Universität Hamburg

Department
Informatik
Arbeitsbereich
Kognitive Systeme (KOGS)

64-350 Multidimensionale und Multimodale Signale

Gliederung:

Teil VI: n-dim. Fouriertransformation, Faltung und Korrelation

Quellen: P. Stelldinger, H.S. Stiehl: VL Systemtheorie, WiSe 07/08, Univ. Hamburg
H. Neumann, VL Computer Vision I, SoSe 07, Univ. Ulm

2-D Fouriertransformation, Faltung und Korrelation

2-D Fouriertransformation

<u>geg.:</u> 2D-Signalfunktion (Ortsbereich) $f(x, y)$

Es gelten die Transformationspaare:

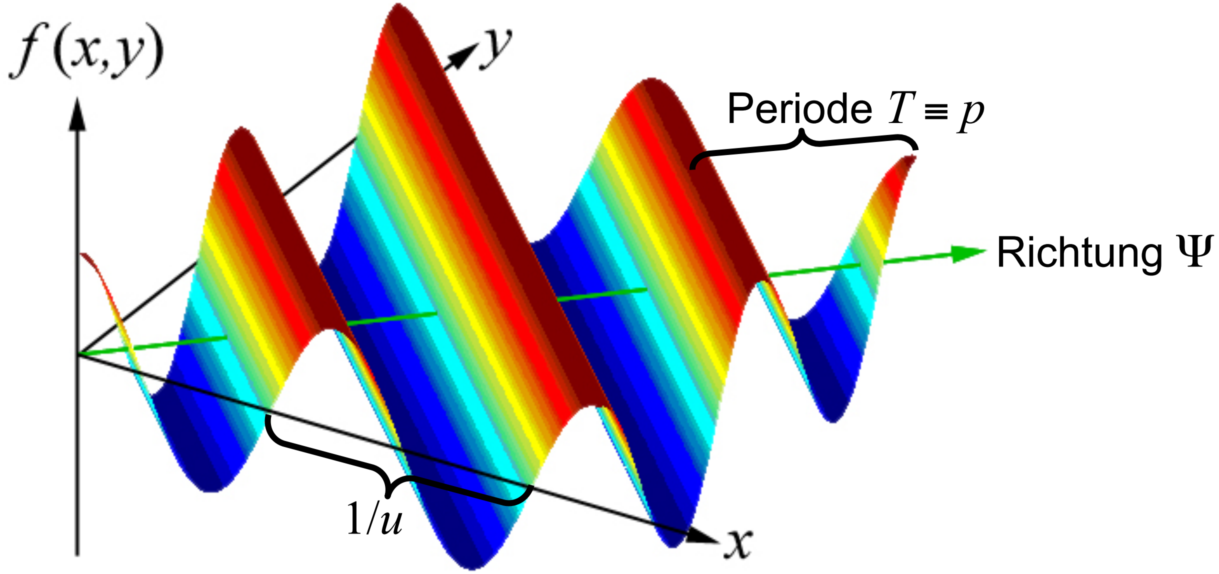
$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi ux}e^{-j2\pi vy}dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dx\,dy$$

bzw. $$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\left[\cos 2\pi\left(ux+vy\right) - j\sin 2\pi\left(ux+vy\right)\right]dx\,dy$$

sowie $$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}du\,dv$$

Interpretation von $\cos[2\pi(ux+vy)]$ (nach R.N. BRACEWELL, 1986)

- rein reelle 2-dimensionale cosinusoidale Wellenfront



- u,v: räumliche Frequenzen bzw. Ortsfrequenzen ("*spatial frequencies*") längs Schnitten durch $\cos(\bullet)$ in x- bzw. y-Richtung
- Frequenz der 2-D Wellenfront in Richtung Ψ : $f = \frac{1}{T}$ mit $T = \sqrt{u^2 + v^2}^{-1}$
- Richtung der 2-D Wellenfront $\Psi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$ (hier $\Psi = 45°$, da $u = v$)
- Phase Φ (hier $\Phi = 0$ wegen Nullphasenlage)

(Hinweis: aus Rotation eines kartesischen Koordinatensystems um ϑ folgt für eine rotierte 2-D cosinusoidale Wellenfront $\cos[2\pi(ux\cos\vartheta + vy\cos\vartheta)]$.)

Parameter von $F(u,v)$

- Amplitudenbetrags-/Magnitudenspektrum

$$\left|F(u,v)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left\{F(u,v)\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{F(u,v)\right\}^2}$$

- Leistungsspektrum $|F(u,v)|^2$

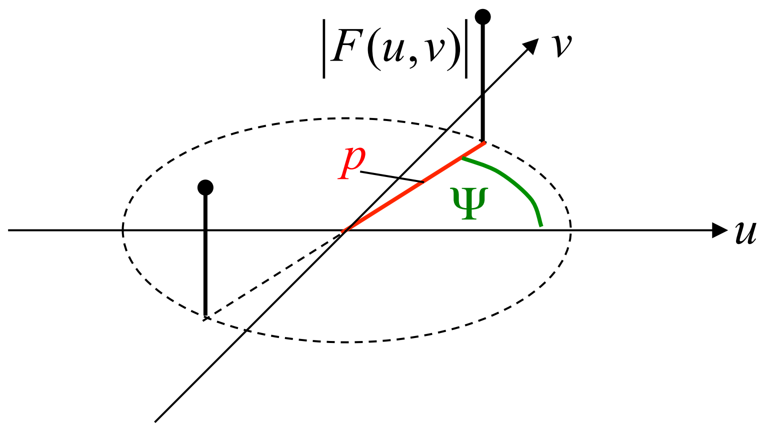
- Phasenspektrum $\Phi = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right]$

- Frequenz $f = \frac{1}{p}$ mit $p = \sqrt{u^2 + v^2}^{-1}$

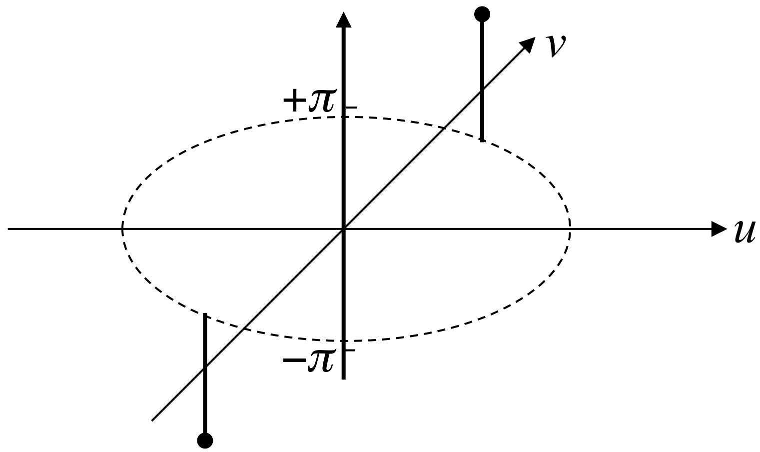
- Richtung $\Psi(u,v) = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$

Hinweis: Vgl. Parameter der komplexen Fourier-Reihenentwicklung (bei der wegen des eindimensionalen Falls keine Richtung Ψ auftritt).

Darstellung von $F(u,v)$ (übliche Repräsentation der Parameter)



Magnitude, Frequenz (p) und Richtung
(Magnitudenspektrum)



Phase und Frequenz
(Phasenspektrum)

Für **<u>separierbare</u>** <u>Ortsfunktionen</u> $f(x,y)$ bzw. <u>Frequenzspektren</u> $F(u,v)$ können die Integrale zerlegt werden.

Man erhält für $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_x(x) \cdot e^{-j2\pi ux} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) \cdot e^{-j2\pi vy} dy \right) dx$$

bzw. für $F(u,v) = F_u(u) \cdot F_v(v)$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_u(u) \cdot e^{j2\pi ux} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_v(v) \cdot e^{j2\pi vy} dv \right) du$$

2-D Konvolution (Faltung) und 2-D Korrelation

geg.: zwei 2-D Signalfunktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$

Das Faltungsprodukt bzw. das Faltungsintegral ist definiert als

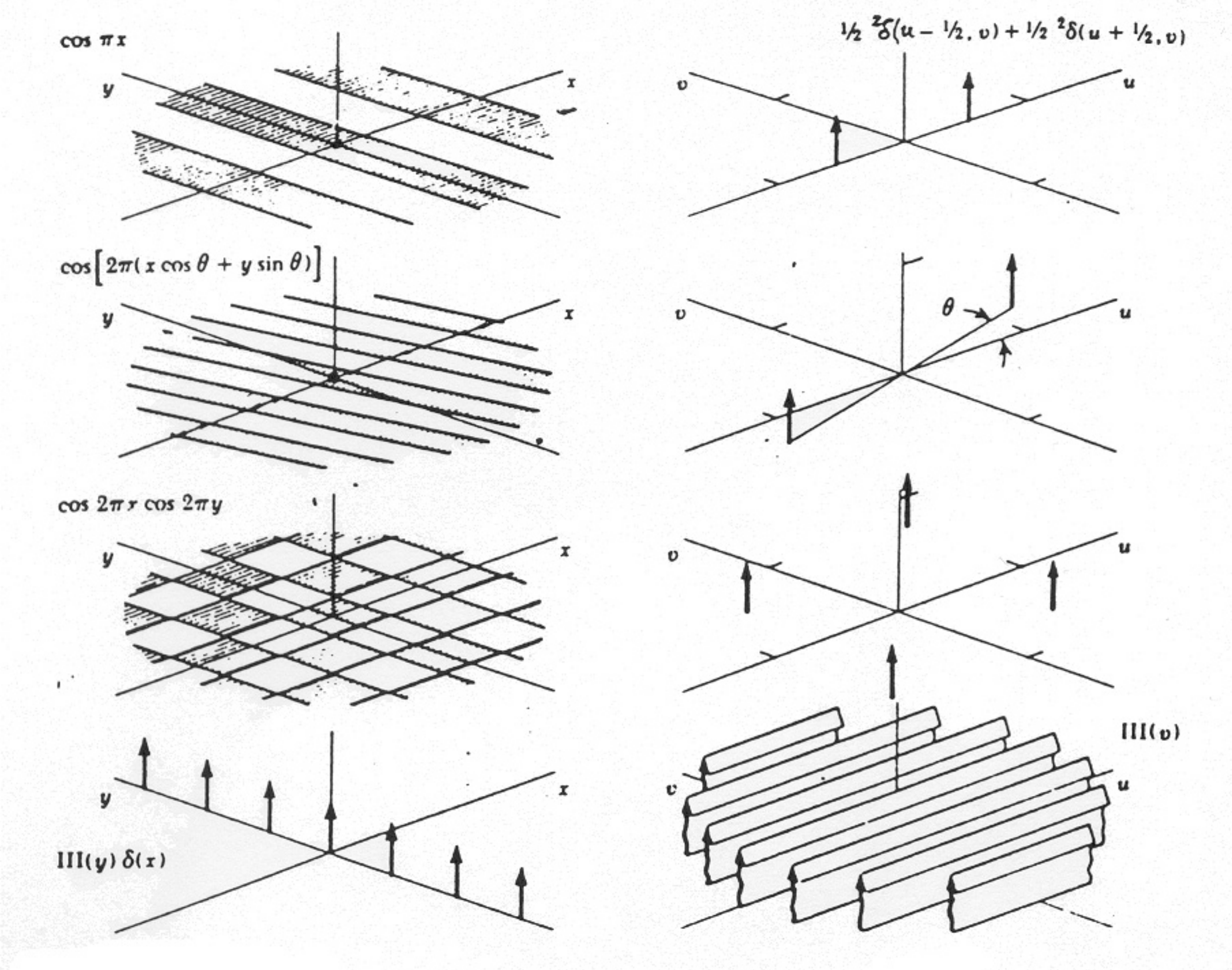
$$f**g \equiv f*g = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\cdot g(x-\alpha, y-\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

Das entsprechende Korrelationsprodukt bzw. die Korrelationsfunktion lautet:

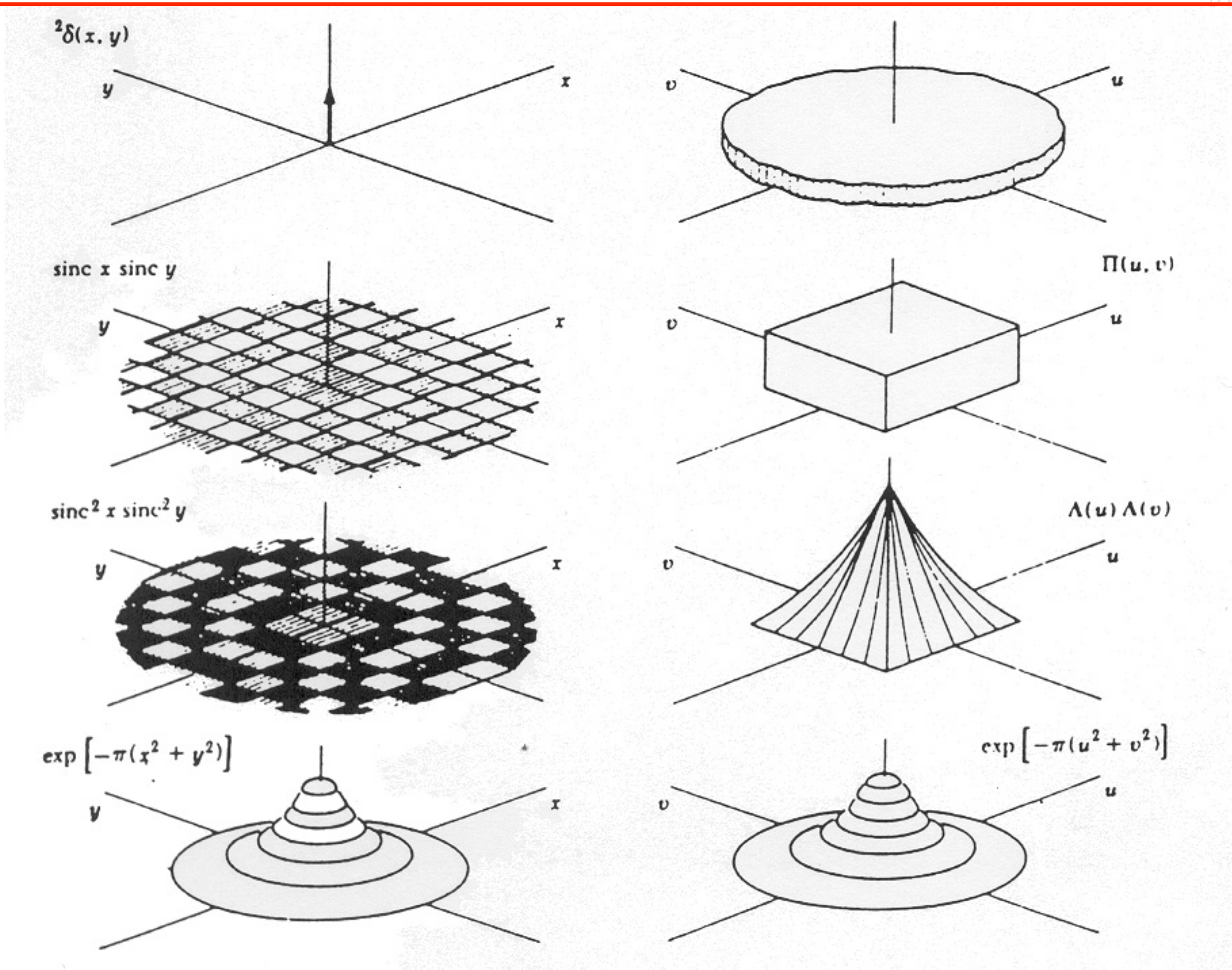
$$f\circ\circ g \equiv f\circ g = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\cdot g(x+\alpha, y+\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

Hinweis: Die Fouriertransformation, Faltung und Korrelation sind in trivialer Weise für Signalfunktionen mit mehr als zwei Variablen, also z.B. $f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ verallgemeinerbar.

