skalen berechnet.

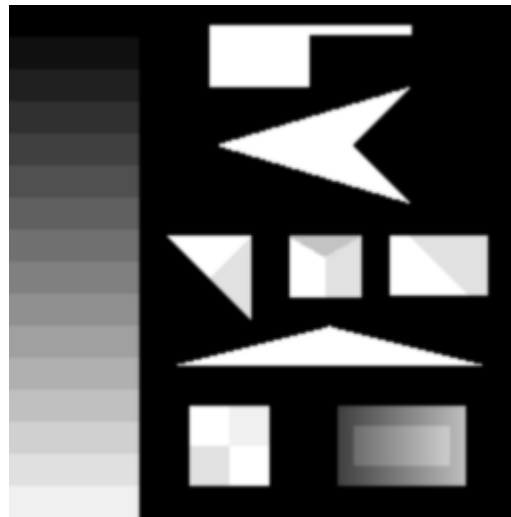
Dieses Vorgehen ist auch bei anderen Operationen sinnvoll und verbreitet. Wird die Auflösung des Signals entsprechend der Frequenzauflösung über die variiert, spricht man von einer Multiskalen-Pyramide. Diese hat den Vorteil der Speicherplatzeffektivität, jedoch ist es schwieriger, Informationen von verschiedenen Skalen miteinander in Beziehung zu setzen.

Anwendungsbeispiele: Kantendetektion, Eckendetektion, und viele mehr...

# Gaußsche Glättung



Skala: 0



0.7



1.4



2.8

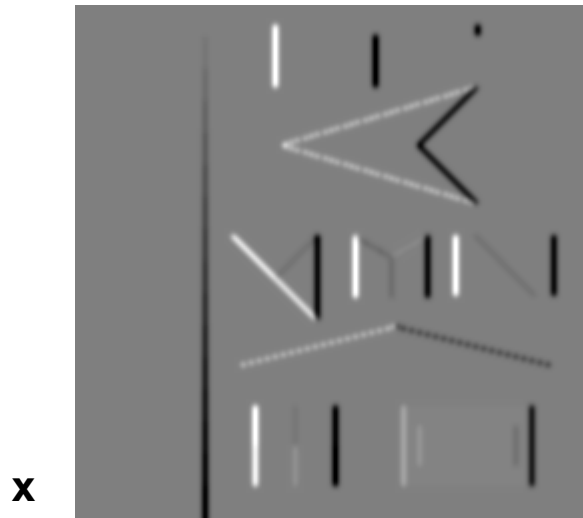
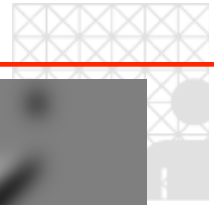


