

# Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen für Optical Flow Constraints

Benjamin Seppke

4. Juni 2010

## 1 Euler-Lagrange Gleichungen

In dem Gebiet der Variationsrechnung ist die Euler-Lagrange Gleichung (oder auch nur Lagrange Gleichung) eine Differentialgleichung, dessen Lösungen diejenigen Funktionen sind, für welche ein gegebenes Funktional stationär ist. Sie wurde von Leonhard Euler und Joseph Louis Lagrange in den 1750er Jahren entwickelt (vgl. Wikipedia (2010)).

Da ein, aus Differentialgleichungen bestehendes, Funktional gerade an seinen lokalen Minima bzw. Maxima stationär ist, ist die Euler-Lagrange-Gleichung ein beliebtes Hilfsmittel bei der Lösung von Optimierungsproblemen. Lässt sich das Problem so formalisieren, dass ein entsprechendes Funktional minimiert oder maximiert werden soll, so erhält man mittels der Euler-Lagrange-Gleichung gerade diejenige Funktion, welche diese Minima bzw. Maxima beschreibt.

Die folgenden Unterkapitel orientieren sich von der Notation her an Courant and Hilbert (1953).

### 1.1 Basisgleichung

Für ein Funktional  $\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$  welches durch einen Parameter  $x$ , eine Funktion  $f(x)$  und dessen Ableitung  $f'(x)$  definiert wird führen wir zunächst folgende abkürzende Schreibweise ein:  $\mathcal{L}(x, f, f')$ .

Die Euler-Lagrange Gleichung ist nun eine Gleichung, die durch die Funktion  $f$  mit einem (reelwertigen) Argument  $x$  erfüllt wird und für folgendes Funktional stationär ist:

$$S(f) = \int_a^b \mathcal{L}(x, f, f') \, dx$$

wobei  $f$  die zu suchende Funktion ist (mit  $\text{dom}(f) = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ), und  $f'$  die erste Ableitung von  $f$  ist.  $\mathcal{L}$  muss eine reelwertige Funktion sein, die kontinuierlich partiell ableitbar ist. Dann ist die Euler-Lagrange Gleichung gegeben durch:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = 0$$

## 1.2 Gleichung für mehrere Funktionen über mehrere Unbekannte

Falls in dem Funktional mehrere Funktionen auftreten, die zudem über mehrere Unbekannte definiert werden, so ergibt sich folgendes Funktional:

$$S(f) = \int_{\Omega} \mathcal{L} \left( x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

wobei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Unbekannten der Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sind. Durch die Einführung der Notation:

$$f_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

lässt sich diese Gleichung (und alle folgenden Gleichungen ebenso) vereinfacht darstellen:

$$S(f) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m, f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots, f_{m1}, \dots, f_{mn}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Da für dieses Funktional  $m$  Funktionen gesucht werden, liefert die Euler-Lagrange Gleichung (im Gegensatz zur Basisgleichung) auch  $m$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{1i}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_2} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{2i}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_m} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{mi}} &= 0 \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennen kann folgt aus dieser verallgemeinerten Form auch wieder die korrekte Formel für die Basisgleichung mit  $n = 1$ ,  $m = 1$  und  $\Omega = [a, b]$ :

$$S(f) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x_1, f_1, f_{11}) dx_1$$

Und damit die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} - \sum_{i=1}^1 \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{1i}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{11}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_1} &= 0 \end{aligned}$$

## 2 Anwendung der Euler-Lagrange Gleichungen zur Lösung des Optical Flow Problems (nach Horn & Schuck)

Horn und Schuck schlagen in Horn and Schuck (1981) vor, den Optischen Fluss zwischen zwei Bildern durch ein zweidimensionales Vektorfeld zu definieren. Die Schätzung dieses Vektorfeldes soll von der Grundannahme ausgehen, dass sich die Intensität eines Objektes während der Bewegung nicht verändert. Dies führt zu folgender Ausgangssituation:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

wobei  $I$  die Bildfunktion ist, die über den räumlichen Bereich  $(x, y)$  und über die Zeit  $t$  definiert ist. Ferner seien  $u$  und  $v$  Funktionen, die die Bewegung in  $x$ -Richtung bzw. in  $y$ -Richtung für angeben.

Leider führt diese Formel (aufgrund des Apertur-Problems) nicht alleine zu einer Lösung, die wir für zwei unbekannte, zu schätzende Funktionen auch zwei Formeln benötigen. Aus diesem Grund haben Horn und Schuck vorgeschlagen, weitere Randbedingungen mit in die Formel aufzunehmen um eine Lösung erhalten zu können.

Zusätzlich zur obigen Bedingung wird noch eine Glattheitsannahme des Vektorfeldes mit in die Berechnung einbezogen: Die Stärke der Ableitungen des Vektorfeldes sollte möglichst gering sein. Kombiniert man diese Forderung zusammen mit der Grundannahme, so erhält man folgendes Funktional für das Fehlermaß des Vektorfeldes:

$$S(u, v) = \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v - \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + \alpha^2 \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) \right) dx dy$$

Hierbei wurde von Horn & Schuck noch ein zusätzlicher Parameter  $\alpha$  eingeführt, um den Einfluss der Glattheitsbedingung zu kontrollieren. Zur besseren übersichtlichkeit führen wir eine weitere vereinfachte Darstellung für partielle Ableitungen ein:

$$F_x := \frac{\partial F}{\partial x}$$

Damit lässt sie die Gleichung des Fehlerintergrals wesentlich übersichtlicher aufschreiben:

$$S(u, v) = \int_{\Omega} \left( (I_x u + I_y v - I_t)^2 + \alpha^2 (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \right) dx dy$$