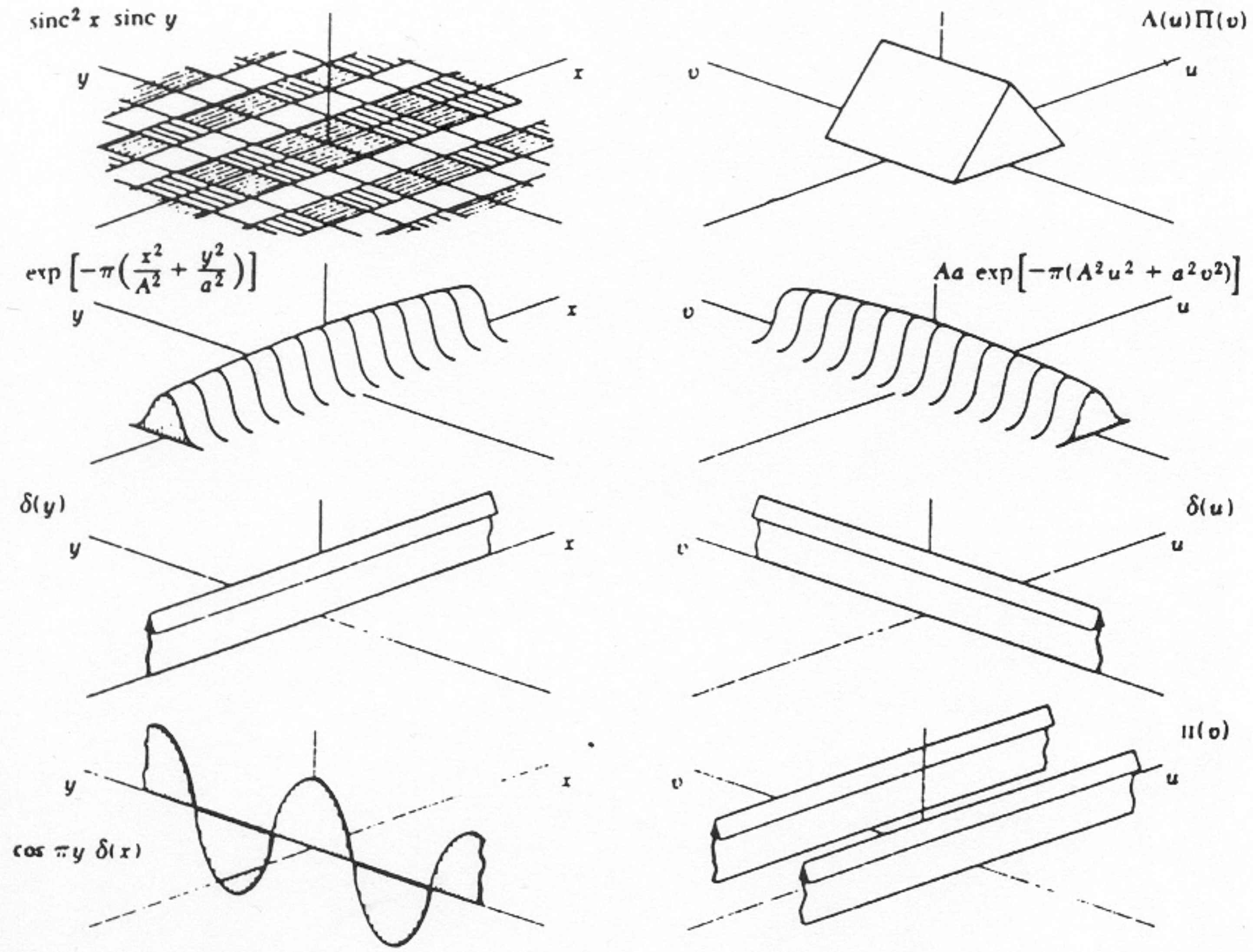
Die Diskretisierung der Fouriertransformation, Faltung und Korrelation ist ebenso trivial.



cos πx
y
x
1/2 ²δ(u − 1/2, v) + 1/2 ²δ(u + 1/2, v)
v
u
cos[2π(x cos θ + y sin θ)]
y
x
θ
v
u
cos 2πx cos 2πy
y
x
v
u
III(y) δ(x)
y
x
III(v)
v
u



${}^2\delta(x, y)$
y
x
v
u
sinc x sinc y
$\Pi(u, v)$
$\text{sinc}^2 x \; \text{sinc}^2 y$
$\Lambda(u)\Lambda(v)$
$\exp\left[-\pi(x^2 + y^2)\right]$
$\exp\left[-\pi(u^2 + v^2)\right]$



(aus R.N. BRACEWELL, 1978)

2D Transformations-Paar

Kontinuierliches Transformations-Paar

geg. : 2D Signalfunktion (Ortsbereich) f(x, y)

→ entsprechend der 1D Fourier-Transformation gelten die Transformationspaare (hier : balancierte Notation durch Aufteilung der Skalierungsfaktoren !):

- **Transformation vom Orts- in den Frequenzraum**

$$F(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot \exp\left[-\mathbf{j}\overbrace{2\pi u}^{\omega_x}x\right]\cdot \exp\left[-\mathbf{j}\overbrace{2\pi v}^{\omega_y}y\right]dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot \exp\left[-\mathbf{j}\overbrace{(\omega_x x + \omega_y y)}^{\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{x}}}\right]dxdy$$

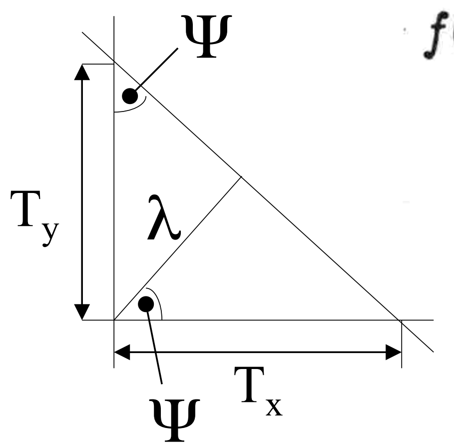
mit $u = f_x$, $v = f_y$;
$\omega_x = 2\pi / T_x = 2\pi\cdot u$, $\omega_y = 2\pi / T_y = 2\pi\cdot v$

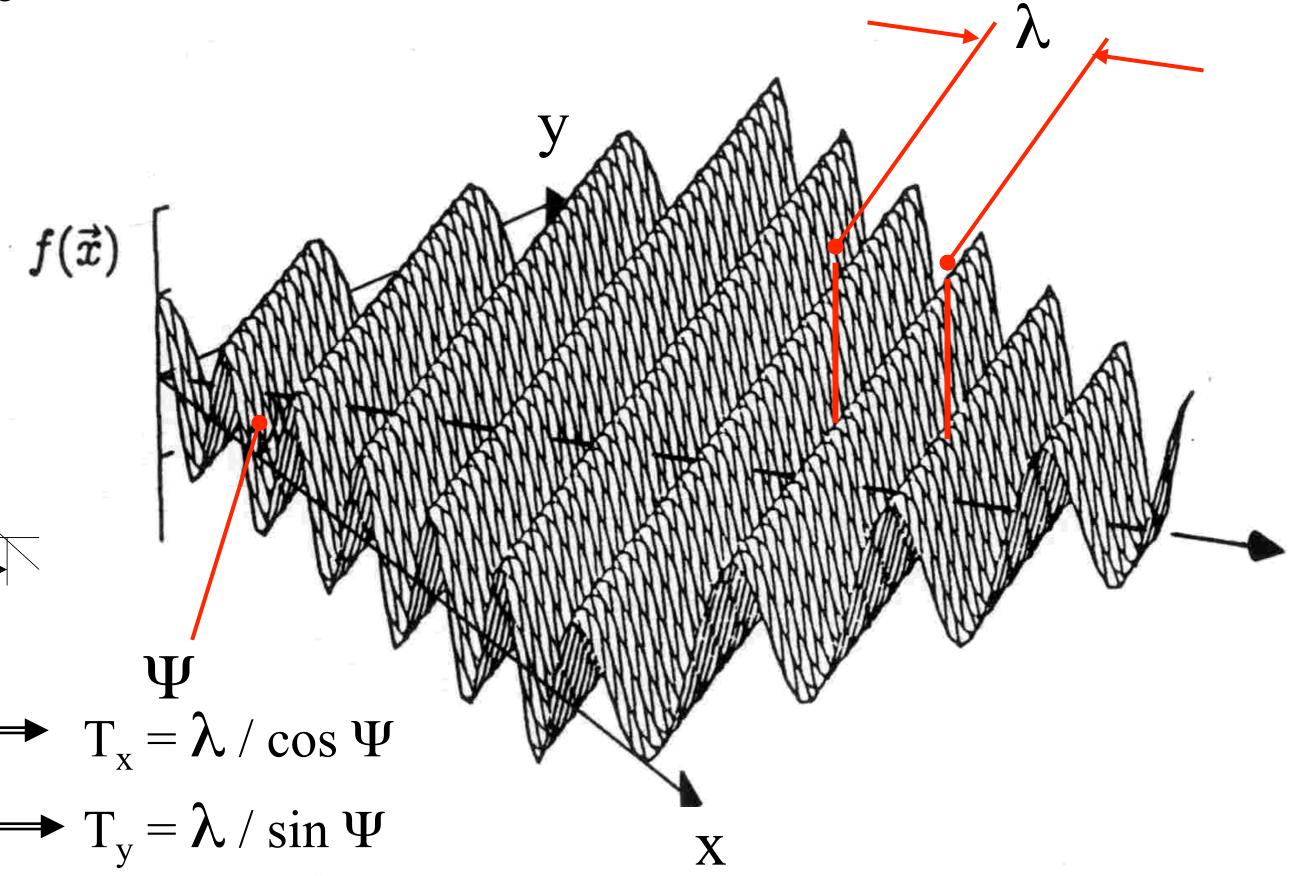
➡ $\boxed{F(\vec{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\mathbf{x}})\cdot \exp\left[-\mathbf{j}\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{x}}\right]d\vec{\mathbf{x}}}$ mit $\vec{\mathbf{k}}$: Wellenvektor, $|\vec{\mathbf{k}}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

- **Inverse Transformation**

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\cdot\exp[\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]dudv$$

2D Cosinus-Welle



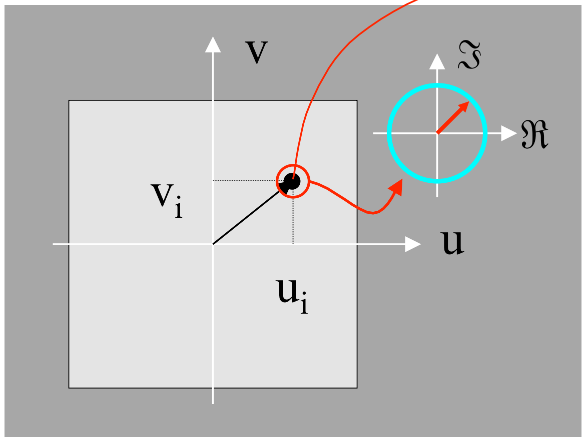


$$\lambda = T_x \cos\Psi \Longrightarrow T_x = \lambda / \cos\Psi$$

$$\lambda = T_y \underbrace{\cos(90-\Psi)}_{\sin\Psi} \Longrightarrow T_y = \lambda / \sin\Psi$$

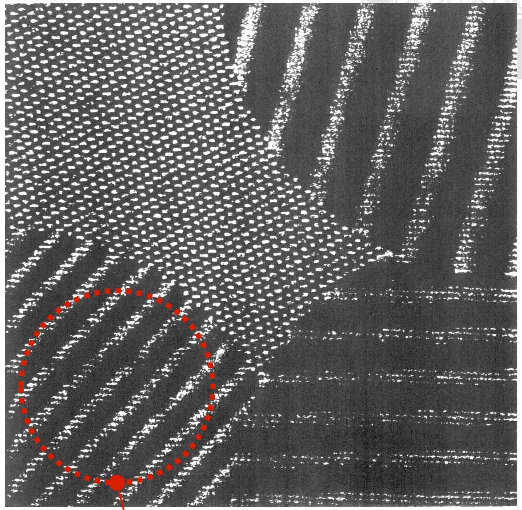
Interpretation der Fourier-Transformation zur Charakterisierung eines Systems (Filter)

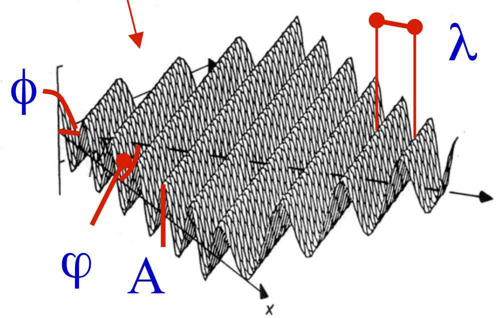
Frequenzdarstellung



F(u, v) repräsentiert eine Schwingung mittels **4 Parametern** eindeutig !

- Frequenz
- Amplitude
- Phase
- Richtung





Fourier-Transformation – Projektion / Skalarprodukt

$$F(\omega_x, \omega_y) = k \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \exp\left(-\mathbf{j}(\omega_x x + \omega_y y)\right) dx\,dy$$

$$F(\vec{\boldsymbol{\omega}}) = k \left\langle f(\vec{\mathbf{x}}), \left[\cos(\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{x}}), -\mathbf{j}\sin(\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\right]^T \right\rangle$$

Diskrete Fourier-Transformation für abgetastete Signale

- **Transformation vom Orts- in den Frequenzraum**

geg. : Matrix mit N x M Bildpunkten (Spezialfall: M = N für quadratische Bilder)

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]$$

für u = 0, 1, ..., M-1 und v = 0, 1, ..., N-1

Abtastabstände : $\Delta u = 1 / (M \cdot \Delta x)$ und $\Delta v = 1 / (N \cdot \Delta y)$

- **Rücktransformation (N x M Bildpunkte)**

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot \exp\left[\mathbf{j}2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]$$

für x = 0, 1, ..., M-1 und y = 0, 1, ..., N-1

Algorithmus der Standard Fourier-Transformation

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]$$

```
procedure DFT(real Image[]) :  complex Result[]
  [M, N]    :=  size(Image[])
  result[] :=  complex(0.0, 0.0)
  scale     :=  1.0 / sqrt(M * N)

  for u from 0 to M-1
    for v from 0 to N-1
      waveX :=  2.0 * PI * u / M
      waveY :=  2.0 * PI * v / N
      Re     :=  Im   :=  0.0
      for x from 0 to M-1
        for y from 0 to N-1  /* image is real-valued */
          Re  :=  Re + Image[x,y] * cos(waveX * x + waveY * y)
          Im  :=  Im + Image[x,y] * (-sin(waveX * x + waveY * y))
        end for
      end for
      result[u,v] :=  scale * complex(Re, Im)
    end for
  end for

  return result[]
end DFT
```

Für jede Frequenz (u,v) berechne das Produkt des Bildes und der komplexen Wellenfunktion

Skalierung der Werte der Transformation

Separierung der 2D-Transformation in Kaskade von 1D-Transformationen

- Zerlegung der Fourier-Transformation

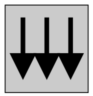
$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]$$

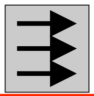
$$= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \underbrace{\left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi \frac{vy}{N}\right]\right]}_{\text{hängt für ein geg. x nur von y ab (für ein festes u, v)}} \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi \frac{ux}{M}\right]$$

<u>Hinweis</u>: Die Klammerung kann auch umgedreht werden, so dass zunächst über x summiert und danach das Ergebnis über y berechnet wird !

- Spalten-/zeilenweise DFT

Fragestellung: $\boxed{DFT^{(x)}\left(DFT^{(y)}(image)\right) \stackrel{?}{=} DFT^{2D}(image)}$

mit $buffer := DFT^{(y)}(image)$ 

$result := DFT^{(x)}(buffer)$ 

im Detail …

1. Spaltentransformation

$$buffer[\underbrace{x}_{\text{Ort}},\underbrace{v}_{\text{Frequenz}}] = \sum_y image[x,y] \cdot \exp\left(-\mathbf{j}2\pi \frac{v}{N} y\right)$$

2. Zeilentransformation

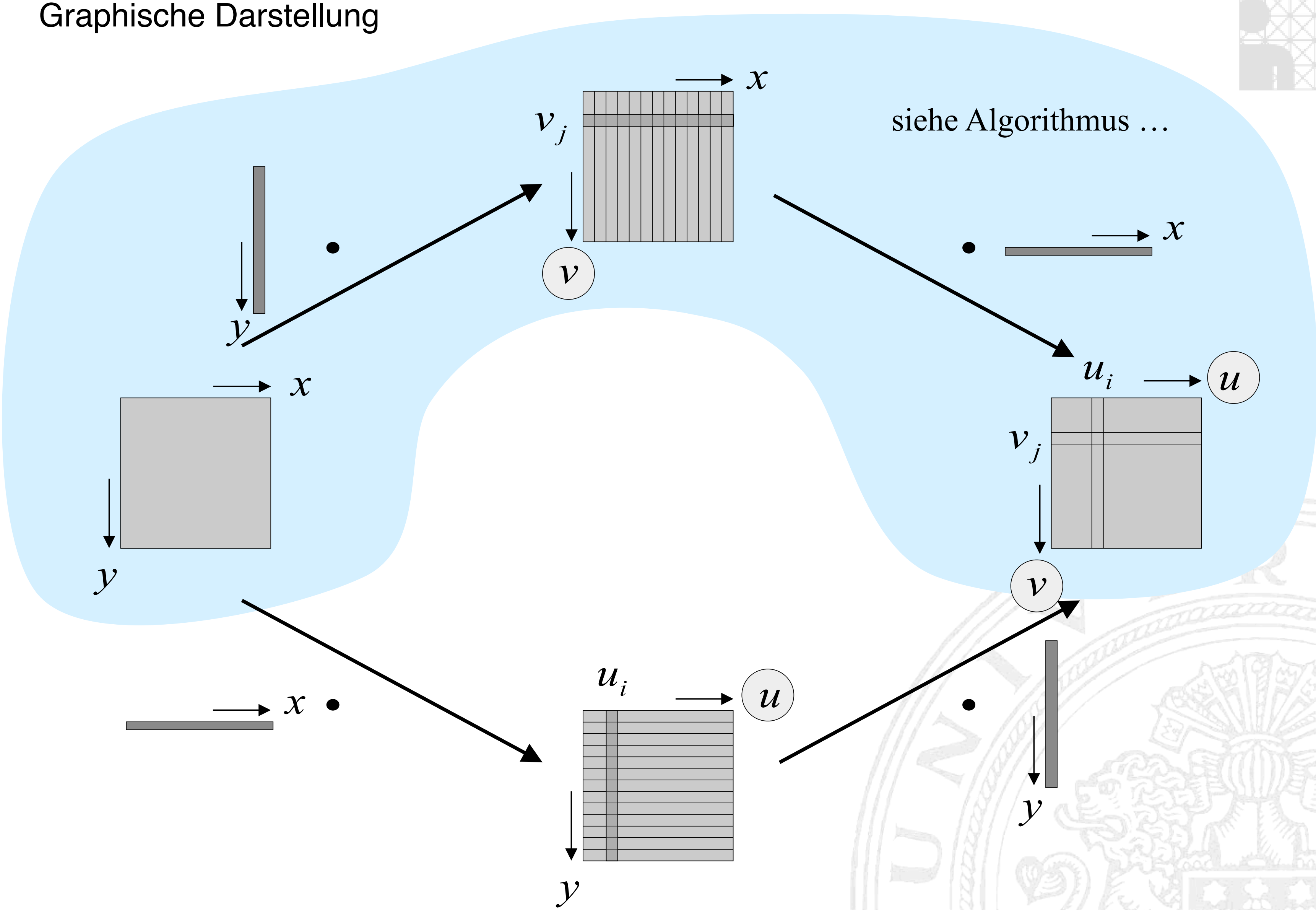
$$result[\underbrace{u,v}_{\text{Frequenz}}] = \sum_x buffer[x,v] \cdot \exp\left(-\mathbf{j}2\pi \frac{u}{M} x\right)$$

$$= \sum_x \left(\sum_y image[x,y] \cdot \exp\left(-\mathbf{j}2\pi \frac{v}{N} y\right)\right) \cdot \exp\left(-\mathbf{j}2\pi \frac{u}{M} x\right)$$

$$= \sum_x \sum_y image[x,y] \cdot \exp\left(-\mathbf{j}2\pi \left(\frac{u}{M} x + \frac{v}{N} y\right)\right)$$

$$= DFT^{2D}(image) \ \blacksquare$$

- Graphische Darstellung



Algorithmus der Spalten-/Zeilen-Transformation

```
procedure DFT2(real image[]) :  complex result[]
  [M, N]    :=  size(image[])
  result[]  :=  complex(0.0, 0.0)
  buffer[]  :=  complex(0.0, 0.0)
  scale     :=  1.0 / sqrt(M * N)
```

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi \frac{vy}{N} \right] \right] \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi \frac{ux}{M} \right]$$

```
  for v from 0 to N-1
    for x from 0 to M-1
      waveY :=  2.0 * PI * v / N
      Re    :=  Im :=  0.0

      for y from 0 to N-1  /* image is real-valued */
        Re :=  Re + image[x,y] * cos(waveY * y)
        Im :=  Im + image[x,y] * (-sin(waveY * y))
      end for
      buffer[x,v] :=  complex(Re, Im)
    end for
  end for
  ...  < Fortsetzung nächste Seite >
```

Berechne spaltenweise (über alle x) das Produkt des Bildes mit einer komplexen Welle (cos/sin-Funktion) in den Spalten y

Innere Summe (über y) von Produkten …

Berechnung für alle Frequenzen v …

Algorithmus der Spalten-/Zeilen-Transformation (cont ‘d)

. . .