5.6



11.2

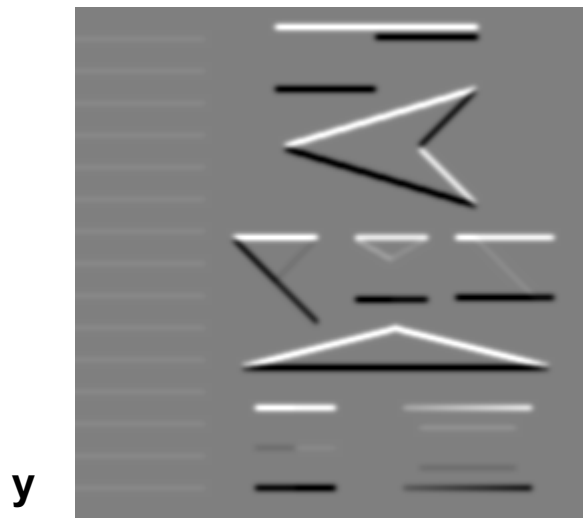
# Gaußscher Gradient



Skala: 1.4

2.8

5.6



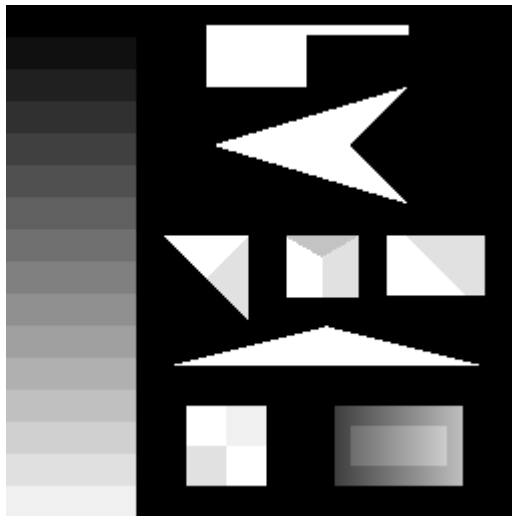
1.4

2.8

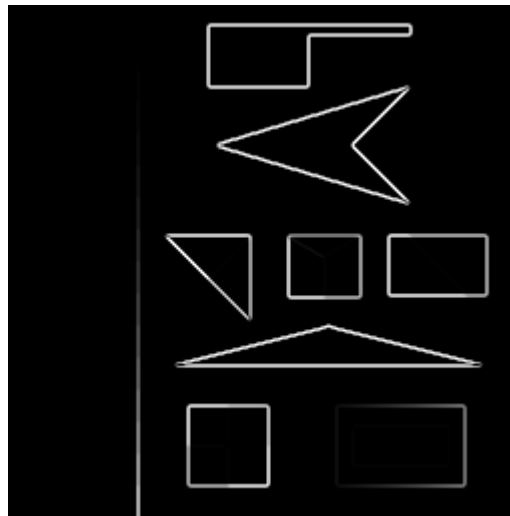
5.6



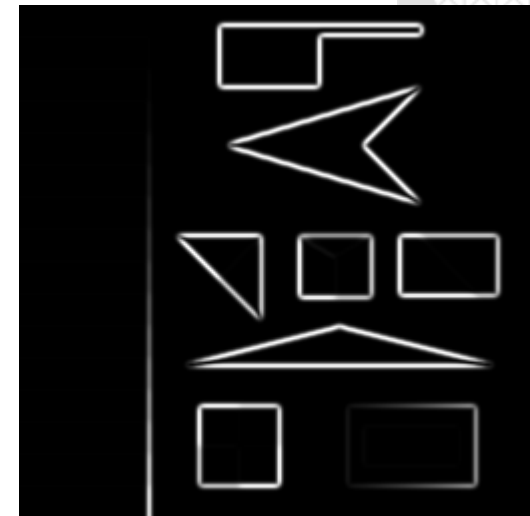
# Gradientenbetrag



Skala: Original



0.7



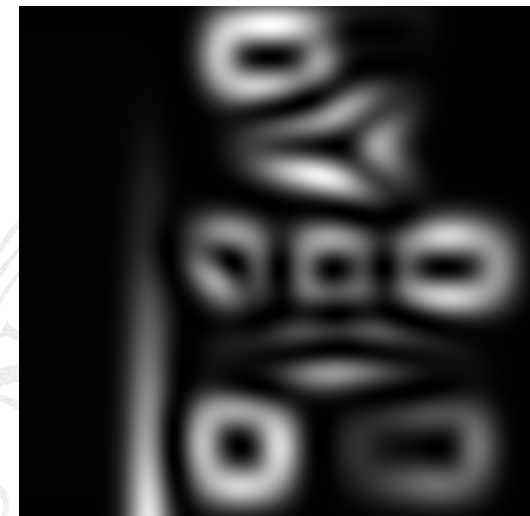
1.4



2.8

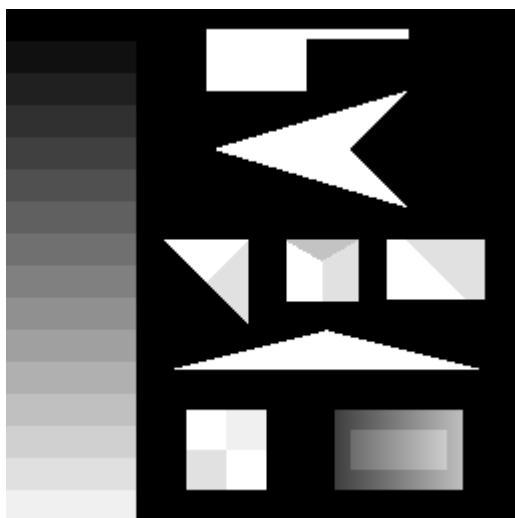


5.6

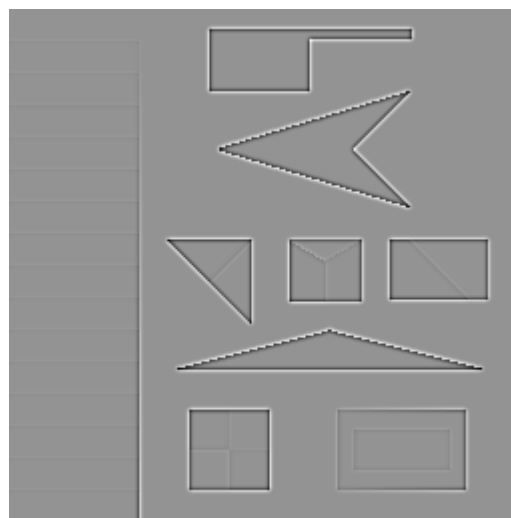


11.2

# Laplaceoperator von Gauß



Skala: Original