### 2.1 Bestimmung der Euler-Lagrange Gleichungen

Zur Minimierung mittels Euler-Lagrange Gleichungen bestimmen wir zunächst das Funktional  $\mathcal{L}$  in Abhängigkeit aller zu minimierender Unbekannten und Funktionen:

$$\mathcal{L}(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = (I_x u + I_y v - I_t)^2 + \alpha^2 (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)$$

Wie leicht aus der obigen Formel ersichtlich ist, handelt es sich bei diesem Funktional um einen Spezialfall der verallgemeinerten Formel aus Abschnitt 1.2 mit  $n = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\Omega = \text{dom}(I)$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $f_1 = u$ ,  $f_2 = v$ ,  $f_{1_1} = u_x$ ,  $f_{1_2} = u_y$ ,  $f_{2_1} = v_x$  und  $f_{2_2} = v_y$ .

Damit ergeben sich für die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{d}{dv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} - \frac{d}{dv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} &= 0\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen können direkt aus  $\mathcal{L}$  heraus bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{du} 2\alpha^2 u_x - \frac{d}{du} 2\alpha^2 u_y &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{d}{dv} 2\alpha^2 v_x - \frac{d}{dv} 2\alpha^2 v_y &= 0\end{aligned}$$

Durch weiteres Ableiten können die Gleichungen vereinfacht werden zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - 2\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha^2 u_{yy} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - 2\alpha^2 v_{xx} - 2\alpha^2 v_{yy} &= 0\end{aligned}$$

Löst man nun noch die partiellen Ableitungen nach  $u$  und  $v$  auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}2I_x(I_x u + I_y v + I_t) - 2\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha^2 u_{yy} &= 0 \\ 2I_y(I_x u + I_y v + I_t) - 2\alpha^2 v_{xx} - 2\alpha^2 v_{yy} &= 0\end{aligned}$$

Durch weiteres Umformen (Division durch 2, Ausmultiplizieren und Umstellen) gelangt man zu:

$$\begin{aligned}I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha^2 u_{xx} + \alpha^2 u_{yy} - I_x I_t \\ I_y I_x u + I_y^2 v &= \alpha^2 v_{xx} + \alpha^2 v_{yy} - I_y I_t\end{aligned}$$

Da sich in beiden Formeln der Laplace-Operator verbirgt, wird dieser nun eingeführt:  $\nabla^2 s := s_{xx} + s_{yy}$ . Damit ergeben sich:

$$\begin{aligned}I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha^2 \nabla^2 u - I_x I_t \\ I_y I_x u + I_y^2 v &= \alpha^2 \nabla^2 v - I_y I_t\end{aligned}$$

## 2.2 Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen

Zur Lösung der Gleichungen schlagen Horn & Schunck ein iteratives Gauß-Seidel Verfahren vor. Dieser Vorschlag ist nicht unbegründet, er resultiert vielmehr durch die Tatsache, dass wir mit obiger Gleichung einen Laplace Operator erhalten. Dieser Operator kann näherungsweise angegeben werden durch  $\nabla^2 s = \bar{s} - s$ :

$$\begin{aligned}I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha^2 (\bar{u} - u) - I_x I_t \\ I_y I_x u + I_y^2 v &= \alpha^2 (\bar{v} - v) - I_y I_t\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umstellen erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_x^2 u + I_x I_y v + \alpha^2 u &= \alpha^2 \bar{u} - I_x I_t \\ I_y I_x u + I_y^2 v + \alpha^2 v &= \alpha^2 \bar{v} - I_y I_t \end{aligned}$$

Um zu einer Koeffizientenmatrix von  $u$  und  $v$  zu gelangen, klammern wir diese aus:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + I_x^2)u + I_x I_y v &= \alpha^2 \bar{u} - I_x I_t \\ I_y I_x u + (\alpha^2 + I_y^2)v &= \alpha^2 \bar{v} - I_y I_t \end{aligned}$$

Für die Gauß-Seidel Iterationen bestimmen wir ferner die Determinante der erzeugten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} (\alpha^2 + I_x^2) & I_x I_y \\ I_y I_x & (\alpha^2 + I_y^2) \end{pmatrix} \\ \det(A) &= \alpha^2(\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2) \end{aligned}$$

Und setzen diese ein:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)u &= (\alpha^2 + I_x^2)\bar{u} - I_x I_y \bar{v} - I_x I_t \\ (\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2)v &= I_x I_y \bar{u} - (\alpha^2 + I_y^2)\bar{v} - I_y I_t \end{aligned}$$

Um zu den Gauß-Seidel Iterationen zu gelangen muss nun noch nach  $u$  bzw.  $v$  umgeformt und mit  $I_x u$  bzw.  $I_y v$  erweitert werden:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \bar{u}^n - I_x \frac{I_x \bar{u}^n + I_y \bar{v}^n + I_t}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2} \\ v^{n+1} &= \bar{v}^n - I_y \frac{I_x \bar{u}^n + I_y \bar{v}^n + I_t}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2} \end{aligned}$$

## Literatur

Courant, R. and D. Hilbert (1953). *Methods of Mathematical Physics*, Volume 1. Interscience Publishers, New York.

Horn, B. K. P. and B. G. Schunck (1981). Determining Optical Flow. *Artificial Intelligence* (17).

Wikipedia (2010). Euler-Lagrange equation – Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Online; accessed 4-June-2010].