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\exp\left[-\mathbf{j}2\pi\frac{vy}{N}\right]\right]\cdot\exp\left[-\mathbf{j}2\pi\frac{ux}{M}\right]$$

```
for u from 0 to M-1
  for v from 0 to N-1
    waveX :=  2 * PI * u / M
    Re     :=  Im :=  0.0
    for x from 0 to M-1
      Re :=  Re + real(buffer[x,v]) * cos(waveX * x)  -
                  imag(buffer[x,v]) * (-sin(waveX * x))
      Im :=  Im + real(buffer[x,v]) * (-sin(waveX * x))  +
                  imag(buffer[x,v]) * cos(waveX * x)
    end for
    result[u,v] :=  scale * complex(Re, Im)
  end for
end for

return result[]
end DFT2
```

$$a_1\cdot a_2=(\alpha_1,\beta_1)\cdot(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$$

Aus dem *buffer* mit Werten für die Spalten x – für verschiedene Frequenzen v – berechne das Produkt mit der sin/cos-Funktion für x …

Innere Summe (über x) komplexer Produkte …

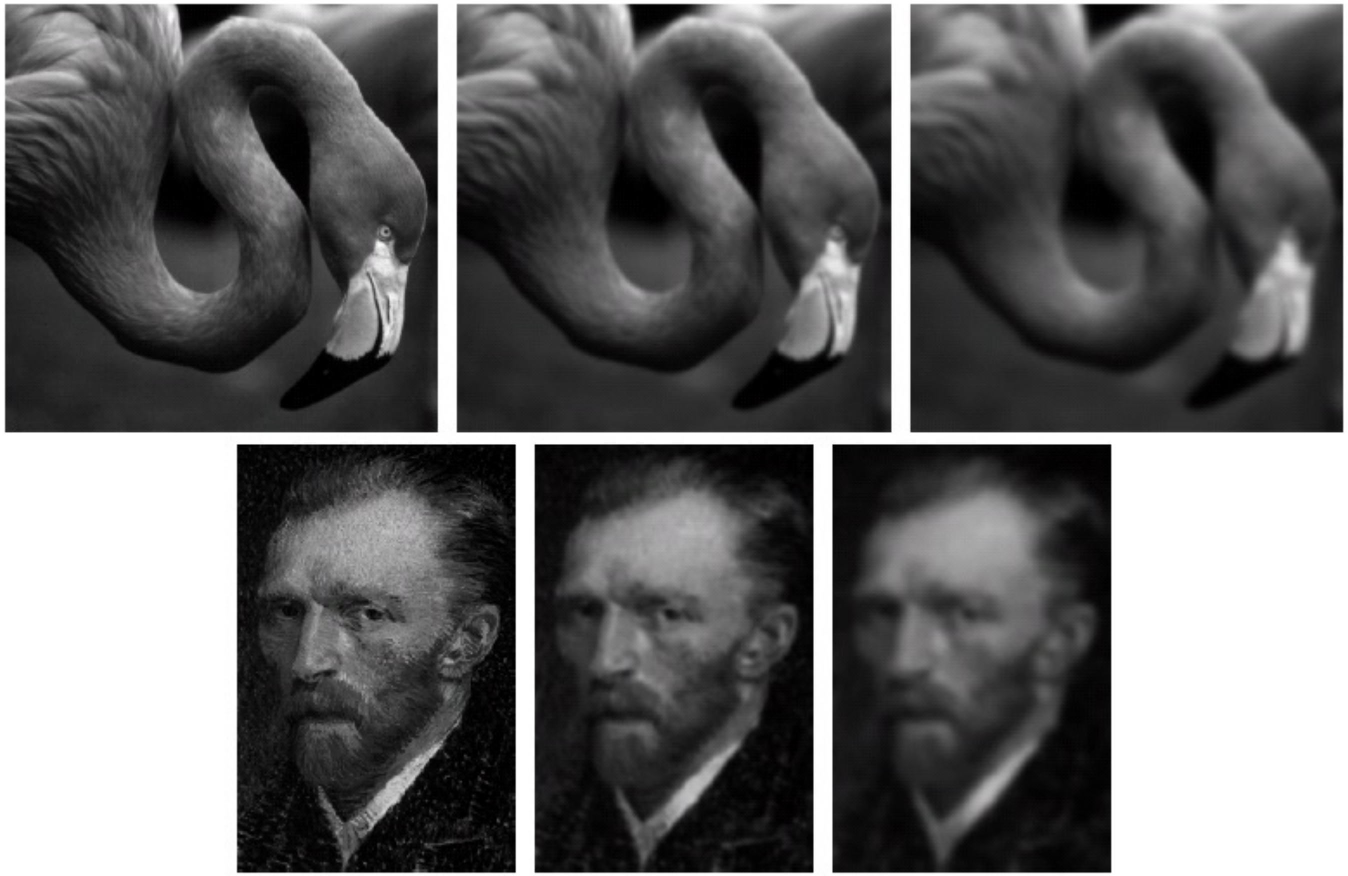
Skalierung der Werte der Transformation

Berechnung für alle Frequenzen u …

Anwendung von Filtern auf Bildern

Glätten (Tiefpass):

Original, filtered with Gaussians with $\sigma = 2, 4$ pixels



Anwendung von Filtern auf Bildern

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Kantendetektion durch Ableitungsfilter:

The next slide shows derivative images in both directions as well as the gradient magnitude.

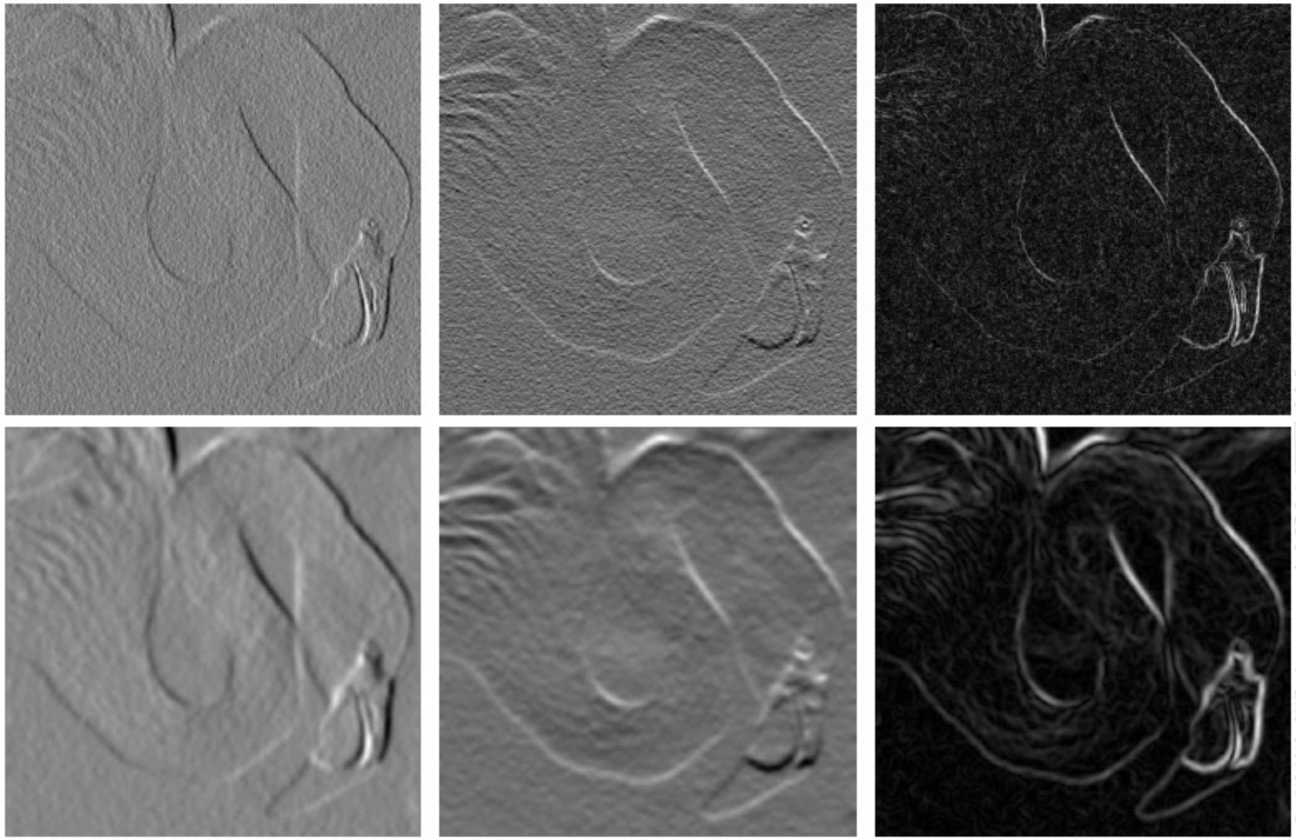
Original with added white Gaussian noise

Anwendung von Filtern auf Bildern

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Kantendetektion durch Ableitungsfilter:

Approximations to $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $((\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2)^{1/2}$



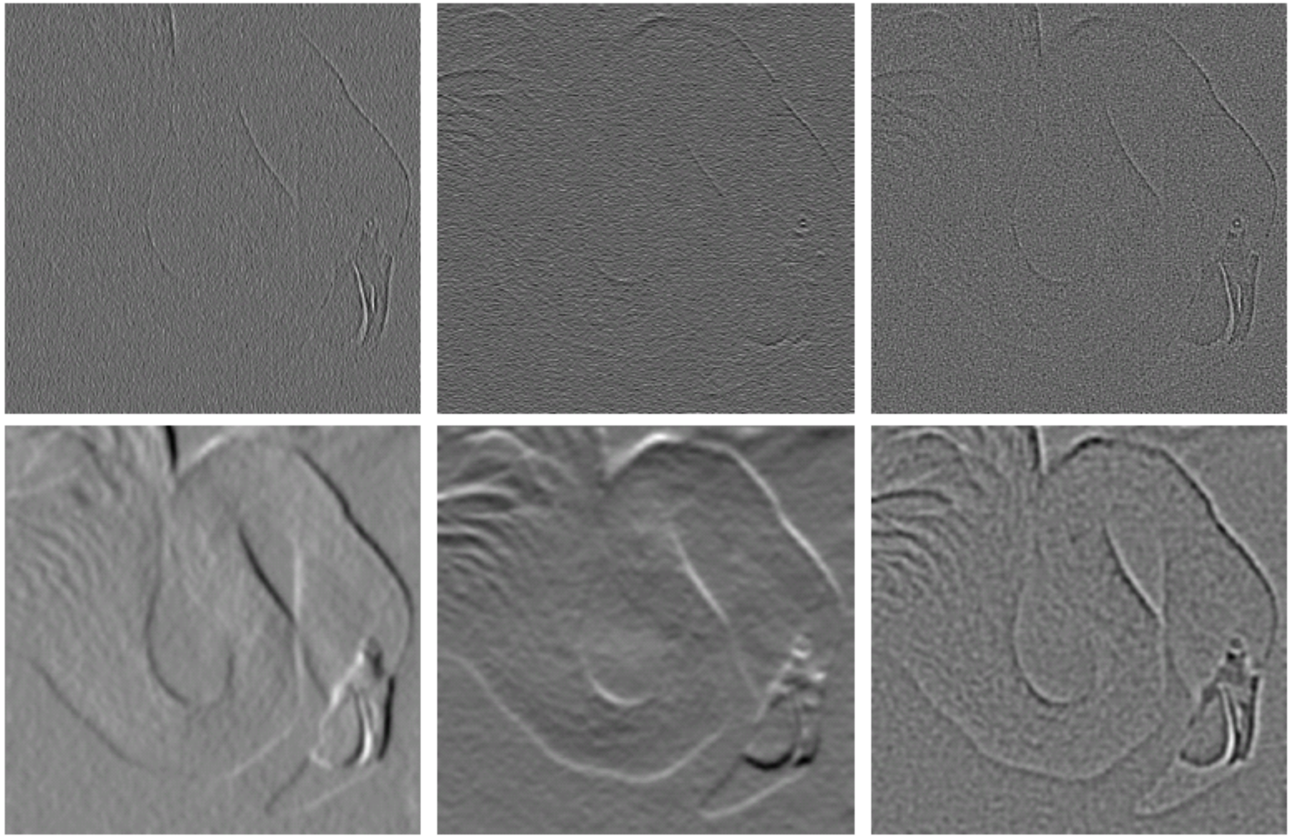
top: $\sigma = 1$, bottom: $\sigma = 3$

Anwendung von Filtern auf Bildern

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Kantendetektion durch Ableitungsfilter:

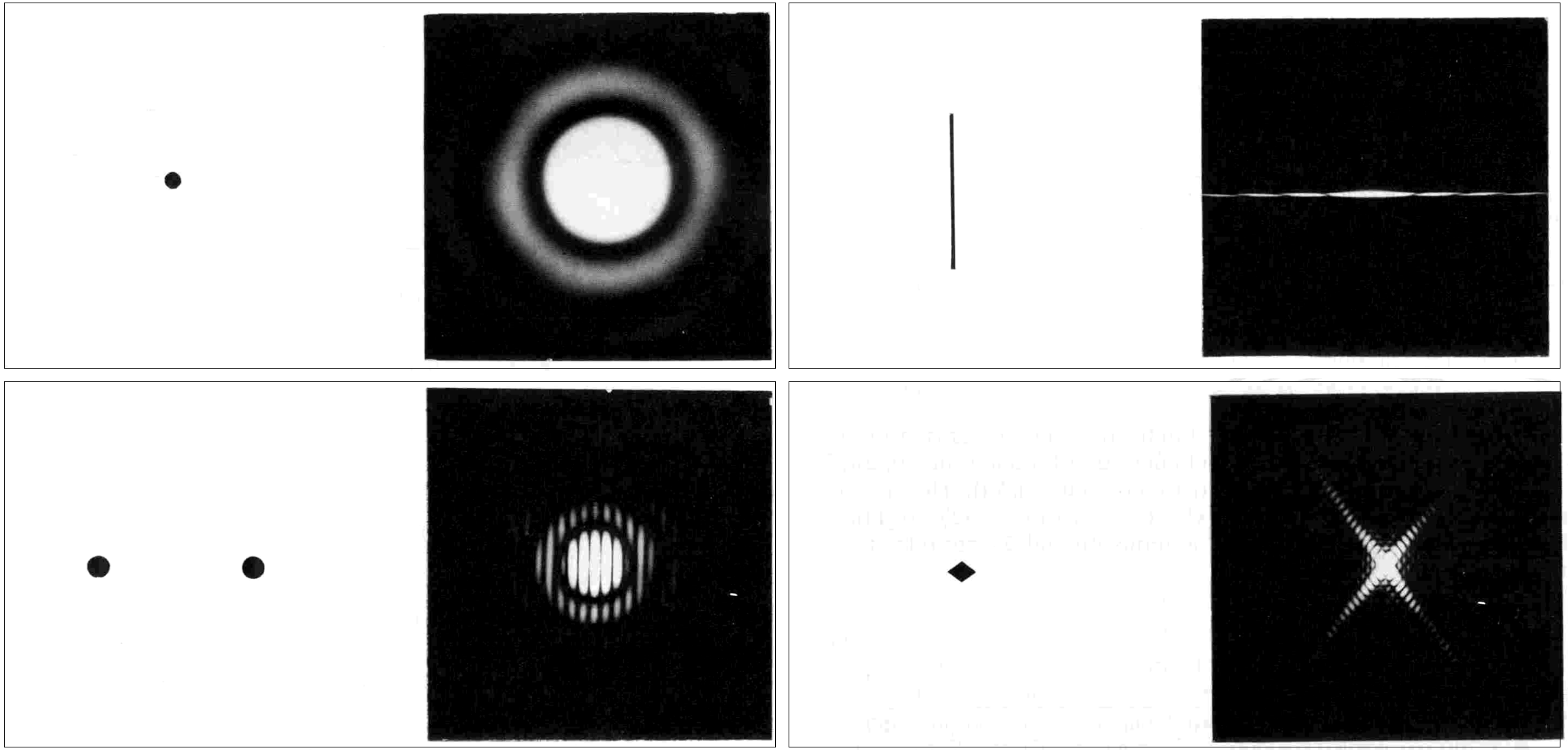
Approximations to $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial y^2$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$



top: $\sigma = 1$, bottom: $\sigma = 3$

Fourier- / Amplituden-Spektrum

Bildbeispiele von Amplitudenspektren verschiedener Eingangsstimuli:



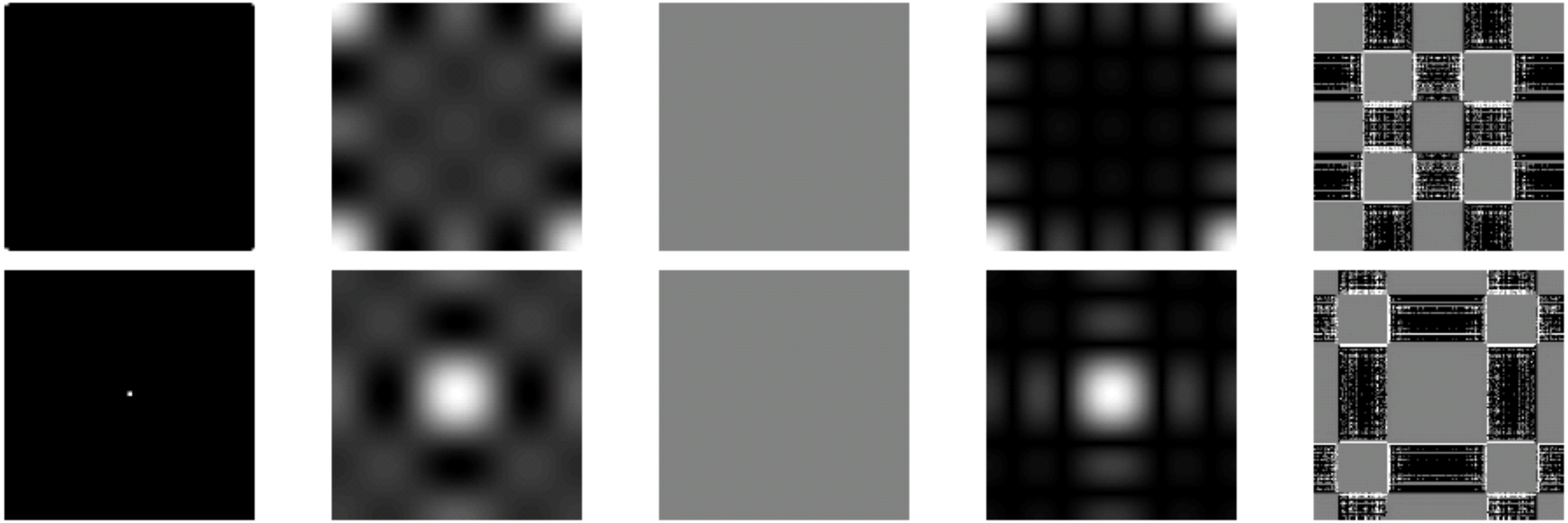
(R.C. Gonzalez, R.E. Woods. Digital image processing. Addison-Wesley, 1993)

