Image Digitization and Its Influence on Shape Properties in Finite Dimensions

Peer Stelldinger

Universität Hamburg,Department Informatik, Arbeitsbereich Kognitive Systeme
Vogt-Kölln-Str. 30, 22527 Hamburg
stelldinger@informatik.uni-hamburg.de

Abstract: Digitale Bildverarbeitung beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie Informationen einer Realweltszene aus digitalen Bilddaten extrahiert werden können. Eines der wichtigsten Probleme ist dabei, dass die durch Abtastung erreichte Diskretisierung eine starke Informationsreduktion bedeutet. Es ist wohlbekannt, dass die Ergebnisse vieler Bildverarbeitungsmethoden besser werden, wenn die Bildauflösung erhöht wird – ein Effekt der bei hinreichend bandbegrenzten Signalen nicht auftreten dürfte. Dies zeigt, dass signaltheoretische Abtasttheoreme nur begrenzt auf typische Bilddaten anwendbar sind: Sie erfordern hinreichend glatte Bildsignale, während Bildanalyse typischer Weise gerade an den Diskontinuitäten interessiert ist, da diese Objektkanten und damit die Form der aufgenommenen Objekte repräsentieren. Alternative auf Diskontinuitäten spezialisierte, so genannte topologische Abtasttheoreme gibt es nur wenige und in der Vergangenheit waren diese auf sehr idealisierte und damit unrealistische Abtastmodelle begrenzt. In der hier zusammengefassten Dissertation wurden derartige Theoreme für realistischere Abtastprozesse hergeleitet. Damit konnte erstmals bewiesen werden, wie dicht man gewisse Objektformen abtasten muss, damit auch unter dem Einfluss von Unschärfe und Rauschen die wesentlichen Formeigenschaften korrekt rekonstruiert werden können. Die Ergebnisse sind sowohl auf zweidimensionale, als auch auf drei- und höherdimensionale Bilddaten anwendbar.

1 Einführung

In der heutigen Informationsgesellschaft nimmt die Bedeutung von synthetischen digitalen Welten stetig zu. Die Objekte in diesen Welten repräsentieren meist Oberflächen und Volumen von realen Objekten. Die vorgestellte Arbeit befasst sich mit der Korrektheit dieser Repräsentation. So lange die synthetischen Welten wie zum Beispiel in der Unterhaltungsindustrie nur der Visualisierung dienen, spielt die Korrektheit mitunter eine nur untergeordnete Rolle. Heutzutage werden synthetische Welten jedoch zunehmend für Simulationen und Berechnungen genutzt, bei denen geometrische Genauigkeit und topologische Korrektheit von maßgeblicher Bedeutung sind. Dies trifft zum Beispiel auf Anwendungen in der Medizin (z.B. Organ- und Tumor-Vermessung in Computertomographie- und Magnetresonanztomographie-Aufnahmen), der Bioinformatik (z.B. Proteinbindungssimulationen), der Robotik (z.B. Bewegungs- und Pfadplanung), und in den Ingenieurwissenschaften (z.B. Finite-Elemente-Simulationen) zu. So kann zum Beispiel ein kleines, visuell kaum wahrnehmbares Loch in der Repräsentation der Oberfläche eines Herzens zu unbrauchbaren Blutfluss-Simulationen führen. Ebenso versagen Finite-Elemente-Methoden bei Singularitäten auf den simulierten Oberflächen. Auch im Bereich des Reverse Engineering im Maschinenbau, sowie bei der visuellen Bauteilinspektion besteht die Notwendigkeit für korrekte Rekonstruktion aus den diskreten Daten. Daher ist es von grundlegender Bedeutung, wohl verstandene und mathematisch fundierte Rekonstruktionsmethoden zu haben, die die korrekte Rekonstruktion wichtiger topologischer und geometrischer Objekteigenschaften garantieren. Um die diskreten Daten, aus denen die Form des Objektes rekonstruiert werden soll, zu erhalten, wird eine zu analysierende Szene aus der kontinuierlichen Welt von einem Aufnahmesystem abgetastet und quantisiert, zum Beispiel von einer CCD-Kamera, einem Dokumentenscanner, einem Laser-Range-Scanner oder einem Computertomographie-Gerät (CT). Es existieren zwei grundlegend verschiedene Abtastungsansätze zur Digitalisierung dreidimensionaler Objekte: Volumenbasierte und oberflächenbasierte Abtastung. Bei ersterer wird ein Ausschnitt des gesamten Raumes an in einem in der Regel regulären Gitter angeordneten Punkten abgetastet, um in einem zweiten Schritt eine diskrete Approximation des gesamten abgetasteten Raumes und damit auch des relevanten Objektes abzuleiten. Typische Beispiele hierfür sind die Aufnahmen von dreidimensionalen Computer- und Magnetresonanztomogrammen, aber auch das zweidimensionale Abtasten einer Realweltprojektion mittels einer CCD-Kamera (in diesem Fall ist der betrachtete Raum die zweidimensionale Bildprojektionsebene). Der zweite Ansatz besteht darin, direkt die Oberfläche des relevanten Objektes abzutasten, so dass dieselbe durch eine Menge von Abtastpunkten approximiert wird. Die Rekonstruktion besteht nun darin, aus den Abtastpunkten eine intrinsisch zweidimensionale Repräsentation der Oberfläche abzuleiten, zum Beispiel durch Aufspannen von Polygonen zwischen den Abtastpunkten. Hier ist als Beispiel die Laser-Range-Scan-Methode zu nennen, die beispielsweise in der Robotik und im Reverse Engineering breite Anwendung findet.