0.7



1.4



2.8

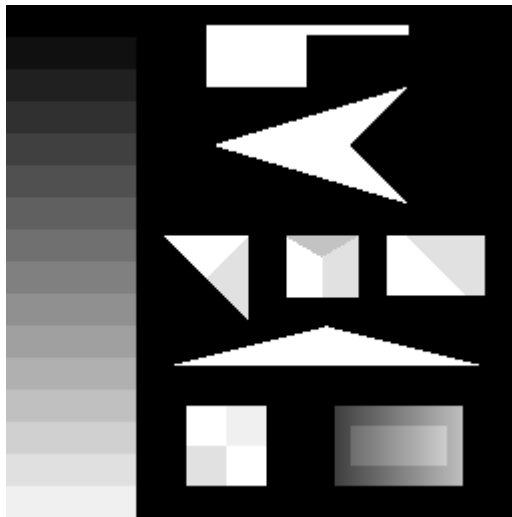


5.6

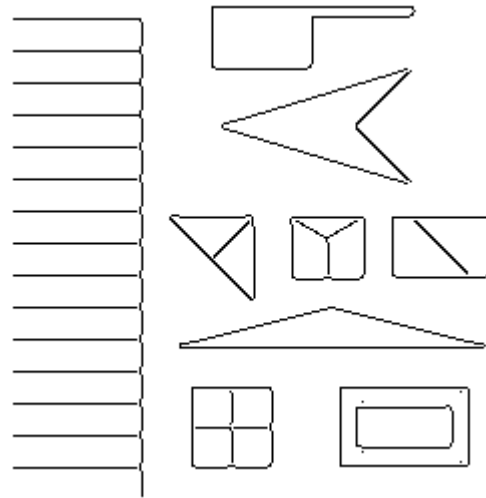


11.2

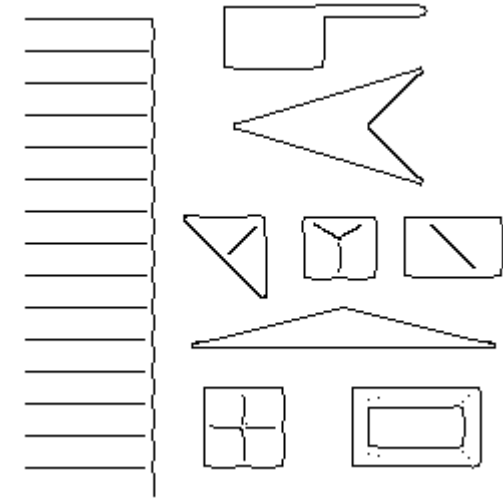
# Kanten aus dem Gradienten (Canny-Operator)



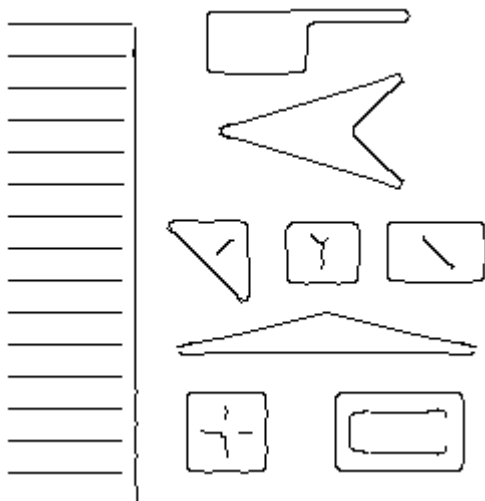
Skala: Original



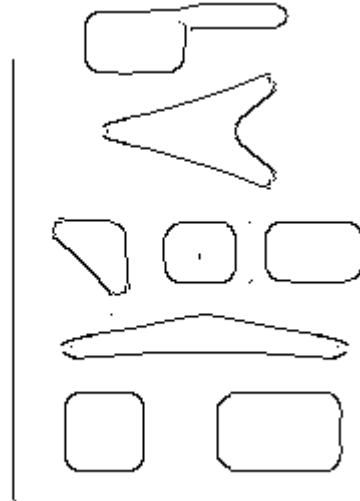
0.7



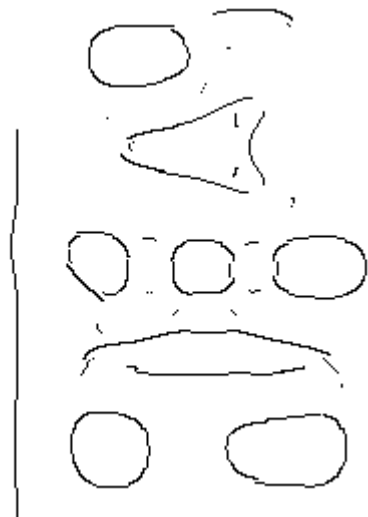
1.4



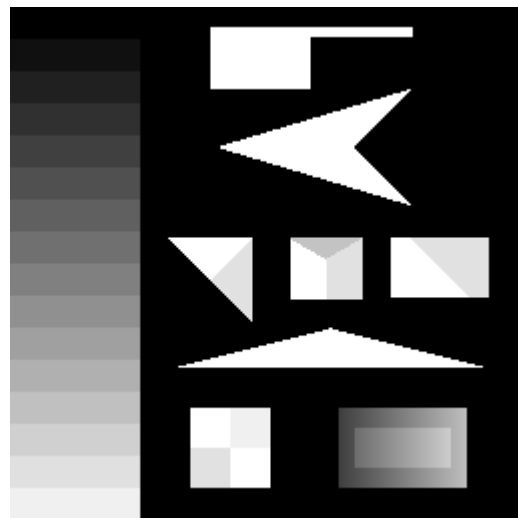
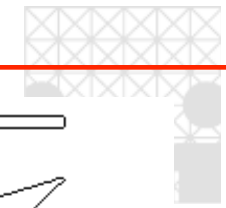
2.8