Fourier- / Amplituden-Spektrum

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Bildbeispiele von verschiedenen Spektren:

Discrete Fourier transform of (shifted) 2D box functions: the sinc



Top: input to DFT, real and imaginary part, magnitude and phase of DFT

Bottom: same, but shifted

Fourier- / Amplituden-Spektrum

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Bildbeispiele von verschiedenen Spektren:

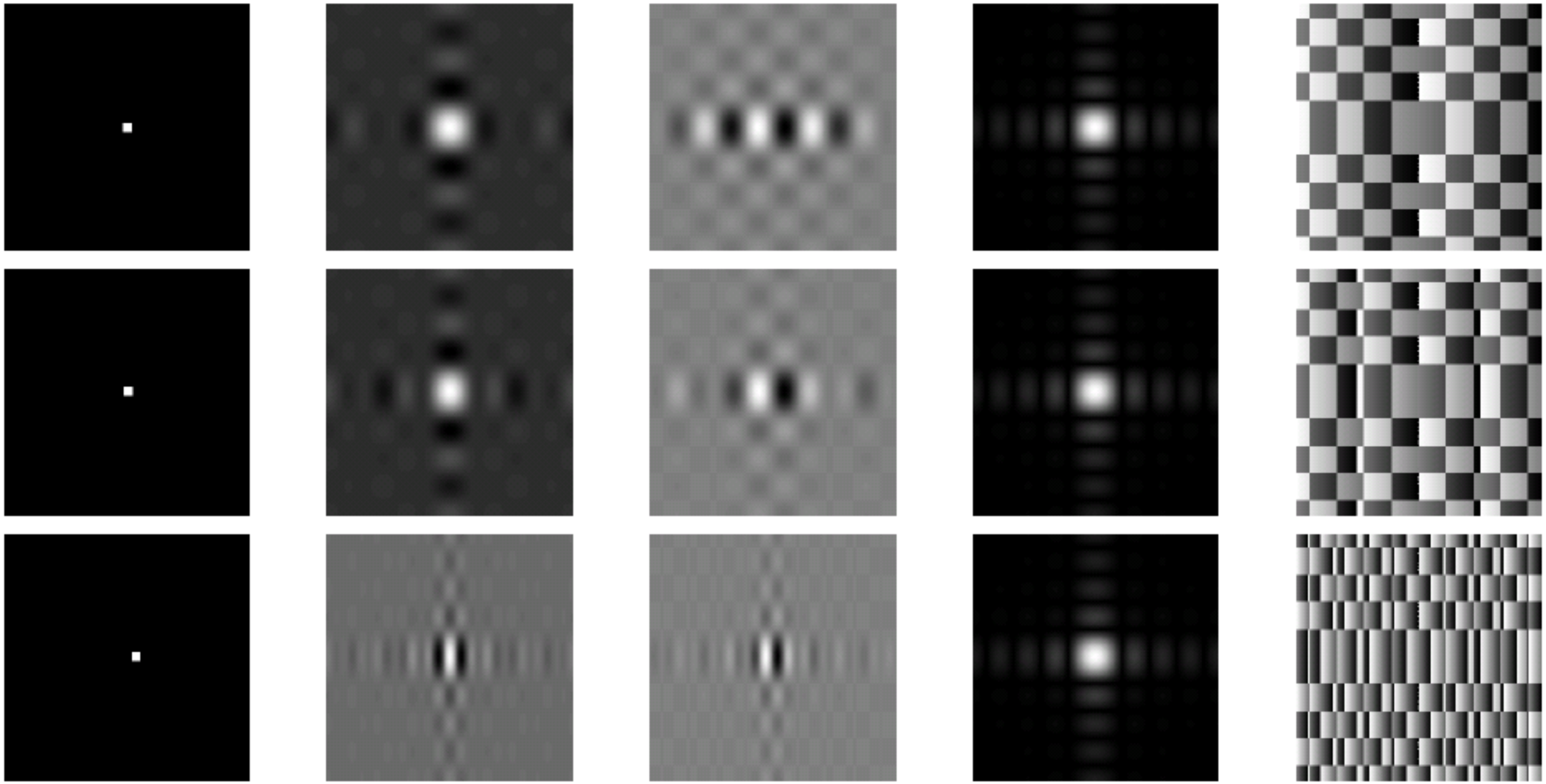
Same, but for two different box sizes: scaling theorem

Fourier- / Amplituden-Spektrum

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Bildbeispiele von verschiedenen Spektren:

Same, but for x-shifts 1, 2, 10: shifting theorem

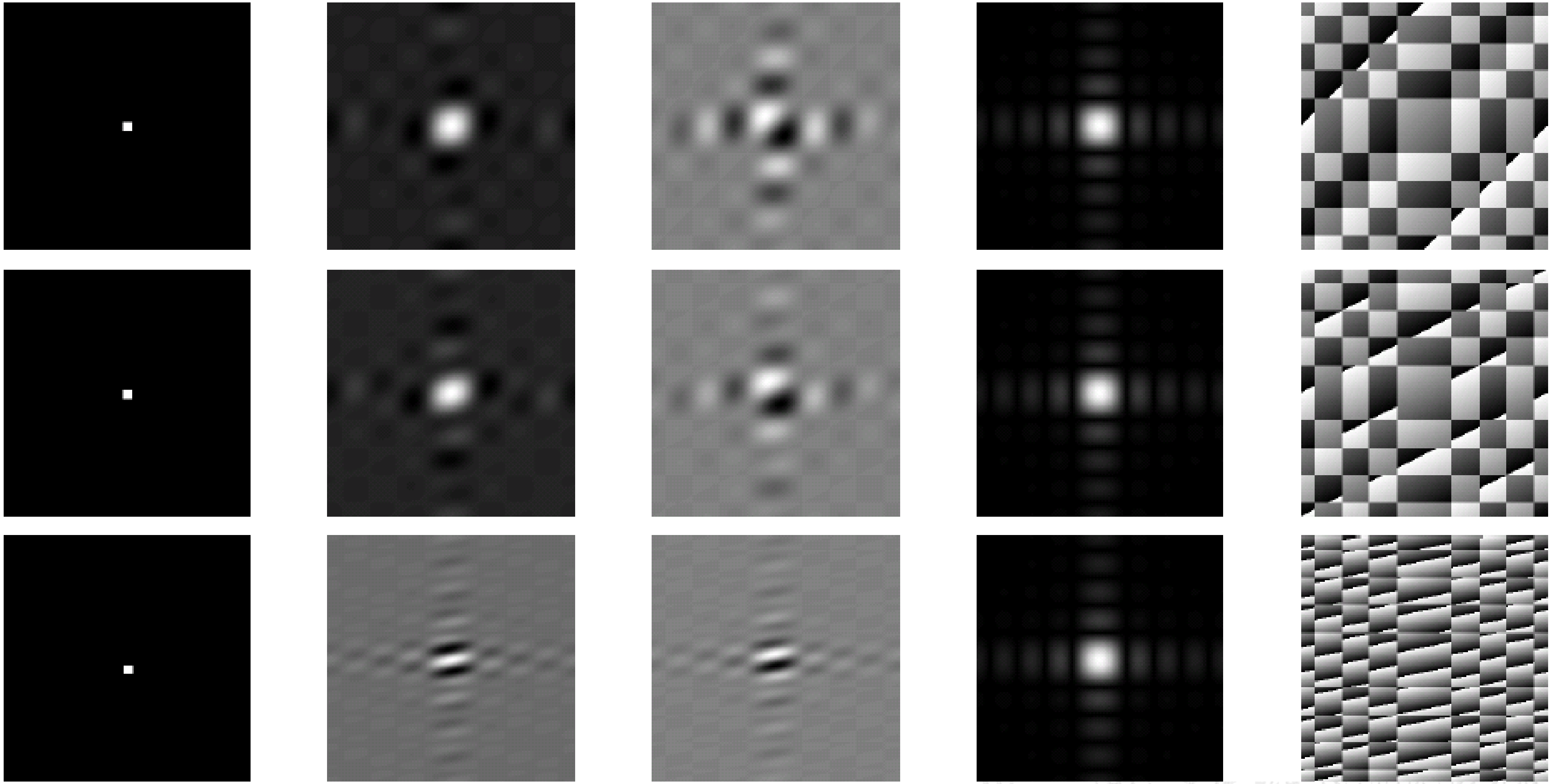


Fourier- / Amplituden-Spektrum

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Bildbeispiele von verschiedenen Spektren:

Same, but for (x,y)-shifts (1,1), (1,2), (2,10)

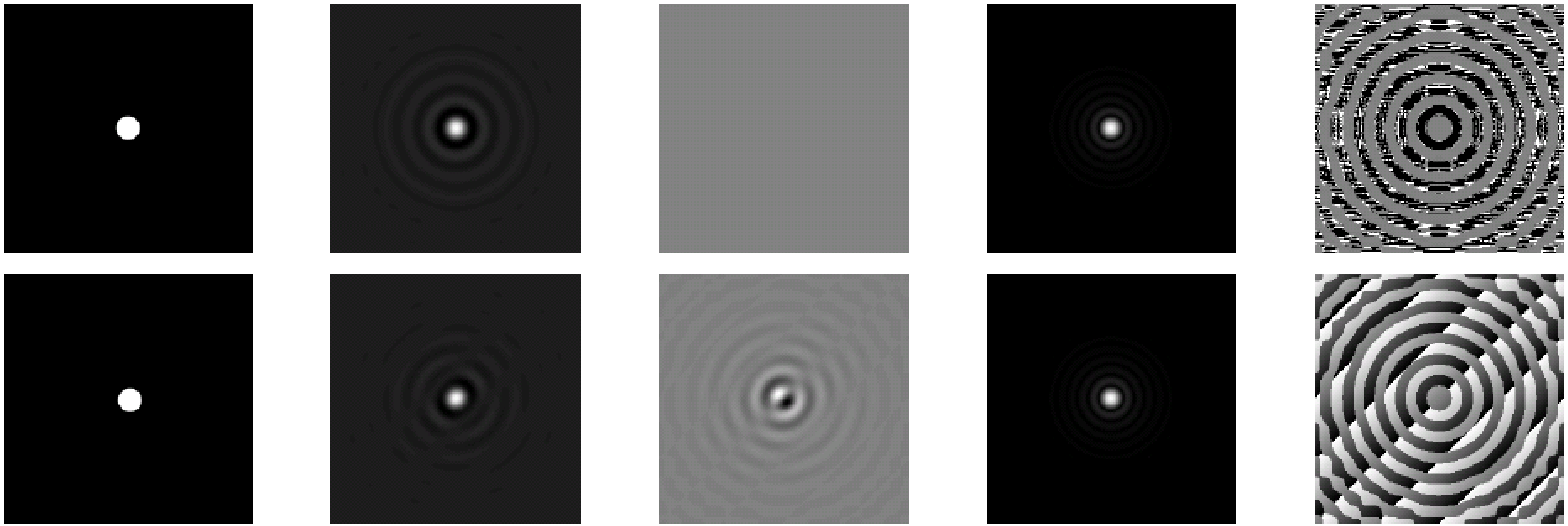


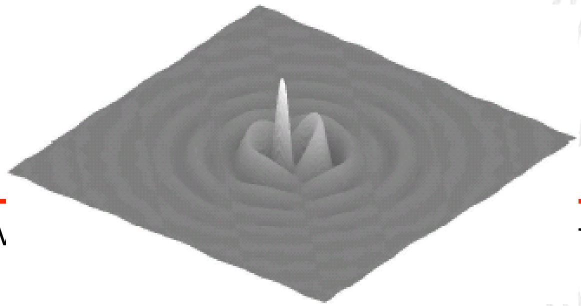
Fourier- / Amplituden-Spektrum

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Bildbeispiele von verschiedenen Spektren:

Disk, and disk shifted to (2,2): Hankel transform; its basis functions are Bessel functions





Mittelwert

Diskrete Fourier-Transformation

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y) \cdot \exp\left[-\mathbf{j}2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right]$$

Mittelwert einer 2D Bildfunktion

$$\bar{I} \equiv m_I = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)$$

Gleichanteil (u, v) = (0, 0) :

$$F(0,0) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F(0,0) = \sqrt{MN} \cdot m_I}$$

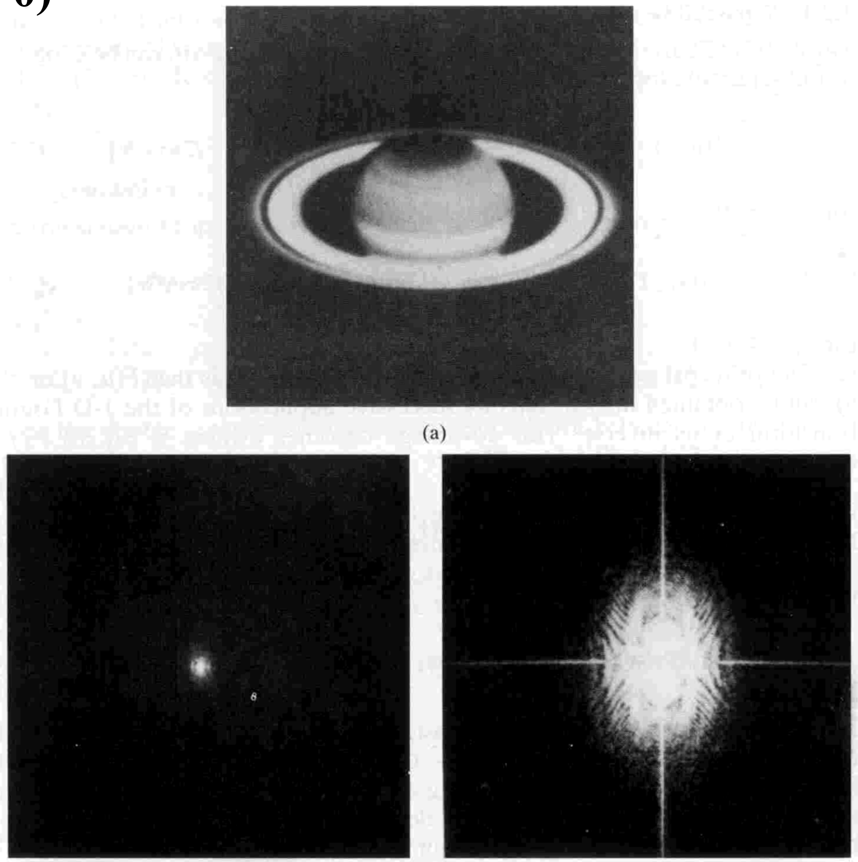
(für die balancierte Notation von Hin- und Rücktransformation !)

Visualisierung von Fourier- (Amplituden-) Spektren

→ Häufig hoher Dynamikbereich in Fourier- (Amplituden-) Spektren durch Dominanz des Gleichanteils, **(u, v) = (0, 0)**

„Trick“ für Visualisierung :

$$D(u,v) = c \cdot \log\left[1 + \left|F(u,v)\right|\right]$$



(b) (c)

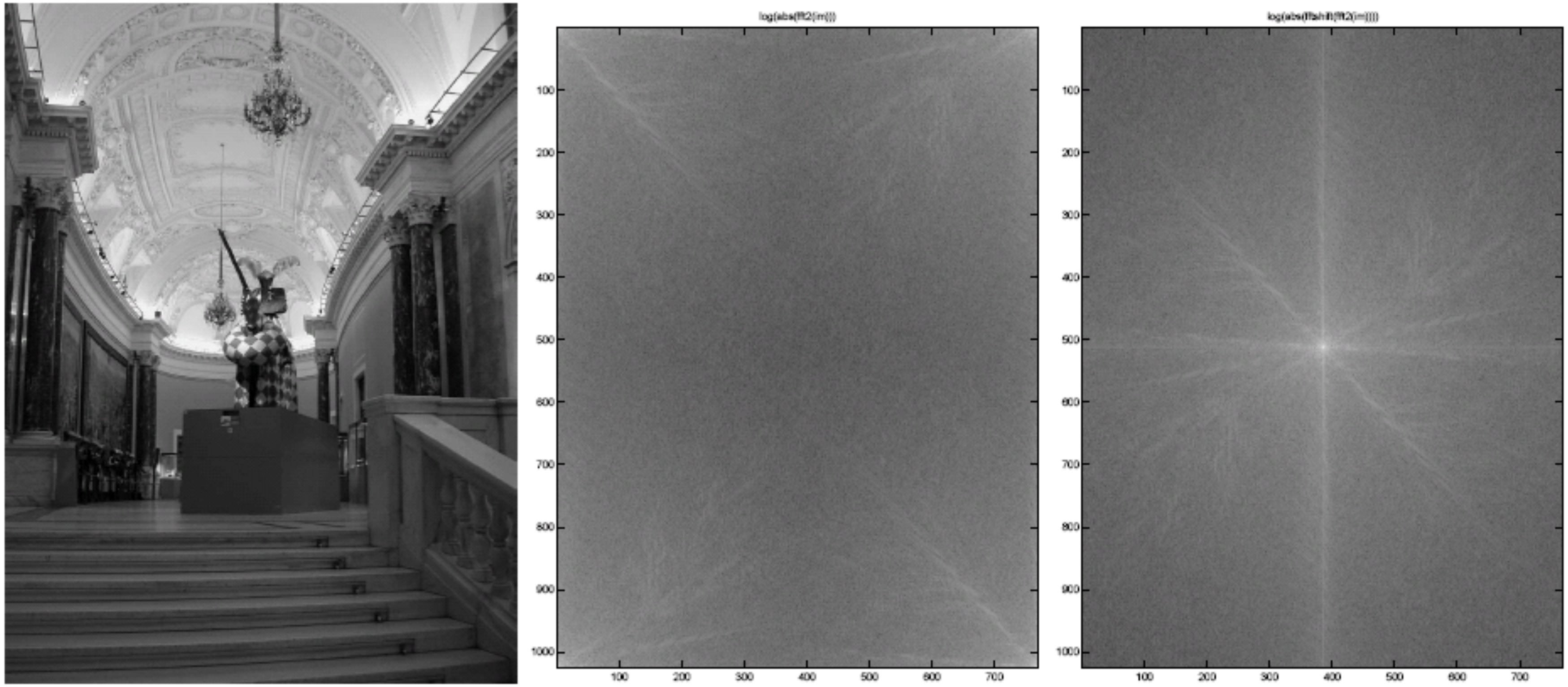
(R.C. Gonzalez, R.E. Woods. Digital image processing. Addison-Wesley, 1993)

Interpretation des Spektrums

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg

Reales Bild und dessen logarithmiertes Amplitudenspektrum:

A real-world picture (more or less) and the log of its (shifted) spectral density



What part of the spectrum corresponds to what features?