Es ist offensichtlich, dass ein genaues Verständnis darüber, welcher Anteil der Information durch Digitalisierung verloren geht, wichtig ist, da man nur diejenige Information der Realweltszene wieder rekonstruieren kann, die noch in der abgetasteten und quantisierten Version enthalten ist. Dies wäre kein nennenswertes Problem, wenn die Szene bezüglich des Nyquist Kriteriums hinreichend bandbegrenzt wäre, da die Messwerte an den Abtastpunkten dann (bis auf den Quantisierungsfehler) die vollständige Information enthalten. Allerdings liegt die relevante Bildinformation in der Regel in der Lage und der Form von Objekten, d.h. sie wird repräsentiert durch die Objektkanten, welche sich in einem kontinuierlichen Bildsignal idealerweise als Diskontinuitäten manifestieren. An Diskontinuitäten ist aber das Nyquiskriterium gerade nicht erfüllt. Dies zeigt sich in der häufigen Beobachtung, dass Bildsegmentierungsergebnisse mit steigender Bildauflösung besser werden – ein Effekt, der bei einem hinreichend bandbegrenzten Signal nicht auftreten dürfte. Daher stellt sich die Frage, ob bestimmte Objekteigenschaften, wie zum Beispiel Zusammenhang und andere Formeigenschaften korrekt aus den Abtastwerten rekonstruiert werden können, wenn das Nyquist-Kriterium nicht erfüllt ist.

Inhalt der hier zusammengefassten Dissertation [Ste07] ist die Analyse, unter welchen Umständen die topologische Struktur gegebener Objekte aus einer Abtastung rekonstruiert werden kann.

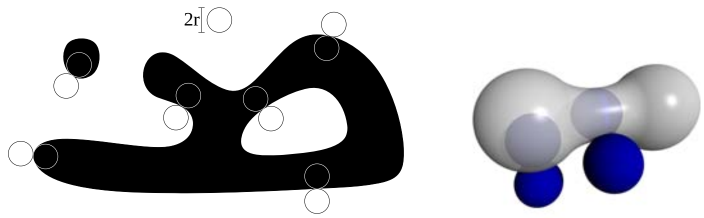


Abbildung 1: Für jeden Randpunkt einer zwei-/dreidimensionalen r-regulären Menge existiert sowohl eine innen als auch eine aussen tangential anliegende Kugel vom Radius r.