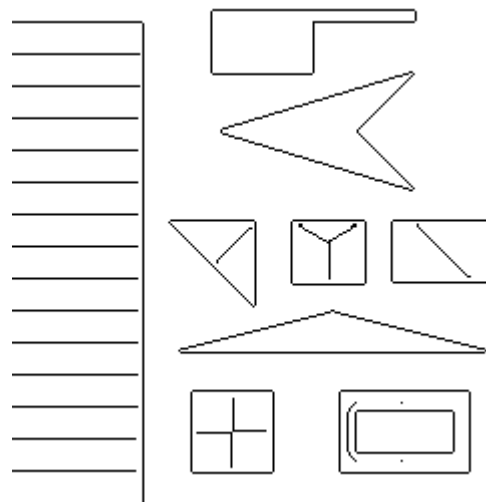
5.6



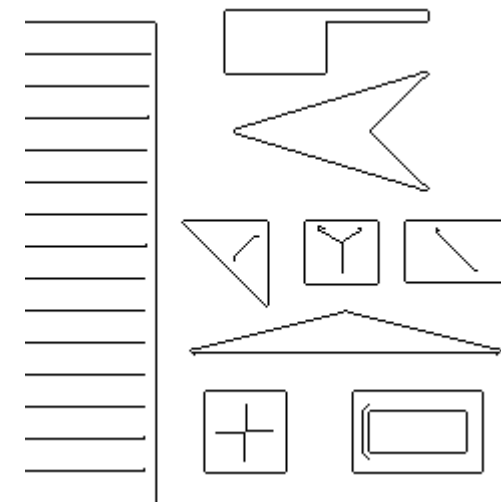
11.2



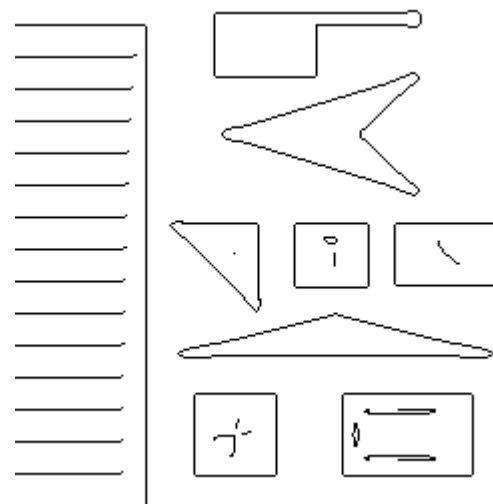
Skala: Original



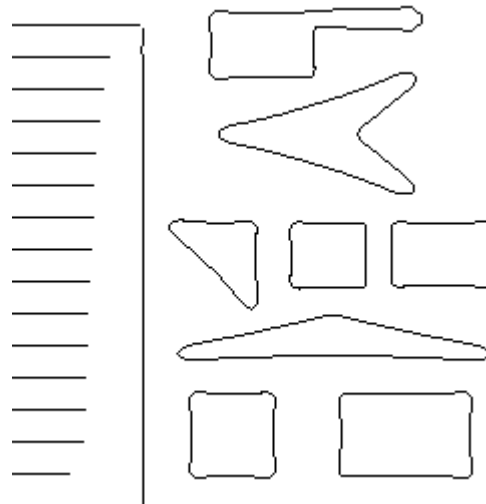
0.7



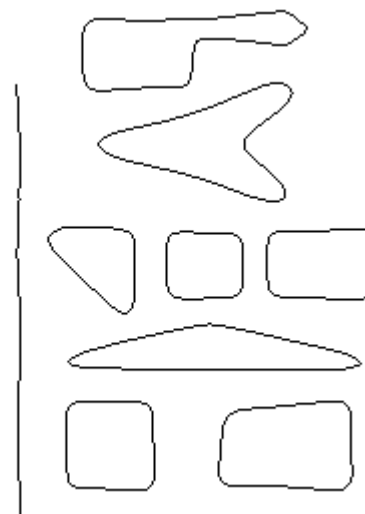
1.4



2.8

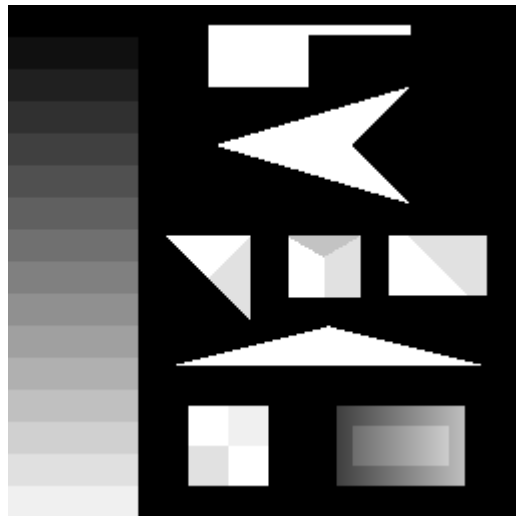


5.6

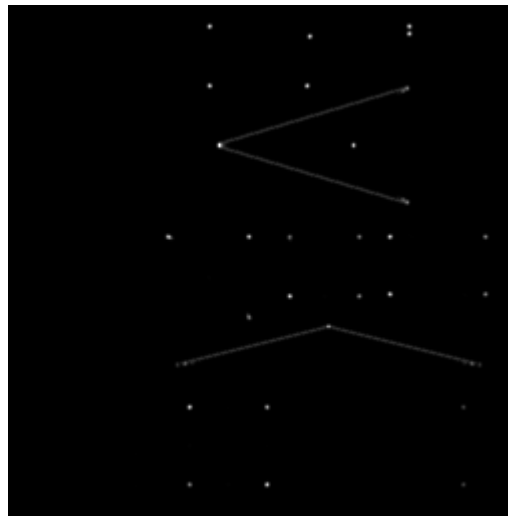


11.2

Eckenstärke mit Rohr-Operator (Determinante des Strukturtenors)