Eigenschaften

Linearität

a) **Superposition:** $f_1(x,y)+f_2(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(u,v)+F_2(u,v)$

b) **Homogenität:** $a\cdot f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\; a\cdot F(u,v)$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i a_i \cdot f_i(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \sum_i a_i \cdot F_i(u,v)}$$

Ähnlichkeit (Dehnung, Stauchung)

$$f(ax,by) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax,by)\cdot \exp[-\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]\,dx\,dy$$

$$\boxed{f(ax,by) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)}$$

Translation im Orts- und Frequenzbereich

1. Verschiebung im <u>Frequenz</u>bereich

$$f(x,y)\cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(u_0 x + v_0 y)] \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u-u_0, v-v_0)$$

2. Verschiebung im <u>Orts</u>bereich

$$f(x-x_0, y-y_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u,v)\cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(ux_0 + vy_0)]$$

⇒ Verschiebung der Funktion im „Ziel“-Raum bewirkt eine lineare Phasendrehung im Komplementär-Raum !

Periodizität und konjugierte Symmetrie (diskrete Fourier-Transformation)

geg.: diskrete Bildfunktion mit homogener Abtastung, Δx, Δy, und rechteckiger Fensterfunktion

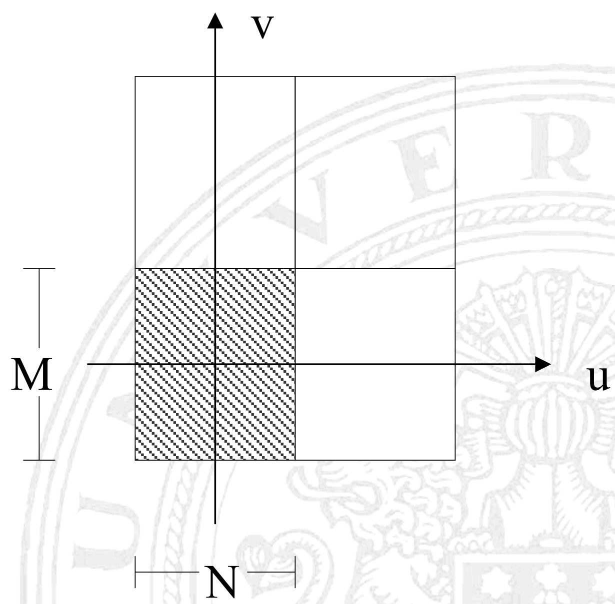
- diskrete Fourier-Transformation und ihre Inverse sind periodisch mit den achsenspezifischen Periodenlängen N bzw. M

$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+M) = F(u+N,v+M)$$

- für reelle f(x, y) gilt (* : komplex Konjugierte) :

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

bzw. $$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$



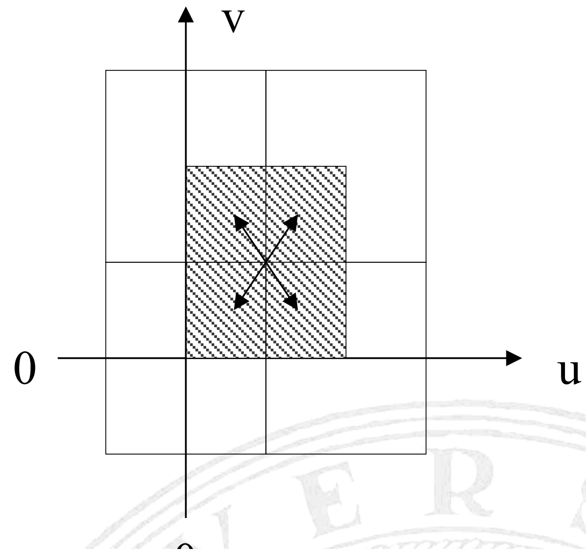
- Periodenverschiebung bei diskreter Transformation

Formulierung der diskreten Fourier-Transformation für Werte

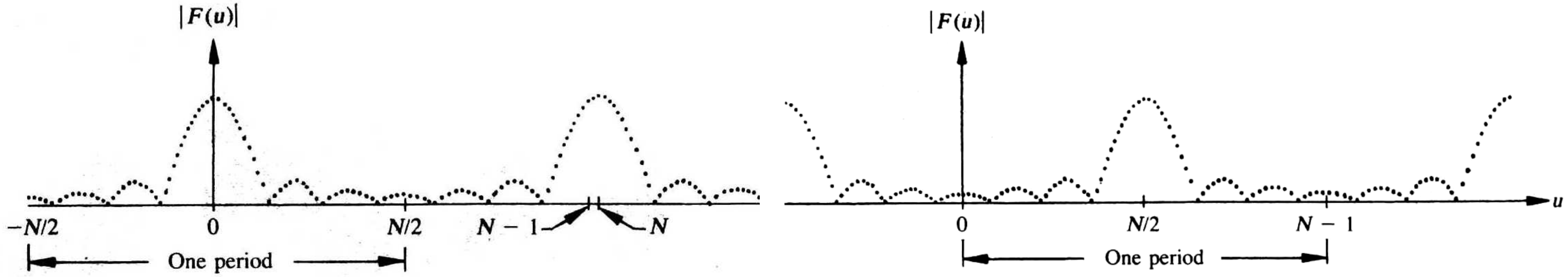
$$u \in [0, N-1] \text{ und } v \in [0, M-1]$$

Ergebnis : Transformierte erscheint mit jeweils 2 aneinandergrenzenden Halbperioden

→ Zur Darstellung einer <u>vollen</u> Periode können die jeweils diagonal gegenüberliegenden Quadranten (mit je einer Halbperiode) vertauscht werden !



- 1D Fall:



(R.C. Gonzalez, R.E. Woods. Digital image processing. Addison-Wesley, 1993)

- Mathematische Betrachtung

Zur Darstellung einer vollen Periode muß der Ursprung in den Punkt

$$u_0 = N/2\,,\ v_0 = M/2$$

verschoben werden

→ **Verschiebungstheorem** der Fourier-Transformation

$$f(x,y)\cdot \exp\left[\mathbf{j}2\pi\left(x\frac{N}{2}+y\frac{M}{2}\right)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(u-u_0, v-v_0)$$

$$= f(x,y)\cdot \exp\left[\mathbf{j}\pi(Nx+My)\right]$$

$$= f(x,y)\cdot \underbrace{\exp\left[\mathbf{j}\pi Nx\right]}_{(-1)^x}\cdot \underbrace{\exp\left[\mathbf{j}\pi My\right]}_{(-1)^y}$$

d.h. die Funktion **f(x, y)** muß vor der Durchführung der Transformation mit dem Faktor $\mathbf{(-1)^x \cdot (-1)^y}$ multipliziert werden !

Rotation

- **Polarkoordinaten**

Ortsbereich	Frequenzbereich
$x = r \cdot \cos\theta$	$u = w \cdot \cos\phi$
$y = r \cdot \sin\theta$	$v = w \cdot \sin\phi$

- Es ist

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Gamma f\left(\overbrace{r\cdot\cos\theta}^{=x(r,\theta)}, \overbrace{r\cdot\sin\theta}^{=y(r,\theta)}\right)\cdot\left|J(r,\theta)\right| dr\,d\theta$$

Jacobi-Determinante:
$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\theta\cdot r\cdot\cos\theta - r\cdot(-\sin\theta)\cdot\sin\theta \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= r \end{aligned}$$

$$= \iint_\Gamma f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

- **Fourier-Transformation**

$$F(u,v)=\iint_\Gamma \underbrace{f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)}_{f(r,\theta)}\cdot\exp[-\mathbf{j}2\pi(ur\cdot\cos\theta+vr\cdot\sin\theta)]\cdot r\,drd\theta$$

mit $u=\omega\cdot\cos\Phi$, $v=\omega\cdot\sin\Phi$

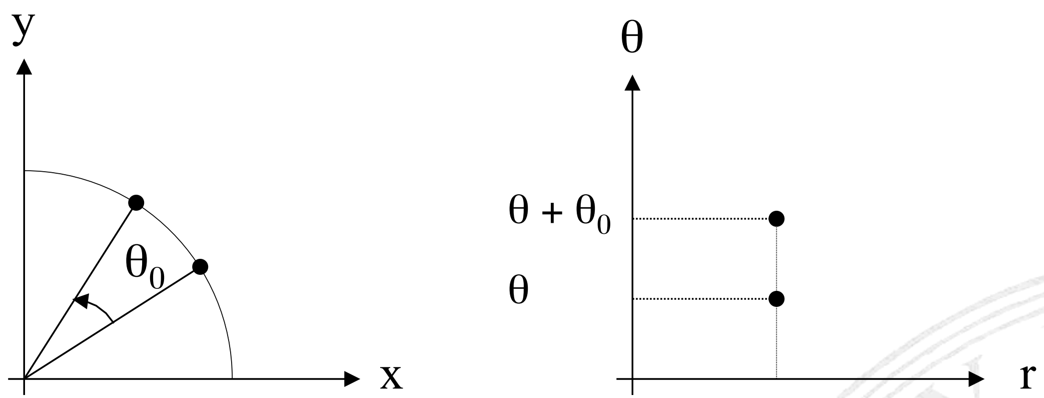
$$\rightarrow\quad F(\omega,\Phi)=\iint_\Gamma f(r,\theta)\cdot\exp[-\mathbf{j}2\pi r\omega\underbrace{(\cos\theta\cdot\cos\Phi+\sin\theta\cdot\sin\Phi)}]\cdot r\,drd\theta$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}(\cos(\theta-\Phi)+\cos(\theta+\Phi)+\cos(\theta-\Phi)-\cos(\theta+\Phi))\\&=\cos(\theta-\Phi)\end{aligned}$$

$$=\iint_\Gamma f(r,\theta)\cdot\exp[-\mathbf{j}2\pi r\omega\cdot\cos(\theta-\Phi)]\cdot r\;drd\theta$$

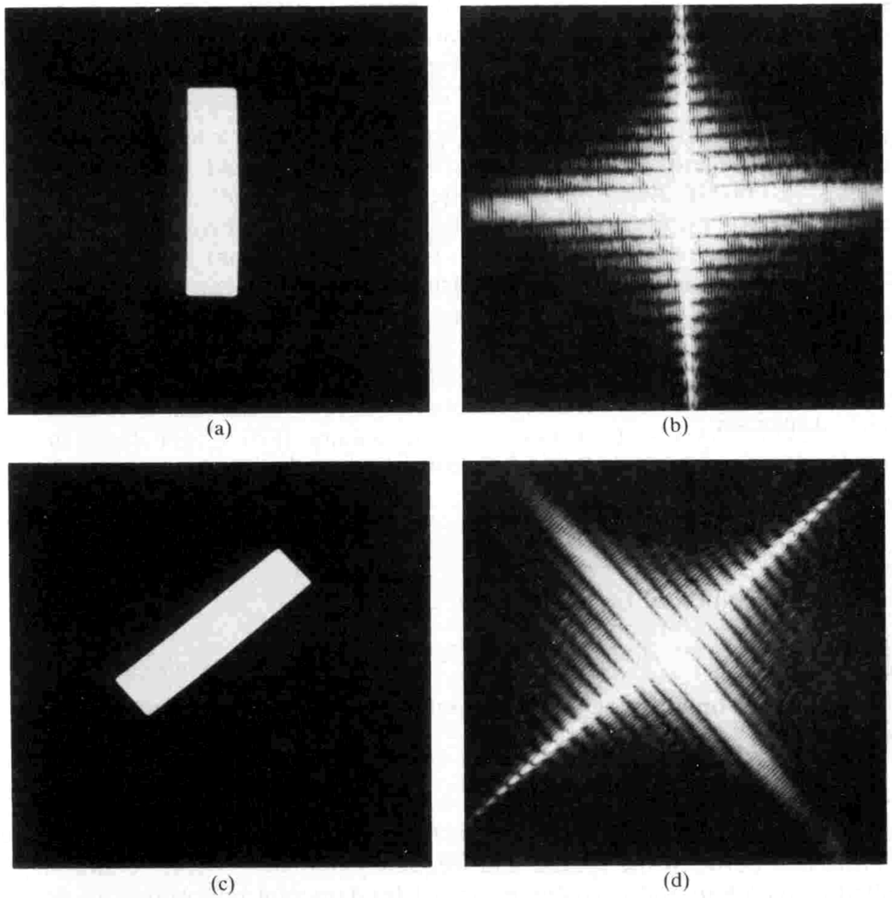
- Rotation um θ_0

$$F(\omega, \Phi + \theta_0) = \iint_\Gamma f(r \cdot \cos(\theta + \theta_0), r \cdot \sin(\theta + \theta_0)) \times \exp[-\mathbf{j} 2\pi r\omega \cdot \cos(\theta - \Phi + \theta_0)] \cdot r \, dr d\theta$$



→ $$\boxed{f(r, \theta + \theta_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega, \Phi + \theta_0)}$$

D.h. eine Rotation von $f(x, y)$ (~ $f(r, \theta)$) um den Winkel θ_0 bewirkt eine entsprechende Rotation des Spektrums $F(u, v)$ um ebenfalls θ_0 !



(R.C. Gonzalez, R.E. Woods. Digital image processing. Addison-Wesley, 1993)

Differentiation

- in x-Richtung

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \equiv f_x(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u,v)\cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]\right]dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\cdot \mathbf{j}2\pi u \cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]dudv$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathbf{j}2\pi u \cdot F(u,v)}$$

- in y-Richtung

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \equiv f_y(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left[F(u,v)\cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]\right]dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\cdot \mathbf{j}2\pi v \cdot \exp[\mathbf{j}2\pi(ux+vy)]dudv$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathbf{j}2\pi v \cdot F(u,v)}$$

allgemein

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (\mathbf{j}2\pi u)^m (\mathbf{j}2\pi v)^n \cdot F(u,v)$$

Bsp. : (a)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \equiv f_{xx}(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -4\pi^2 u^2 \cdot F(u,v)$$

(b)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) \equiv \underset{\text{Laplace-Operator}}{\Delta} f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -4\pi^2 \underbrace{\left(u^2 + v^2\right)}_{\text{Kreis-Funktion } r^2} \cdot F(u,v)$$

Parseval ‘sches Theorem sowie Signal- und Spektralenergie

Zusammenhang zwischen den Signalenergien im Zeit-/Ortsbereich und im Frequenzbereich (anschaulich: Fläche unter der (Betrags-) Funktion; Berechnung je nach Rechenaufwand)

<u>Hinweis</u>: Gleichung verwendet die Skalierung K = 1/(2π) für die Rücktransformation

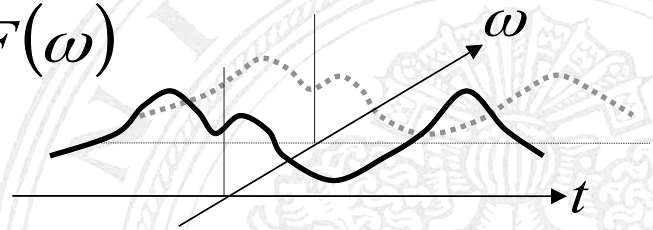
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f^*(t) \; dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \cdot \exp(-\mathbf{j}\omega t) d\omega \right] dt$$

Vertauschung der Reihenfolge der Integration ...

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-\mathbf{j}\omega t) dt \right]}_{F(\omega)} d\omega$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega}$$

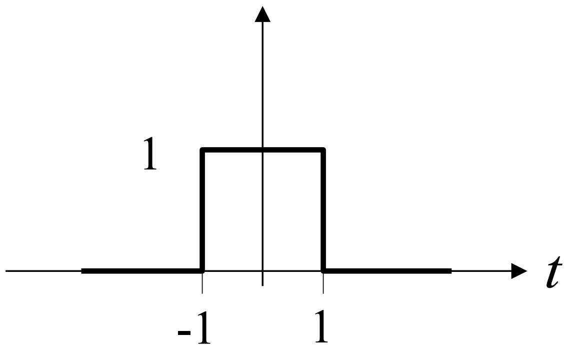


Die Gesamtenergie kann entweder über die Energie pro Zeiteinheit integriert über die Gesamtzeit oder aus der Energie pro Einheitsfrequenz integriert über alle Frequenzen bestimmt werden.