2 Vorhergehende Ansätze

Zur Lösung des Problems der formerhaltenden Digitalisierung gibt es in der Literatur nur wenige Arbeiten, die zudem noch nur für sehr idealsierte und damit unrealistische Bedingungen formuliert wurden. Die ersten Arbeiten zu dem Thema stammen von Serra [Ser82] und Pavlidis [Pav82], die zeigten, dass gewisse topologische Eigenschaften von sogenannten r-*regulären Formen* aus einer hinreichend dichten Abtastung mit einem Quadratgitter bzw. einem Hexagonalgitter rekonstruiert werden können. Beide beschränkten sich auf den zweidimensionalen Fall und verwendeten das einfachst mögliche Abtastmodell, bei dem ein Abtastpunkt genau dann als Vordergrund klassifiziert wird, wenn er innerhalb der abzutastenden Form liegt. Dieses Modell entspricht aus verschiedenen Gründen nicht der Realität. Zum einen messen Bildsensoren nicht wirklich punktuell, sondern integrieren über einen endlich großen Empfindlichkeitsbereich. Hinzu kommen weitere Ursachen für Bildunschärfe, wie Beugungseffekte an der Blende und Defokus. Zum anderen verfälscht Rauschen die Messwerte. Schliesslich ist nicht nur das Abtastmodell stark idealisiert, sondern auch die betrachtete Klasse an zulässigen Formen: Die Abtasttheoreme gelten nur für r-reguläre Formen, was bedeutet, dass die Krümmung des Randes beschränkt ist dieser somit weder Ecken noch Kreuzungen (wie z.B. bei einem Schachbrett) enthalten darf. Formal ist eine zweidimensionale r-reguläre Form dadurch definiert, dass man an jedem Randpunkt der Form sowohl innen als auch aussen eine Kreisscheibe vom Radius r anlegen kann, so dass diese den Rand in keinem weiteren Punkt berühren. Dies lässt sich auch auf höhedimensionale Räume erweitern:

Definition 1 *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst* r-regulär, *wenn für jeden Randpunkt x zwei tangential anliegende offene Kugeln B_1, B_2 vom Radius r existieren mit $B_1 \subset A$ und $B_2 \subset A^c$, so dass x auf dem Rand beider Kugeln liegt, d.h. $x \in \partial B_1$ und $x \in \partial B_2$ (siehe Abbildung 1).*

Einer der fortschrittlichsten der vorhergehenden Ansätze ist der von Latecki et al. [Lat97], der wieder zweidimensionale r-reguläre Formen betrachtet, aber von dem Modell der idealen Abtastung abweicht und stattdessen den Wert an jedem Abtastpunkt von dem Anteil der Form an der jeweiligen Pixelfläche abhängig macht, wodurch die bildsensorbedingte Unschärfe in erster Näherung modelliert wird.

3 Topologische Abtasttheoreme

In der hier vorgestellten Arbeit wurden die verschiedenen bereits bekannten topologischen Abtasttheoreme verglichen und es wurde eine gemeinsame theoretische Basis der äusserst unterschiedlichen Ansätze entwickelt. So basieren nahezu alle vorangehenden Arbeiten teilweise unabhängig voneinander auf r-regulären Formen, allerdings wurden hierfür sehr unterschiedliche, wenn auch äquivalente, Definitionen verwendet. Dies zeigt, wie grundlegend diese Formklasse für den Erhalt topologischer Eigenschaften bei der Digitalisierung ist. Die Einschränkung auf r-reguläre Formen ist jedoch für praktische Anwendungen zu restriktiv, da dies zum Beispiel in 3D bedeutet, dass ein Objekt keine Ecken, Kanten oder sonstige nicht-glatte Oberflächenteile haben darf. Dies bedeutet auch, dass Partitionen des Bildes in drei oder mehr Regionen (sogenannte Segmentierungen) nicht möglich sind, da jedes Zusammentreffen von mindestens drei Regionen zwingend erfordert, dass mindestens eine Region einen nicht-glatten Rand hat. Daher wurden in dieser Arbeit mit den r-halbregulären und den r-stabilen Formen neue Formklassen eingeführt, die diese Nachteile nicht teilen.