Skala: Original



0.7



1.4



2.8

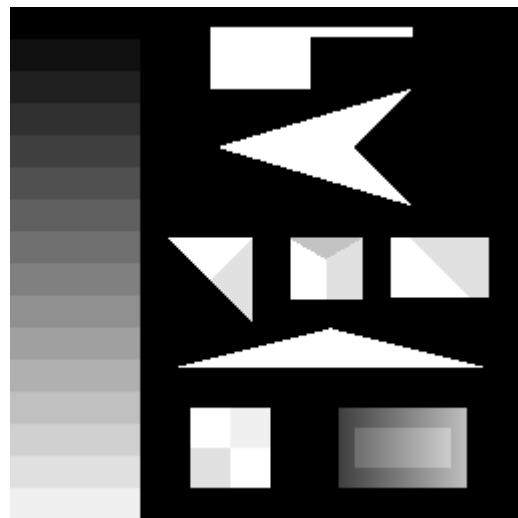


5.6

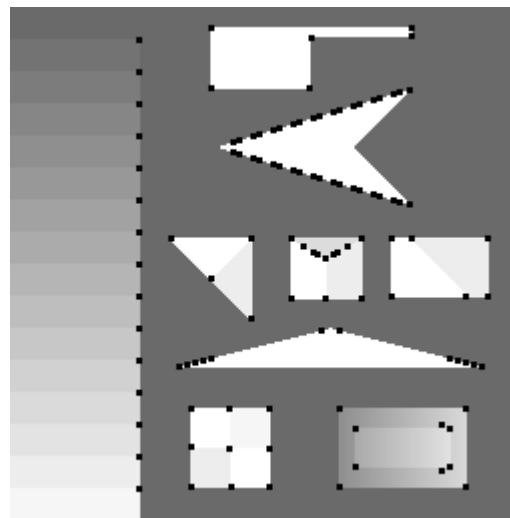


11.2

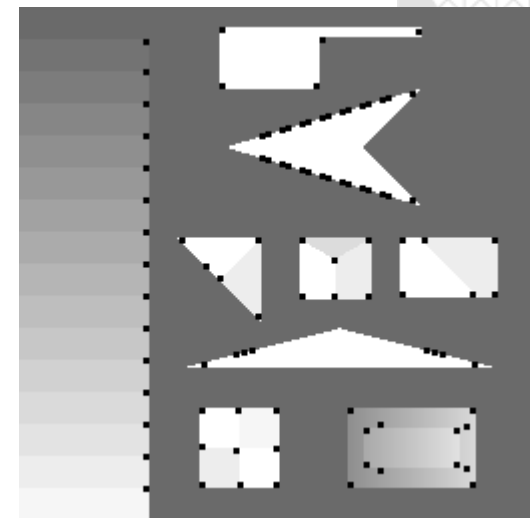
Eckendetektion mit Rohr-Operator (lokale Maxima der Operatorantwort)