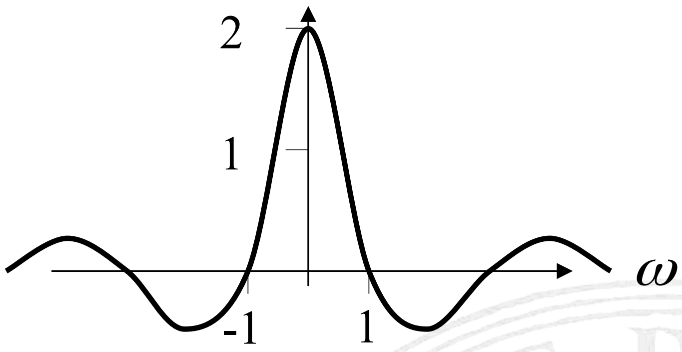
Verallgemeinerung des Parseval ‘schen Theorems – Signal-/Spektralenergie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g^*(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot G^*(\omega)\ d\omega$$

<u>Bsp</u>.: Energie der Rechteckfunktion



○—●



$$f(t) = rect_{w=2}(t)$$

$$F(\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

Berechnung der Signalenergie …

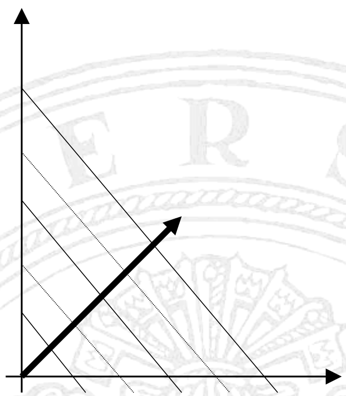
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2$$

$$\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} 4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega}_{= 2\cdot 4\cdot \frac{\pi}{2}} = 2$$

Parameter der Fourier-Transformation

Signalparameter

- Für **1-dimensionale Signale** $s(t)$
  - Mittels Fourier-Analyse wird deren Darstellung in Form eines trigonometrischen Polynoms gezeigt
  - Die einzelnen harmonischen Komponenten werden durch 3 Parameter eindeutig repräsentiert:
    i. Amplitude (= Fourier-Koeffizienten)
    ii. Frequenz
    iii. Phase (= Phasenverschiebung)

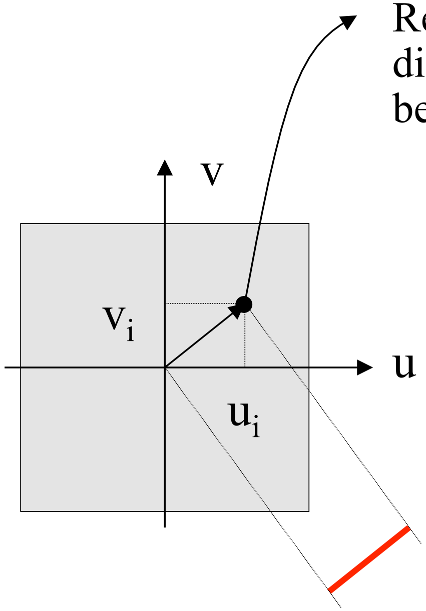


- Für **2-dimensionale Signale** $f(x, y) \rightarrow$ weiterer Parameter:
    iv. Richtung (~ Richtung einer Wellenfront in der Bildebene)

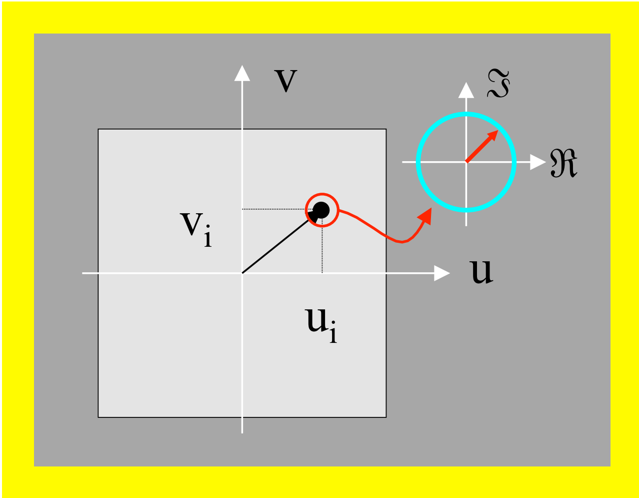
- **Spektren :**
  a) Amplituden- oder Magnitudenspektrum $|\mathbf{F(u)}|$ bzw. $|\mathbf{F(u, v)}|$
  b) Phasenspektrum $\mathbf{\Phi(u)}$ bzw. $\mathbf{\Phi(u, v)}$

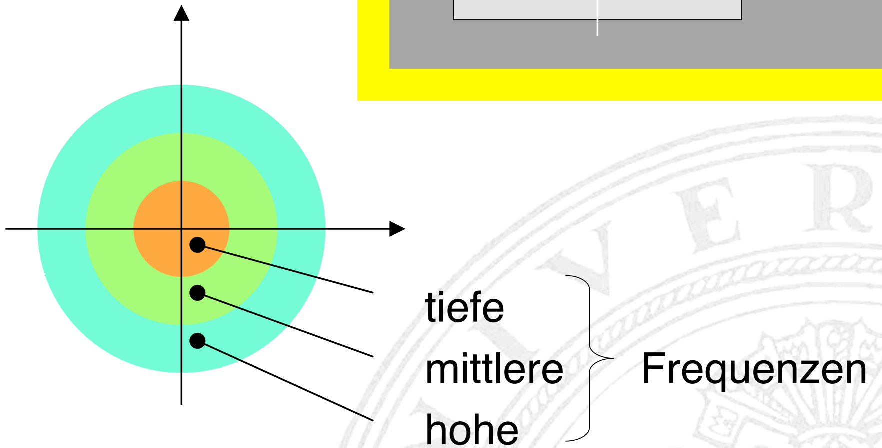
Bestimmung der Parameter aus $F(u, v) \in \mathcal{C}$ – Spektral-Eigenschaften

1. Frequenz



Repräsentiert eine Schwingung, die mit **4 Parametern** eindeutig bestimmt ist !





$$f_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$$

(aus den Koordinaten !)

Charakteristische Filtereigenschaften

a) Tiefpaß :Unterdrückung hoher Frequenzanteile, niederfrequente Anteile passieren weitgehend ungehindert

Funktion: Bildstörungen (~ Rauschen) sind hochfrequent, daher dienen Tiefpaßfilter zur Rausch-Unterdrückung (~ Bildglättung)

b) Hochpaß : Unterdrückung niedriger Frequenzanteile, hohe Frequenzen passieren weitgehend ungehindert

Funktion: Hervorhebung von Kontrasten (Kanten) der Signalfunktion;

Nachteil: Störungen erscheinen wesentlich verstärkt

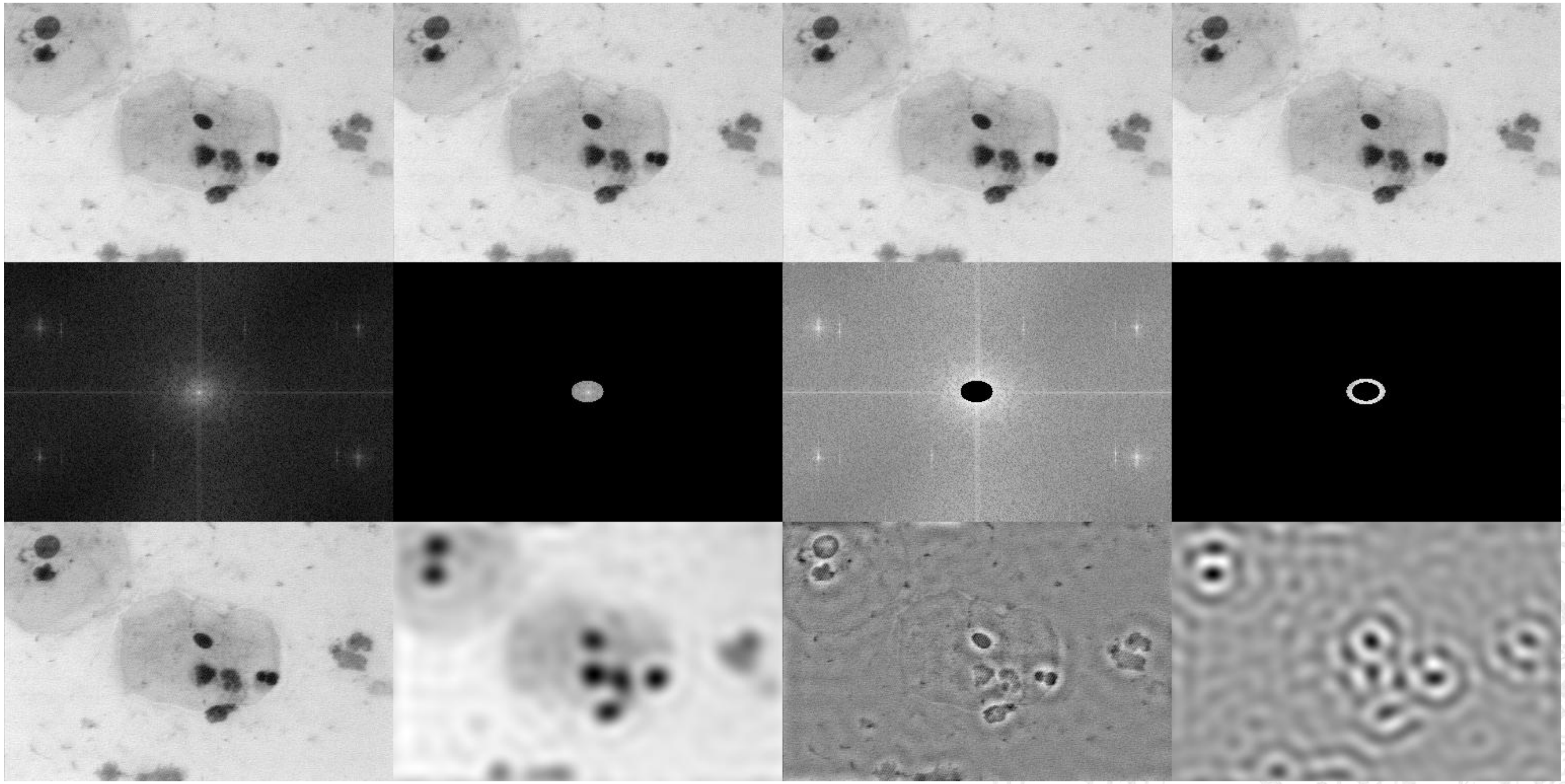
c) Bandpaß : Kombination von Hoch- und Tiefpaßfilter

Funktion: Hervorhebung bestimmter Frequenzanteile; Betonung von Kontrasten (Kanten) in verrauschten Daten

Wirkung – Beispiel

Filterung eines Eingangsbildes mittels Selektion ausgewählter Frequenzbereiche

→ Fourier-Transformation und 0-1 Filterung im Frequenzbereich



Identität
(alle Frequenzen)

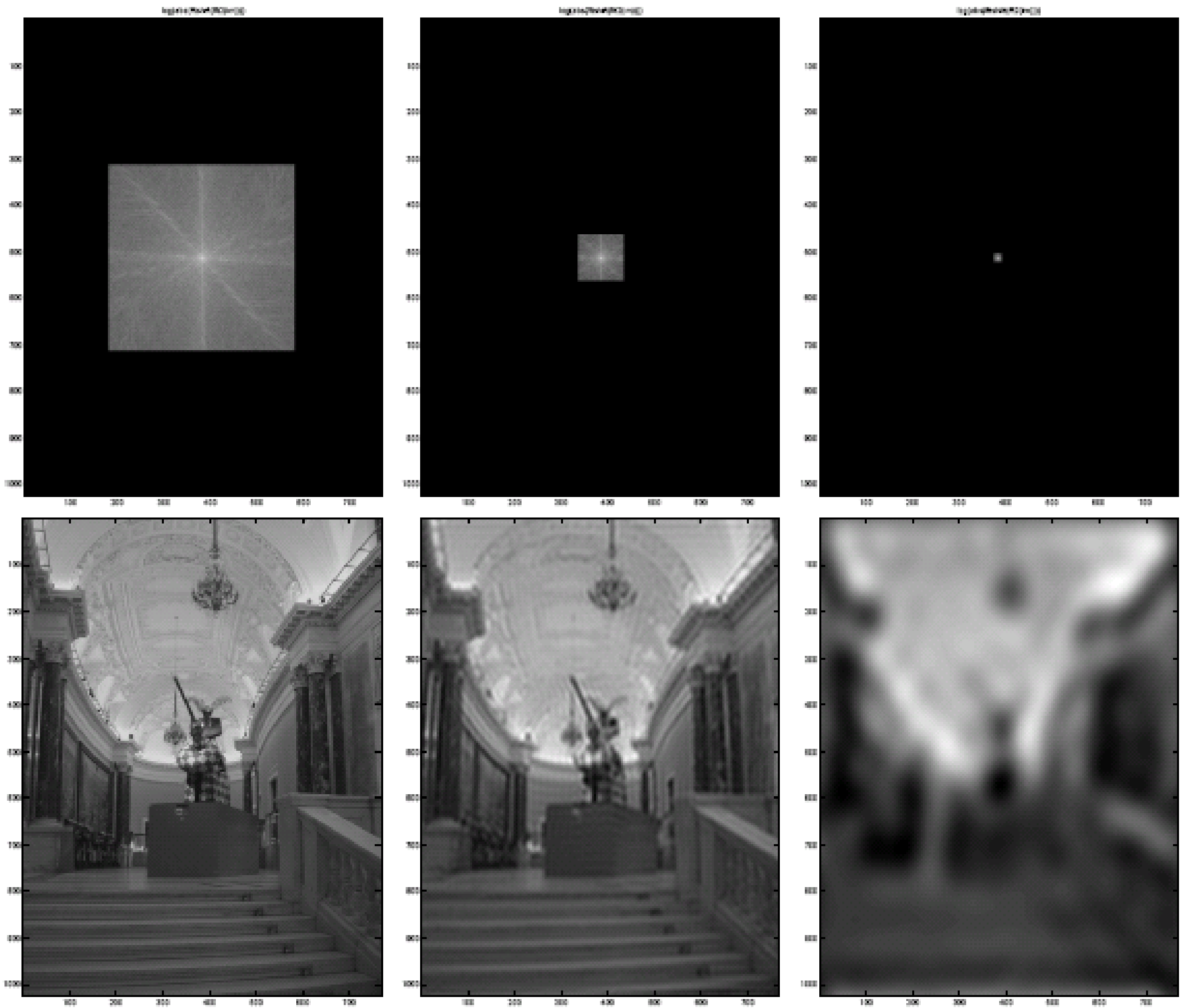
Tiefpaß

Hochpaß

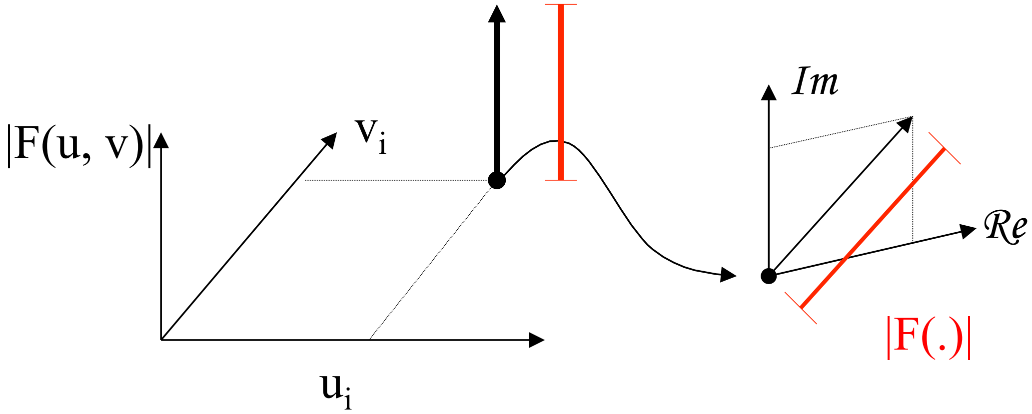
Bandpaß

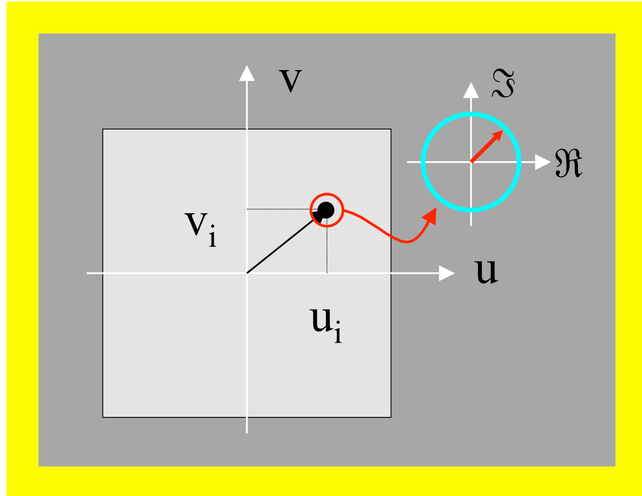
Auswirkung von „Zero-Padding“:

aus F. Hamprecht: VL Multidimensional Signal Analysis: Signal Processing, Univ. Heidelberg



2. Amplitude





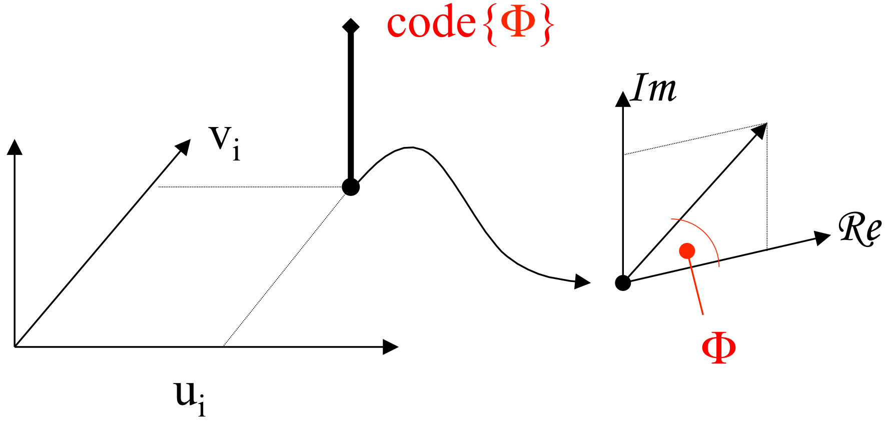
$$\left|F(u_i,v_i)\right| = \left(\Re e\{F(u_i,v_i)\}^2 + \Im m\{F(u_i,v_i)\}^2\right)^{1/2}$$

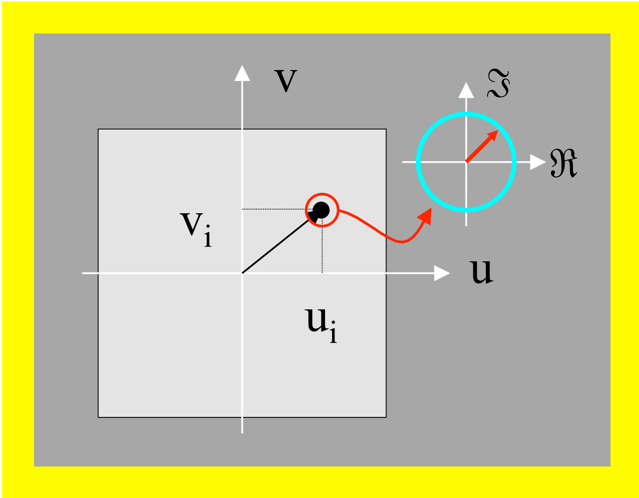
Länge des Vektors (= Skalar) der komplexen Zahl an (u_i, v_i)

→ **Amplituden<u>spektrum</u>** (~ Magnituden- / Leistungsspektrum) :