Definition 2 *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst r-*stabil *wenn ihr Rand ∂A mit einem geschlossenen Ball mit beliebig gewählten Radius $s \leq r$ dilatiert werden kann, ohne dass sich der Homotopietyp ändert. Eine Partitionierung des Raumes $\mathbb{R}^n$ heisst r-stabil, wenn jede ihrer Regionen r-stabil ist.*

Anders gesagt bedeutet r-Stabilität, dass man jeden Randpunkt durch eine s-Kugel ersetzen kann, ohne dass vorher getrennte Randbereiche sich nun berühren, siehe auch Abbildung 2(a). Diese Verallgemeinerung gegenüber r-regulären Formen schliesst nicht nur Formen mit Ecken und Kanten ein, wie zum Beispiel beliebige Polyhedra (Abbildung 2(b)), sondern sogar gewisse fraktale Formen wie die Kochsche Schneeflocke (Abbildung 2(c)). Des weiteren lassen sich Partitionierungen mit mehr als zwei Regionen modellieren, was für die Anwendung von topologischen Abtasttheoremen für den Bereich der Bildsegmentierung zwingend erforderlich ist.

Da es verschiedene Methoden der Generierung von Abtastwerten gibt, wurden in der vorliegenden Arbeit die unterschiedlichen üblichen Abtastmethoden verglichen und bezüglich der auftretenden Abtastfehler analysiert. Dies beinhaltet sowohl n-dimensionale reguläre (siehe Abbildung 3) als auch irreguläre Abtastgitter, aber auch beliebige nicht an Gitter gebundene Abtastungen, wie zum Beispiel Abtastungen des Randes (siehe Abbildung 4).

Schliesslich wurde für unterschiedliche verbreitete Rekonstruktionsmethoden untersucht, unter welchen Umständen welche topologischen Formeigenschaften erhalten bleiben.

Damit gelang es in der Arbeit, für die verschiedenen Kombinationen von Abtast- und Rekonstruktionsmethoden, zahlreiche Abtasttheoreme (insgesamt 20 Theoreme und 17 Korollare) zu beweisen, die weit über die vorangehenden Forschungen herausreichen.

So wurde gezeigt, dass der klassische Ansatz der idealen Digitalisierung r-regulärer Formen auf beliebige n-dimensionale Räume und auf beliebige, auch irreguläre Abtastgitter (wie sie zum Beispiel auf der menschlichen Retina auftreten) erweitert werden kann, ohne

(a) (b) (c)