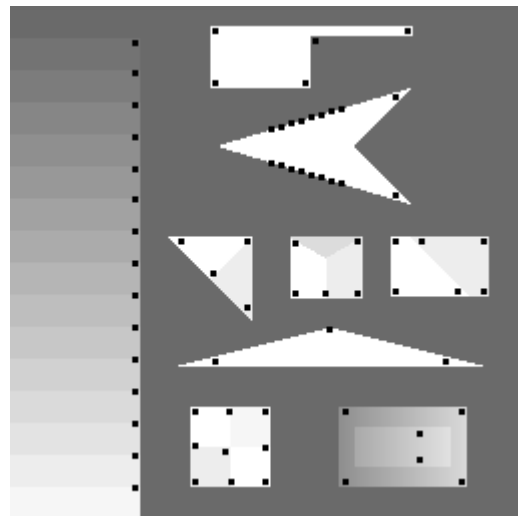
Skala: Original



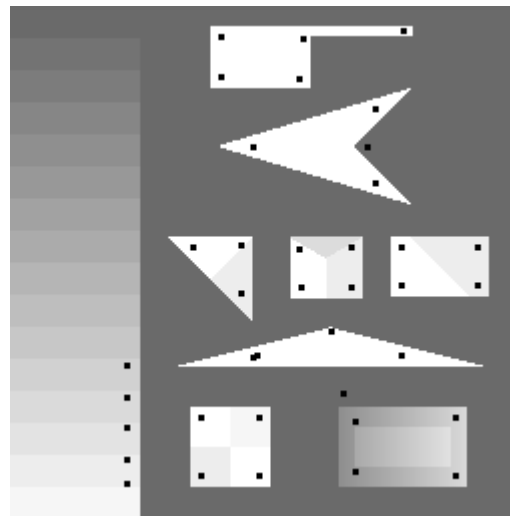
0.7



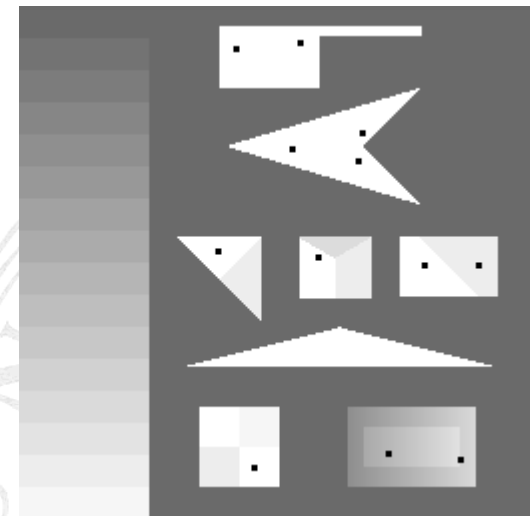
1.4



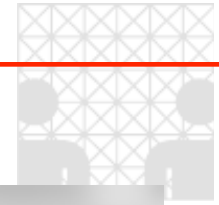
2.8



5.6



11.2



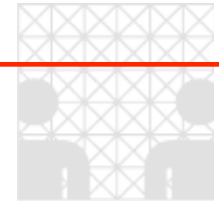
Skala: original



1.4



5.6



**Skala: original**



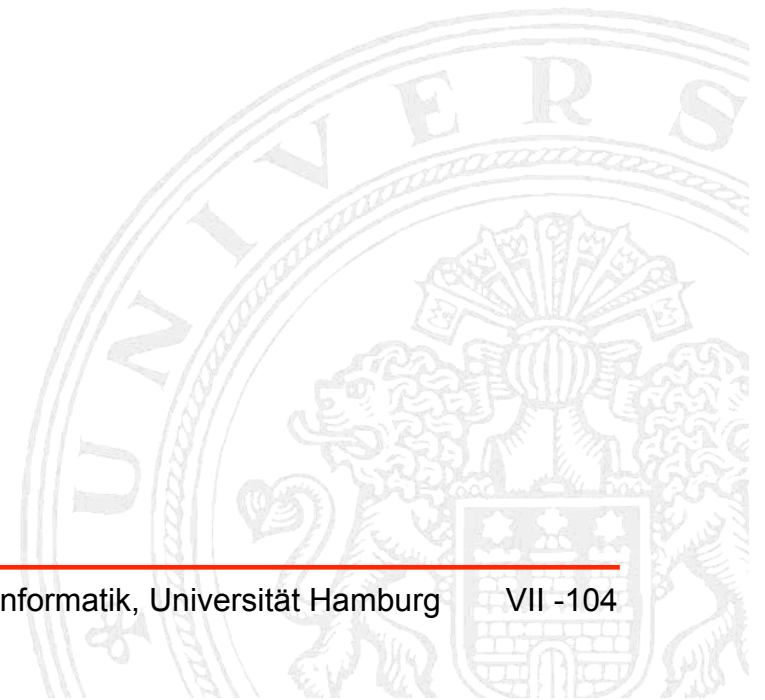
**1/2**



**1/4**

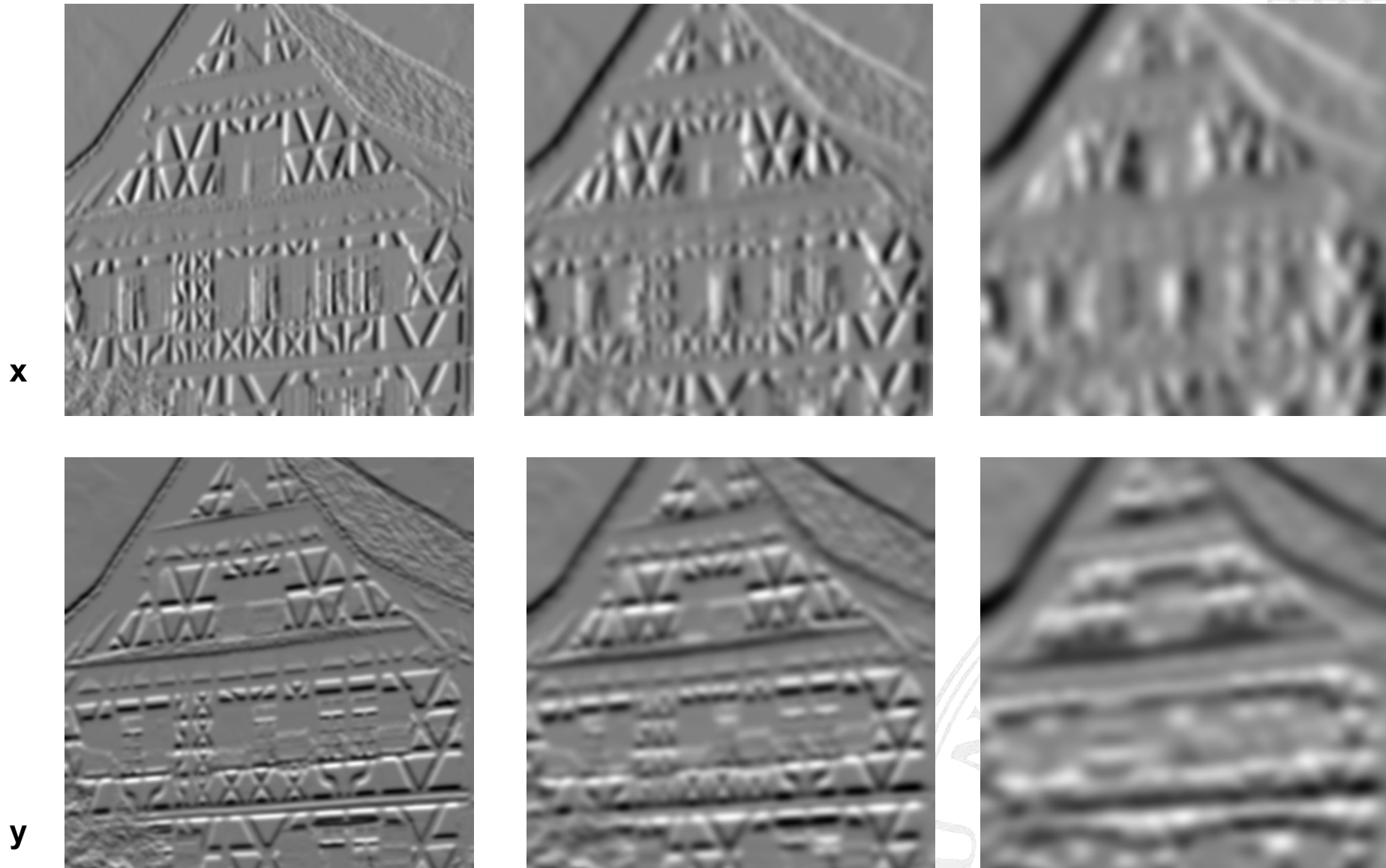


**1/8**





# Gaußscher Gradient



**Skala: 1.4**

**2.8**

**5.6**



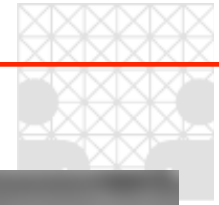
Skala: original



1.4



5.6



Skala: original

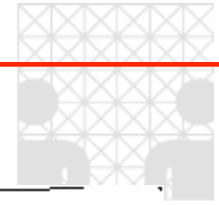


1.4

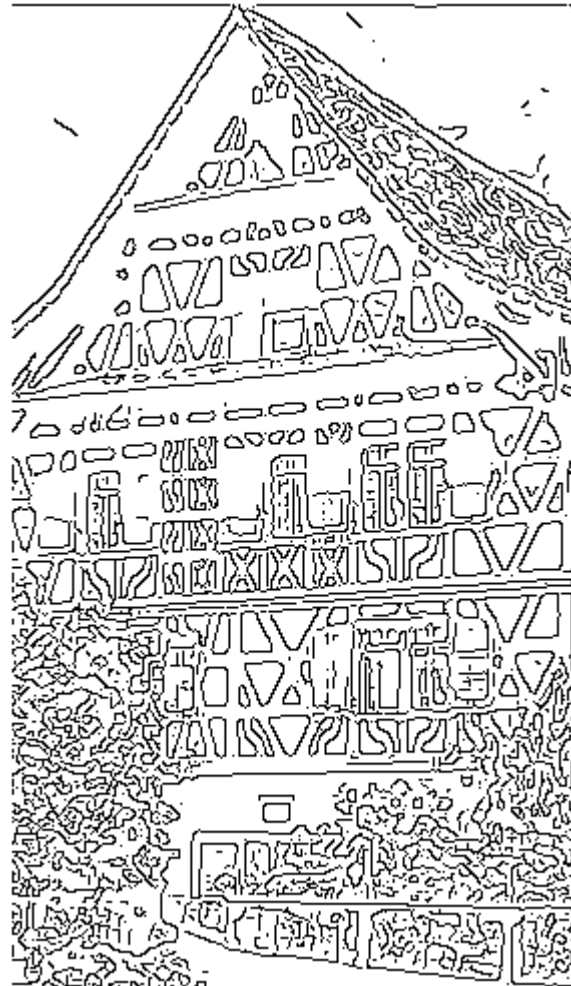


5.6

## Kanten aus dem Gradienten (Canny-Operator)



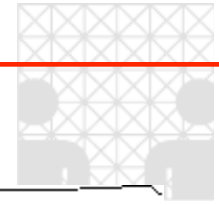
Skala: original



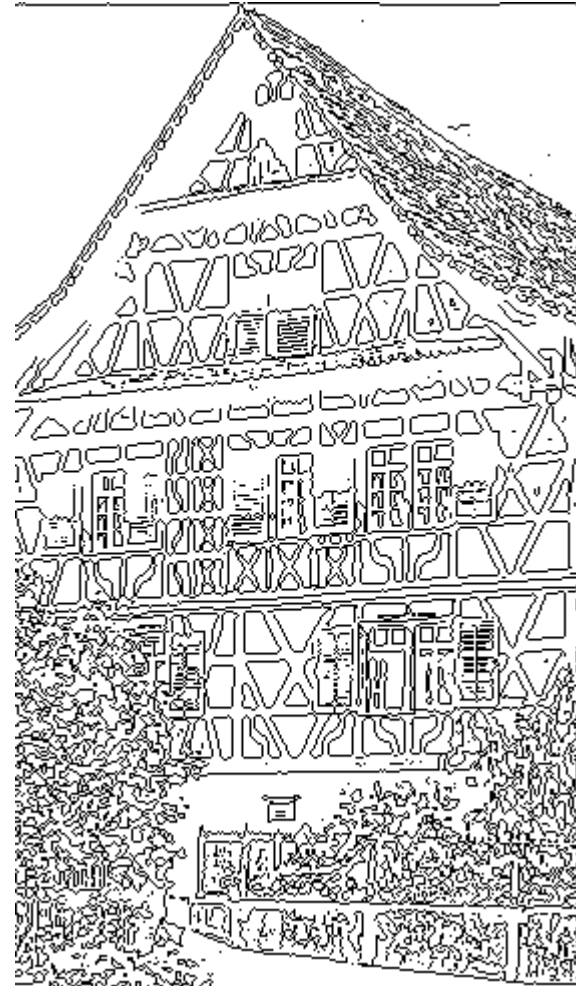