Beträge (~ Längen) der Vektoren für (alle) Frequenzen des Fourier-Spektrums

3. Phase





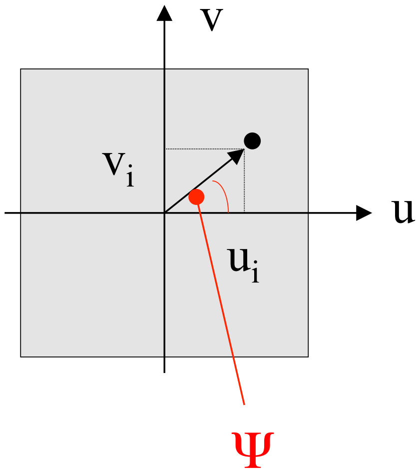
$$\Phi(u_i, v_i) = \tan^{-1}\left(\frac{\Im m\{F(u_i, v_i)\}}{\Re e\{F(u_i, v_i)\}}\right)$$

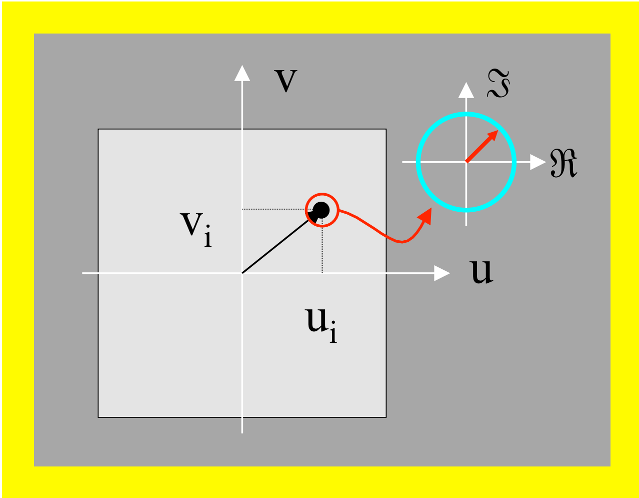
Phasenlage (Phasenwinkel) des (komplexen) Funktionswertes

→ **Phasenspektrum** :

Phasenwinkel ($\Phi \in [-\pi, \pi]$) für das gesamte Fourier-Spektrum (in geeigneter Codierung zur Darstellung)

4. Richtung

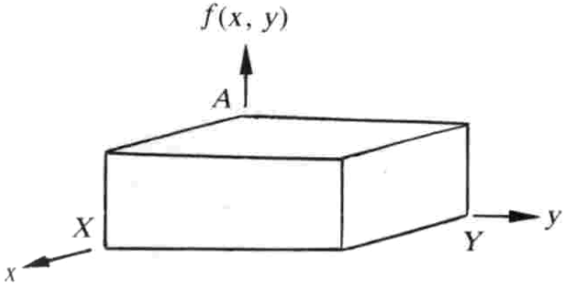




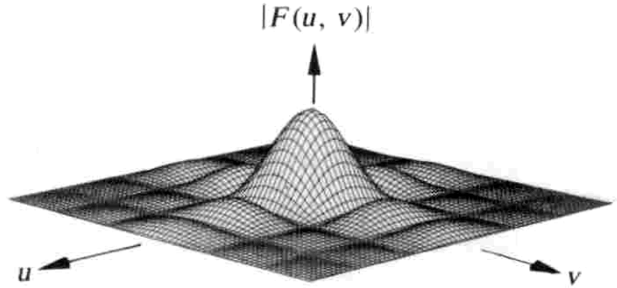
$$\Psi(u_i, v_i) = \tan^{-1}\left(\frac{v_i}{u_i}\right)$$

Richtungswinkel des Ortsvektors
in Polarkoordinaten-Darstellung

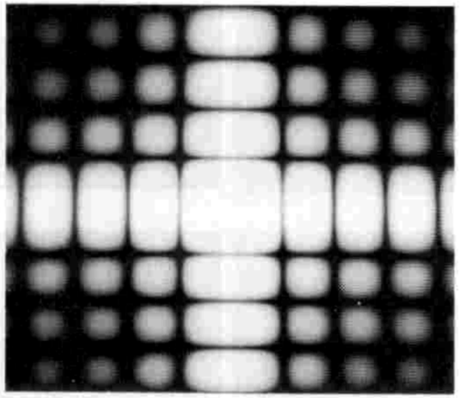
Beispiel: Transformation einer verschobenen Box-Funktion



(a)



(b)



(c)

a) 2D Signalfunktion
b) Betrag des Fourier-Spektrums $|F(u, v)|$
c) Helligkeits-codierte Betragsfunktion

(R.C. Gonzalez, R.E. Woods. Digital image processing. Addison-Wesley, 1993)

Transformation einer verschobenen Box-Funktion (Forts.)

1. 2D Signalfunktion

$$f_{box}(x,y) = \begin{cases} A & \mathit{für} \quad 0 \le x \le X \quad \wedge \quad 0 \le y \le Y \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases}$$

2. Fourier-Spektrum (Fourier-Transformierte der Signalfunktion)

$$F(u,v) = A\left(\frac{1}{-\mathbf{j}2\pi u}\left(\exp(-\mathbf{j}2\pi uX) - 1\right) \cdot \frac{1}{-\mathbf{j}2\pi v}\left(\exp(-\mathbf{j}2\pi vY) - 1\right)\right)$$

$f_{box}(x, y)$ entspricht einer zum Ursprung symmetrischen Funktion, die um den Vektor $(X/2, Y/2)$ verschoben wurde !

$$\Rightarrow \quad F(u,v) = AXY\left(\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\exp(-\mathbf{j}2\pi uX)\right)\cdot\left(\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\exp(-\mathbf{j}2\pi vY)\right)$$

3. Amplituden-Spektrum (Betrag)

$$|F(u,v)| = AXY\left|\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right|\cdot\left|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\right|$$

Frage: Wie ist die Güte (bzw. Eignung) dieser Art von Funktionen für die Rauschunterdrückung ?

Zur Bedeutung der Amplitude und Phase

Zusammenfassend ...

Die gesamte Information eines Bildes (= diskrete Matrix) im Ortsraum ist in dessen Fourier-Transformation enthalten. Diese Repräsentation zeigt an, aus welchen periodischen Strukturen sich das Bild zusammensetzt.

Frage:

In welchen Parametern (Amplitude vs. Phase) liegt mehr Information über die Struktur des Bildes (→ Signifikanz !) ?

Beispiel :

a) Jean Baptiste Joseph de Fourier

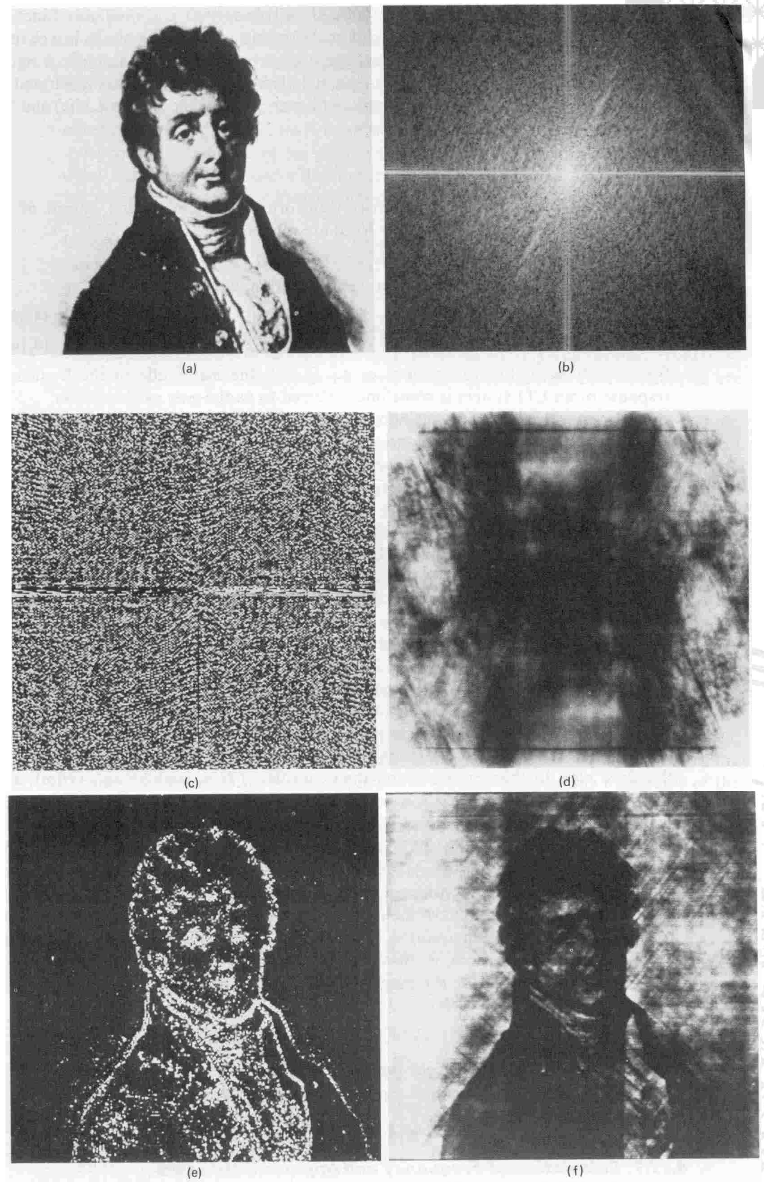
b) Amplituden-Spektrum

c) Phasen-Spektrum

d) Manipulation:
Amplitude wie in (b), Phase = 0

e) Manipulation:
Amplitude = 1, Phase wie in (c)

f) Manipulation:
Amplitude eines anderen Bildes, Phase wie in (c)



(A.V. Oppenheim, A.S. Willsky. Signals and systems. Prentice-Hall, 1983)

Korrelation

- **Korrelationsintegral**

$$f(x,y)\circ g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\cdot g(x+\alpha,y+\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

- **Korrelationssumme (*extended sequences*)**

$$f_e[x,y]\circ g_e[x,y]=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} f_e[i,j]\cdot g_e[x+i,y+j]$$

für $x = 0, 1, ..., M-1$ und $y = 0, 1, ..., N-1$

→ für $g(x,y)=k\cdot f(x,y) \longrightarrow$ **Autokorrelation**

$g(x,y)\neq k\cdot f(x,y) \longrightarrow$ **Kreuzkorrelation**

Zusammenhang mit Faltung und Fourier-Transformation

i. Beziehung zur Faltung

$$f(x,y) \circ g(x,y) = f(-x,-y) * g(x,y)$$

$$f(x,y) * g(x,y) = f(-x,-y) \circ g(x,y)$$

ii. Beziehung zur Fourier-Transformation

$$F\{f(x,y) \circ g(x,y)\} = \underbrace{F\{f(-x,-y)\}}_{F^*\{f(x,y)\}} \cdot F\{g(x,y)\}$$

(komplex Konjugierte)

Hinweis : Beziehungen gelten sowohl für analoge als auch für diskrete Funktionen (*extended sequences*)

Separierte Faltung

<u>geg</u>. : f(x, y) und g(x, y) = k(x) · h(y)

- **Faltungsintegral**

$$f(x,y) * g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\cdot g(x-\alpha, y-\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{-\infty} \underbrace{\left(\int_{\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\cdot k(x-\alpha)\,d\alpha\right)}_{\text{1D-Faltung} \rightarrow \text{Zwischenergebnis}} \cdot h(y-\beta)\,d\beta$$

- **Faltungssumme** (mit $f_e[x, y]$, $g_e[x, y] = k_e[x] \cdot h_e[y]$)

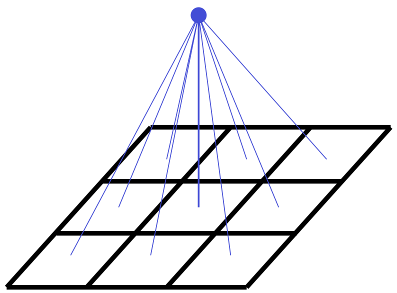
$$f_e[x,y] * g_e[x,y] = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} f_e[i,j]\cdot g_e[x-i, y-j]$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{M-1} f_e[i,j]\cdot k_e[x-i]\right)}_{\text{1D-Faltung} \rightarrow \text{N Zeilenvektoren}} \cdot h_e[y-j]$$

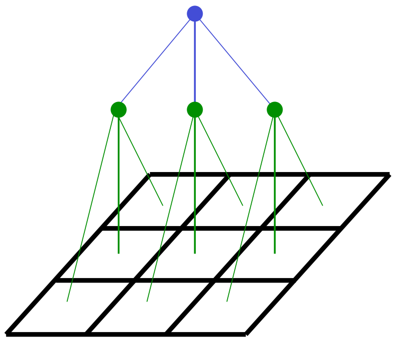
Faltung von 2D Funktionen mit separierten Faltungskernen

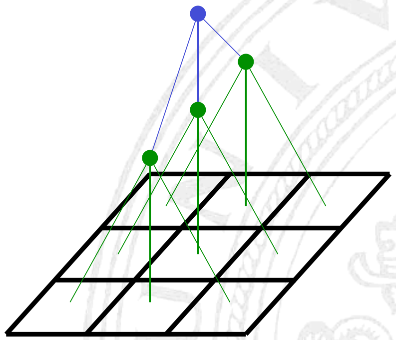
(Skizze anhand eines 3 x 3-Kerns)

2D Faltung (nicht separiert)



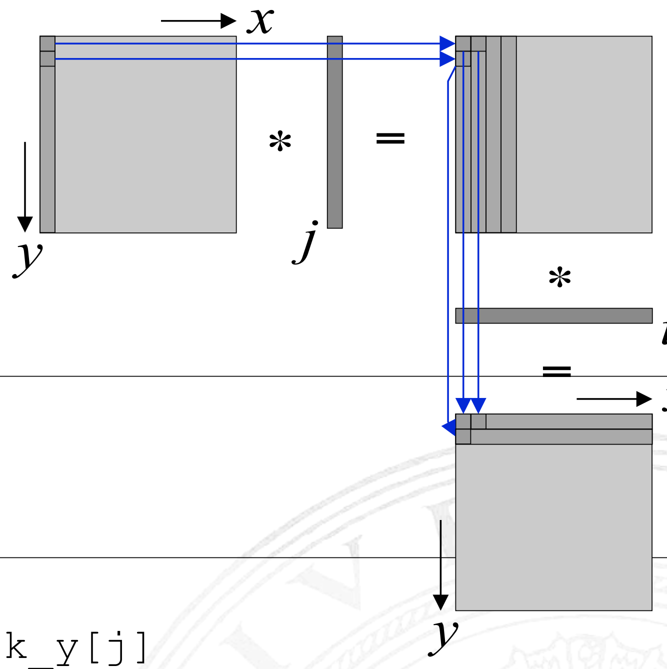
Separierung – erst Spalten, dann Zeilen (links) oder erst Zeilen, dann Spalten (rechts)





Algorithmus der separierten Faltung

```
procedure convsep(real image[], {mask_x[], mask_y[]}): real result[]
  [M, N]    :=  size(image[])
  hor       :=  size(mask_x[])
  ver       :=  size(mask_y[])
  result[] :=  0.0
  buffer[] :=  0.0
```

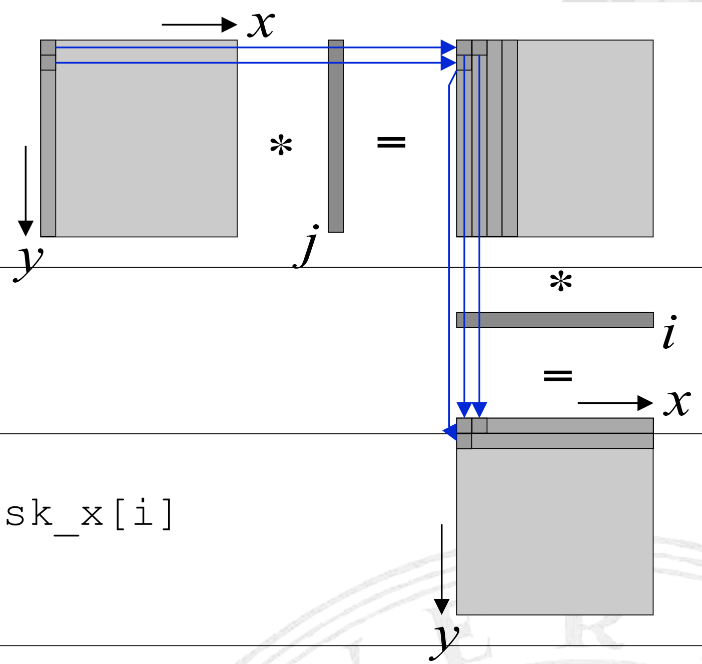



```
for x from 0 to M-1
  for y from 0 to N-1
    sum :=  0.0
    for j from -ver/2 to ver/N-1
      sum :=  sum + image[x,y-j] * mask_y[j]
    end for
    buffer[x,y] :=  sum
  end for
end for
```

1D Faltung für Spalten …

. . . < Fortsetzung nächste Seite >

Algorithmus der separierten Faltung (cont 'd)




```
...

for y from 0 to N-1
  for x from 0 to M-1
    sum :=  0.0
    for i from -hor/2 to hor/2-1
      sum :=  sum + buffer[x-i,y] * mask_x[i]
    end for
    result[x,y] :=  sum
  end for
end for

  return result[]
end convsep
```

1D Faltung für Zeilen …

Theoreme der 2-D Fouriertransformation

(weitere Theoreme sind z.B. in BRACEWELL (1978) zu finden)

Theorem	$f(x, y)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $F(u, v)$
Ähnlichkeit	$f(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$
Superposition (Addition)	$f(x,y)+g(x,y)$	$F(u,v)+G(u,v)$
Verschiebung	$f(x-a,y-b)$	$F(u,v)\cdot e^{-j2\pi(au+bv)}$
Faltung	$f(x,y)*g(x,y)$	$F(u,v)\cdot G(u,v)$
Modulation	$f(x,y)\cdot g(x,y)$	$F(u,v)*G(u,v)$
Autokorrelation	$f(x,y)*f^*(-x,-y)$	$\lvert F(u,v)\rvert^2$
Differentiation	$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y)$	$(j2\pi u)^m\cdot(j2\pi v)^n\cdot F(u,v)$

Differenzenquotienten 1. und 2. Ordnung

$$\Delta_x f(x,y) = f\left(x+\tfrac{1}{2},y\right)-f\left(x-\tfrac{1}{2},y\right) \qquad j2\sin(\pi u)\cdot F(u,v)$$

$$\Delta_{xx} f(x,y) = f(x+1,y)-2f(x,y)+f(x-1,y) \qquad -4\sin^2(\pi u)\cdot F(u,v)$$

"Rayleigh theorem"