1.4



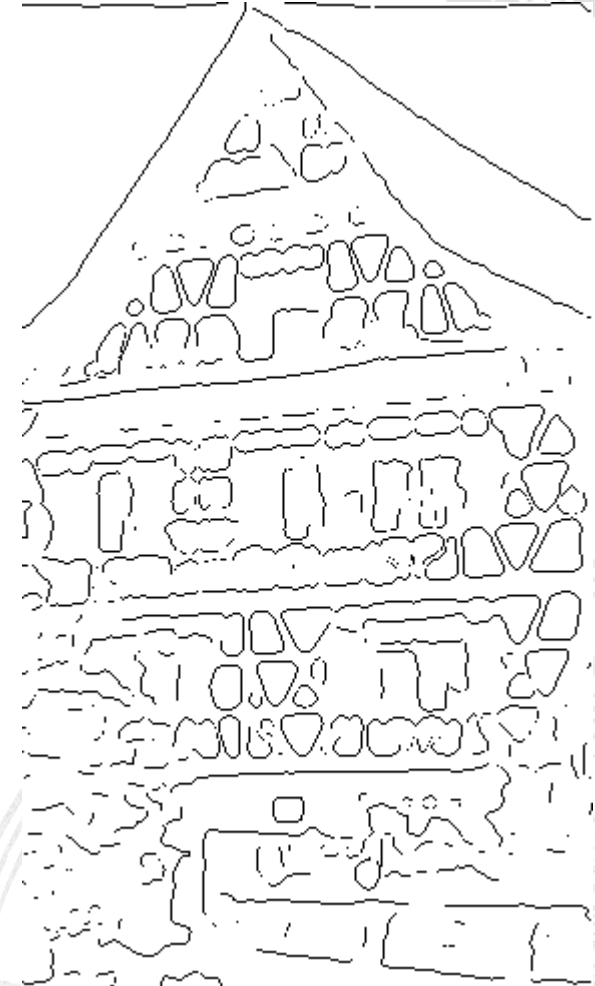
5.6



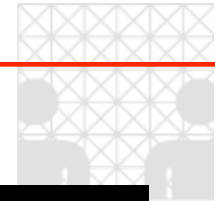
Skala: original



1.4



5.6



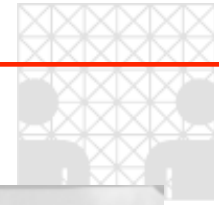
Skala: original



1.4



5.6



Skala: original



1.4



5.6



## Literaturliste

- [1] J.G. Daugman (1985) Representational issues and local filter models of two-dimensional spatial visual encoding. in: D. Rose, V.G. Dobson (1985) Models of the Visual Cortex. Wiley, 96-107
- [2] J.G. Daugman (1985) Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. J Opt Soc Amer A 2(7): 1160-1169
- [3] J.G. Daugman (1990) An Information-Theoretic View of Analog Representation in Striate Cortex. in: E.L. Schwartz (Ed., 1990) Computational Neuroscience. The MIT Press, 403-423 (Gabor-Transformation, Sehsystem und Neuroinformatik)
- [4] D. Gabor (1946) Theory of communication. Journal of the Institute of Electrical Engineers (London) 93 (III), 429-457 (Meilensteinpublikation)
- [5] B.B. Hubbard (1996) The World According to Wavelets – The Story of a Mathematical Technique in the Making. Peters (leicht lesbare Einführung)
- [6] S. Mallat (1998) A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press (Standardwerk, insbesondere zu 2-D Multiskalenapproximation)
- [7] L. Prasad, S.S. Iyengar (1997) Wavelet Analysis with Applications to Image Processing. CRC Press (fundierte theoretische Einführung)





- [8] F. Schröder, S. Wörz (2000) Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Anwendung der Wavelettransformation auf die Analyse digitaler Signalstrukturen. Universität Hamburg, FB Informatik, Diplomarbeit (Referenzdiplomarbeit)