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(u,v)|^2\,dudv$$

"Power theorem"

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot g^*(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\cdot G^*(u,v)\,du\,dv$$

Berechnungsaufwand (Zeitkomplexität)

Faltung und Fourier-Transformation

- 2D Faltung
  - M Spalten, N Zeilen
  - für jeden Punkt (x, y) : $M \times N$ (komplexe) Multiplikationen

$$(M \times N)^2 \sim O(M^2N^2), \quad \text{für } N = M: O(N^4)$$

- 2D Fourier-Transformation (Standard-Version)
  - Transformation $(M \times N) \cdot (M \times N)$ komplexe Multiplikationen
  - Filterung
    - $2 \cdot M^2N^2$ F.T. für $f(.)$ und $g(.)$
    - $M\,N$ Multiplikation der Spektren F und G
    - M^2N^2 Rücktransformation

$$3 \cdot M^2N^2 + M\,N \sim O(M^2N^2), \quad \text{für } N = M: O(N^4)$$

- Separierte Faltung
  - M Spalten, N Zeilen
  - in N Zeilen, für jede Spalte x M Mult. $=$ M^2N Multiplikationen

    in M Spalten, für jede Zeile y N Mult. $=$ $M\,N^2$ Multiplikationen

$$M^2N + M\,N^2 \sim O(M\,N^2) \text{ für } N > M, \quad \text{für } N = M: O(N^3)$$

Schnelle Fourier-Transformation (*Fast Fourier Transform*, FFT)

Parametrisierung: $M = N,\ N = 2^n$ („Radix-2“)

- 1D Fourier-Transformation

$$F[u] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] \cdot K_N^{ux} \quad \text{mit} \quad K_N = \exp\left(-\mathbf{j}\frac{2\pi}{N}\right) \equiv z \quad ; \ u = 0,1,\ldots,N-1$$

Matrix-Notation:

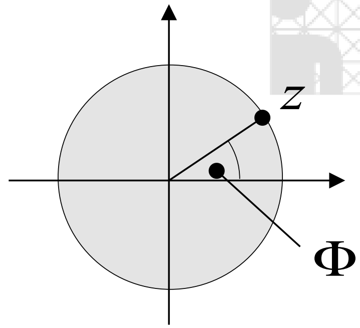
$$F[u] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] \cdot z^{ux}$$

$$= f[0] \cdot z^{u\cdot 0} + f[1] \cdot z^{u\cdot 1} + f[2] \cdot z^{u\cdot 2} + \ldots + f[N-1] \cdot z^{u\cdot(N-1)}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{V}_N \cdot \vec{\mathbf{f}} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{V}_N \equiv \left(z^{ux}\right) = \begin{pmatrix} z^{0\cdot 0} & z^{0\cdot 1} & z^{0\cdot 2} & \ldots & z^{0\cdot(N-1)} \\ z^{1\cdot 0} & z^{1\cdot 1} & z^{1\cdot 2} & \ldots & z^{1\cdot(N-1)} \\ z^{2\cdot 0} & z^{2\cdot 1} & z^{2\cdot 2} & \ldots & z^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \\ z^{(N-1)\cdot 0} & z^{(N-1)\cdot 1} & z^{(N-1)\cdot 2} & \ldots & z^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}$$

- Komplexe Einheitswurzeln (geg.: $\mathbf{z} \in \mathcal{C},\ \mathbf{N} \in \mathcal{N}$)



Es gilt: $z^N = \left(|z| \cdot (\cos\Phi + \mathbf{j}\sin\Phi)\right)^N$

$= |z|^N \cdot \exp(\mathbf{j}\Phi N)$

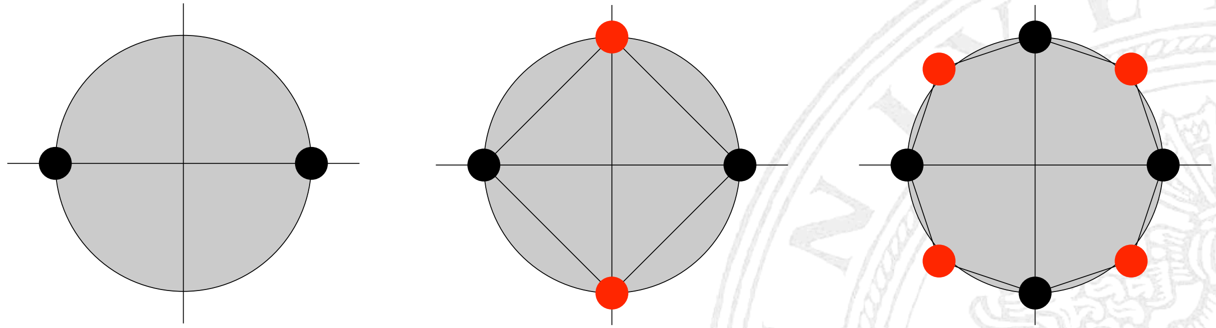
$= |z|^N \cdot (\cos N\Phi + \mathbf{j}\sin N\Phi)$, hier $|z| = 1$

Mit $|z| = 1$ gilt: $z^N = (1)^N = \exp(\mathbf{j}N\Phi)$

Komplexe Einheitswurzeln: $\boxed{z = \sqrt[N]{K}} = K^{1/N} \equiv K_N$

liefert N Lösungen: $K_N^0 = 1, K_N^1, K_N^2, \ldots, K_N^{N-1}$
(Eckpunkte eines regulären N-seitigen Polygons)

Bsp.: N = 2, 4, 8



$\sqrt[2]{1} = \{1, -1\}$ $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, \mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$ $\sqrt[8]{1} = \{1, -1, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \ldots\}$

Eigenschaften

1. Periodizität

Es ist $K_N^N = K_N^0 = 1$

Es gilt (o.B.): $\boxed{K_N^i K_N^k = K_N^{(i+k)\bmod(N)}}$

2. Auslöschung

Es gilt (o.B.): $\boxed{K_{kN}^{ku} = K_N^u}$ sowie $\left(\sqrt[u]{1}\right)^2 = \left(K_N^u\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[u/2]{1} = K_{N/2}^u$

3. Halbierung (Symmetrie)

Aus den vorgenannten Eigenschaften folgen die Beziehungen

$\boxed{K_{N/2}^{u+N/2} = K_{N/2}^u}$ $\boxed{K_N^{u+N/2} = -K_N^u}$

und $\boxed{\left(K_N^{u+N/2}\right)^2 = \left(K_N^u\right)^2}$

Daraus folgt, für die Quadrate jeder komplexen n-ten Einheitswurzel ergibt sich jede der $n/2$-ten Einheitswurzel genau 2-mal !

DFT, FFT und Rekursion

Diskrete Transformation

$$F[u] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] \cdot \exp\left(-\mathbf{j}ux\frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] \cdot K_N^{ux}$$

$$= f[0] \cdot K_N^{u \cdot 0} + f[1] \cdot K_N^{u \cdot 1} + f[2] \cdot K_N^{u \cdot 2} + f[3] \cdot K_N^{u \cdot 3} +$$

$$f[4] \cdot K_N^{u \cdot 4} + f[5] \cdot K_N^{u \cdot 5} + \ldots + f[N-2] \cdot K_N^{u \cdot (N-2)} + f[N-1] \cdot K_N^{u \cdot (N-1)}$$

- **Gerade Indizes**

Es gelten
- Auslöschungsschema: $\left(K_N^u\right)^{2x} = \left(K_{2N/2}^{2u}\right)^x = \left(K_{N/2}^u\right)^x$
- Halbierungsschema: N-te Einheitswurzeln $\left(K_N^u\right)^{2x} = \left(K_N^{ux}\right)^2$

ergeben die passenden N/2-ten Einheitswurzeln 2-mal

$$F_{even}[u] = f[0] \cdot K_N^{u \cdot 0} + f[2] \cdot K_N^{u \cdot 2} + f[4] \cdot K_N^{u \cdot 4} + \ldots + f[N-2] \cdot K_N^{u \cdot (N-2)}$$

$$= f[0] \cdot K_{N/2}^{u \cdot 0} + f[2] \cdot K_{N/2}^{u \cdot 1} + f[4] \cdot K_{N/2}^{u \cdot 2} + \ldots + f[N-2] \cdot K_{N/2}^{u \cdot (N/2-1)}$$

$$= \boxed{\sum_{x=0}^{N/2-1} f[2k] \cdot K_{N/2}^{u \cdot x}} \quad ; \; u = 0, 1, \ldots, N/2-1$$

$$F^{[0]}[u]$$

- **Ungerade Indizes**

Es gelten
- Auslöschungsschema $\left(K_N^u\right)^{2x+1} = \left(K_{N/2}^u\right)^x \cdot K_N^u$
- Halbierungsschema $\left(K_N^u\right)^{2x} = \left(K_N^{ux}\right)^2$

$$F_{odd}[u] = f[1]\cdot K_N^{u\cdot 1} + f[3]\cdot K_N^{u\cdot 3} + f[5]\cdot K_N^{u\cdot 5} + \ldots + f[N-1]\cdot K_N^{u\cdot(N-1)}$$
$$= f[1]\cdot K_{N/2}^{u\cdot 0}\cdot K_N^u + f[3]\cdot K_{N/2}^{u\cdot 1}\cdot K_N^u + \ldots + f[N-2]\cdot K_{N/2}^{u\cdot(N/2-1)}\cdot K_N^u$$
$$= K_N^u \cdot \underbrace{\sum_{x=0}^{N/2-1} f[2k+1]\cdot K_{N/2}^{u\cdot x}}_{F^{[1]}[u]} \quad ; \; u = 0,1,\ldots,N/2-1$$

Zerlegung (Rekursion)

1. Für Punkte **u = 0, 1, 2, …, N/2 – 1**:

$$F[u] = F_{even}[u] + F_{odd}[u] = F^{[0]}[u] + K_N^u \cdot F^{[1]}[u]$$

2. Für Punkte **u = N/2, N/2 + 1, …, N-1**: Nach dem Halbierungsschema für N-te Einheitswurzeln gilt
   i) für die Koeffizienten der Polynome $K_{N/2}^{u+N/2} = K_{N/2}^u$
   ii) für den konstanten Multiplikator $K_N^{u+N/2} = -K_N^u$

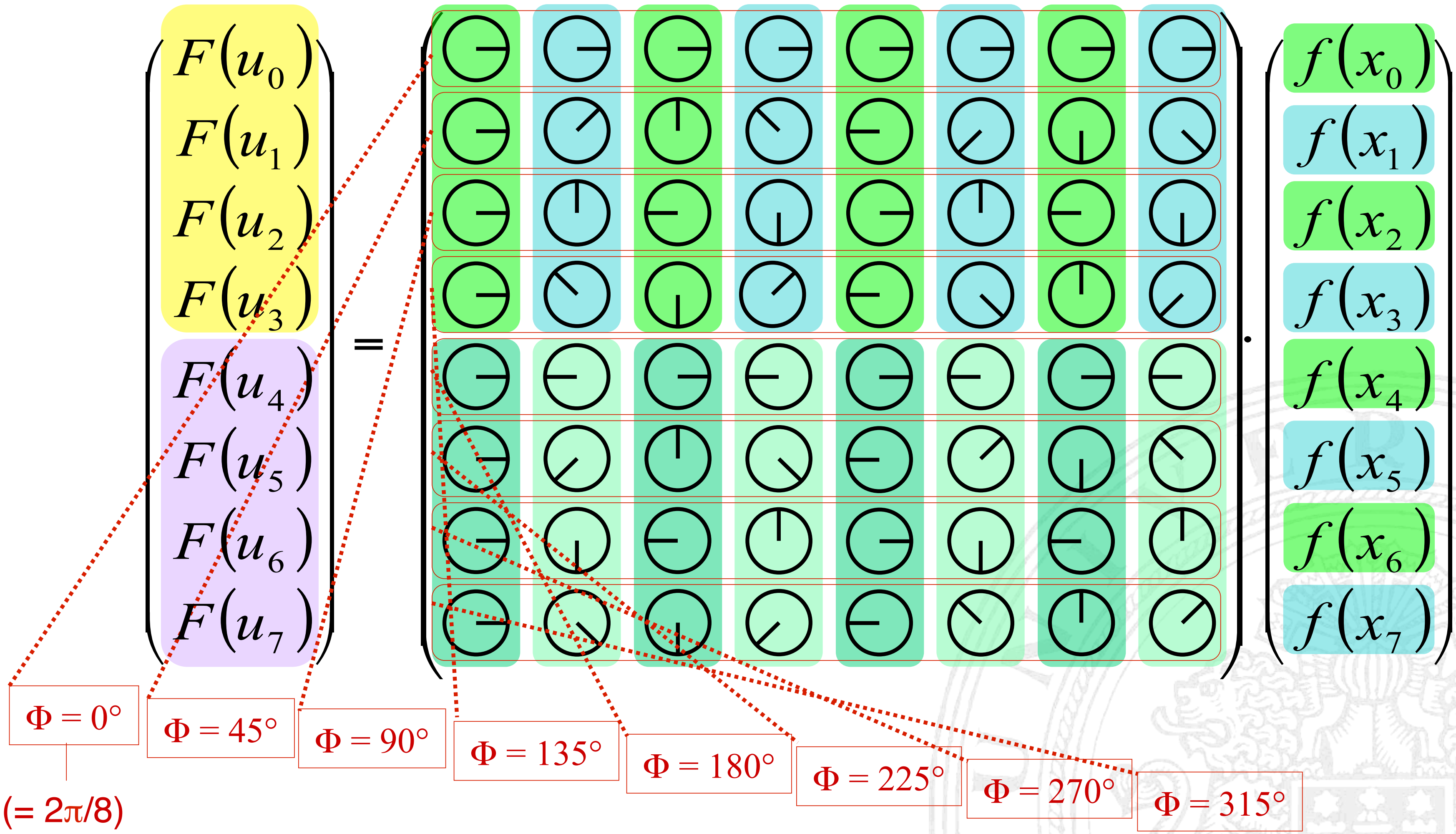
   Somit berechnen sich die restlichen Punkte

$$F[u+N/2] = F_{even}[u] - F_{odd}[u] = F^{[0]}[u] - K_N^u \cdot F^{[1]}[u]$$

Hinweis: Das Halbierungsschema liefert die Grundlage für die Wertebereichshalbierung (Frequenz u) und die Halbierung des Aufwands !

Darstellung der DFT als Vektor-Matrix Produkt mit Phaseninformation

Veranschaulichung mit $N = 8$; $\omega = 2\pi$ u: $F[u] = \sum_{x=0}^{N-1} f[x] \cdot K_N^{ux}$



Rekursion

Die Berechnung einer **N-Element-DFT$_N$** kann in **2 (N/2)-Element-DFT$_{N/2}$** Berechnungen zerlegt werden! (rekursive Anwendung – ***Divide-and-conquer*** Prinzip)

Einfache Erweiterung für 2D Transformation

Eine N x N-Matrix wird als Vektor mit N^2 Elementen aufgefaßt !

Zeitkomplexität – Master-Theorem für Rekursionsgleichungen

(vgl. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest. Introduction to algorithms. MIT Press, 1990, p.61ff)

$$\boxed{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + f(n)} \quad \text{mit} \quad n = N^2$$

aus der asymptotischen Abschätzung von T(n) folgt:

$$O\left(N^2 \cdot \log N^2\right) = O\left(N^2 \cdot \log N\right)$$

Hinweis: Durch Ausnutzung der Struktur 2-dimensionaler Signale kann mittels weiterer Zerlegung der Aufwand auf $3/4 \cdot N^2 \cdot \log N$ reduziert werden!

Einordnung – Bemerkungen zur Aufwandsabschätzung

Mit der O-Notation wird die asymptotisch obere Grenze bestimmt. Die Definition lautet:

Eine Funktion $f(n)$ heißt „von der Art $O(\, g(n)\,)$“, wobei $O(\, g(n)\,)$ die Menge von Funktionen

$$O(\, g(n)\,) = \{\ f(n), \text{ für die es Zahlen } c,\ n_0 \text{ gibt, so daß } (\forall n \geq n_0) :\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\ \}$$

definiert!

Für die **praktische Anwendung** in der Bildverarbeitung sind die konkreten Werte der Konstanten c und n_0 von Bedeutung, da diese die jeweiligen Größen der Datenmengen (Bilder, Masken) festlegen. Daher ist für kleine Maskengrößen oft die Faltung bzw. separierte Faltung schneller im Ortsbereich zu berechnen, als die FFT – erst für zunehmende Größen zahlt sich der Weg über den Frequenzraum aus !

Rekursiver FFT-Algorithmus

```
procedure recursive-FFT(real f[]): complex F[]
  N :=  size(f[])

  if N = 1 then
    F[] :=  f[]
  else
    KN    :=  exp(-j*2*PI/N)
    K     :=  1
    f0[]  :=  (f[0], f[2], f[4], ..., f[N-2])
    f1[]  :=  (f[1], f[3], f[5], ..., f[N-1])

    F0[]  :=  recursive-FFT(f0[])
    F1[]  :=  recursive-FFT(f1[])

    for u from 0 to N/2-1
      F[u]      :=  F0[u] + K * F1[u]
      F[u+N/2]  :=  F0[u] - K * F1[u]
      K         :=  K * KN
    end for
  end if

  return F[]
end recursive-FFT
```

Termination (Rekursionsende)

Zerlegung …

Rekursiver Aufruf der FFT …

Aufstieg … Zusammenfügen der Daten

Aufwandsabschätzung für 2D FFT

Für quadratische Signalfunktionen (Bilder), d.h. N^2 Bildpunkte

- Transformation $O(N^2 \cdot \log N)$ komplexe Multiplikationen
- Filterung
  - $2 \cdot O(N^2 \cdot \log N)$ FFT für $f(.)$ und $g(.)$
  - N^2 Multiplikation der Spektren F und G
  - $O(N^2 \cdot \log N)$ Rücktransformation

$$3 \cdot O(N^2 \cdot \log N) + N^2 \sim \boxed{O(N^2 \cdot \log N)}$$

Konkrete Beispiele für den Aufwand bei Transformationen (für 1D Fall)

N	N^2 (*Direct* FT)	$N \log_2 N$ (FFT)	*Computational Advantage* ($N/\log_2 N$)
2	4	2	2.00
4	16	8	2.00
8	64	24	2.67
16	256	64	4.00
32	1,024	160	6.40
64	4,096	384	10.67
128	16,384	896	18.29
256	65,536	2,048	32.00
512	262,144	4,608	56.89
1024	1,048,576	10,240	102.40
2048	4,194,304	22,528	186.18
4096	16,777,216	49,152	341.33
8192	67,108,864	106,496	630.15