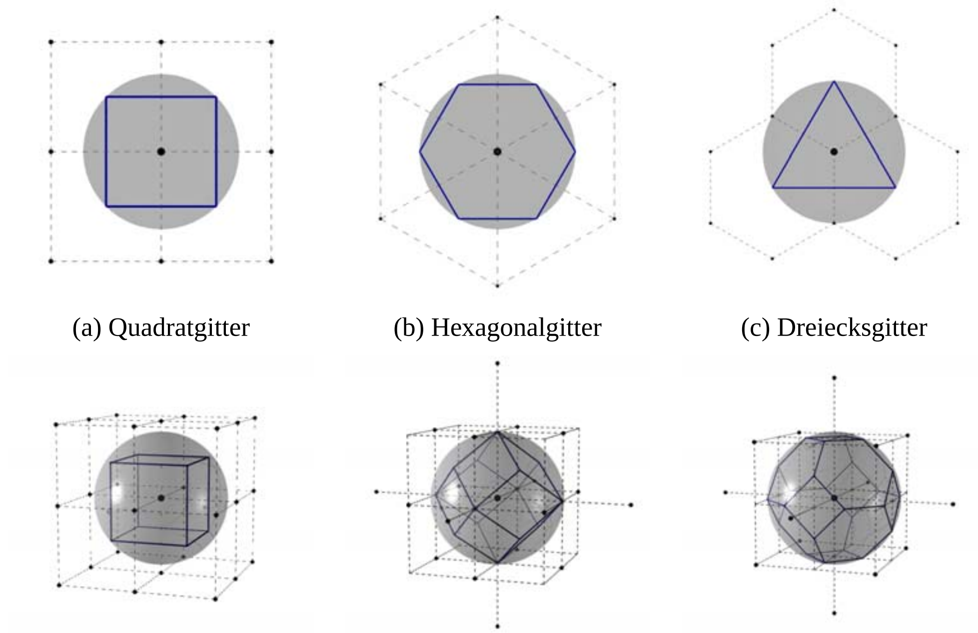
Abbildung 2: (a) Bei einer r-stabilen Partitionierung bleibt jede Region topologisch unverändert, wenn der Rand um weniger als r verbreitert wird (hellgrau), während eine zu starke Verbreiterung der Regionenränder die Topologie verändern kann (dunkelgrau). Beispiele für r-stabile Formen sind r-reguläre Formen, dreidimensionale Polyhedren (b) und auch bestimmte fraktale Formen wie die Kochsche Schneeflockenkurve (c).

dass gewisse topologische Eigenschaften wie z.B. Nachbarschaftsrelationen von Regionen zerstört werden.

Diese Ergebnisse wurden auf die deutlich allgemeineren r-halbregulären Formen erweitert, wodurch erstmals der Erhalt topologischer Eigenschaften bei nichtregulären Formen nachgewiesen wurde.

Dies bedeutet jedoch nicht den Erhalt sämtlicher topologischer Information (formal wäre dies erreicht, wenn es einen Homöomorphismus des einbettenden Raumes in sich selbst gibt, der das zu digitalisierende Objekt auf dessen Rekonstruktion abbildet). Die Frage, ob dies in drei und höheren Dimensionen überhaupt möglich ist, blieb in den letzten zwanzig Jahren unbeantwortet. In der vorgestellten Dissertation wurde gezeigt, dass es nicht möglich ist, mit den bisher betrachteten Ansätzen in drei und höheren Dimensionen die vollständige topologische Information zu rekonstruieren, sofern man – wie üblich – ein kartesisches Abtastgitter verwendet und die Rekonstruktion als Vereinigung von (Hyper-)Voxeln definiert. Dagegen reicht sowohl die Wahl gewisser alternativer Abtastgitter, wie dem FCC- und dem BCC-Gitter, als auch die Wahl anderer Rekonstruktionsmethoden (zum Beispiel Varianten des Marching Cubes Algorithmus) aus, um vollständigen Topologieerhalt zu beweisen (siehe Abbildung 5(a,b)). Damit wurden erstmals Abtasttheoreme formuliert, die bei einer dreidimensionalen Volumenabtastung garantieren, dass die vollständige topologische Information erhalten bleibt.

Während diese Ergebnisse deutlich über den vorhergehenden Stand der Forschung hinausgehen, teilen sie noch das Problem, dass nur idealisierte Abtastmethoden Verwendung finden, ohne dass zum Beispiel Weichzeichnungseffekte berücksichtigt werden. Daher wurde als nächstes der Einfluss von Unschärfe auf das Digitalisierungsergebnis untersucht. Es gelang, für verschiedene übliche Abtastgitter in zwei und in drei Dimensionen (einschliesslich den kartesischen Gittern, sowie dem FCC- und dem BCC-Gitter) zu beweisen, dass und wie eine hinreichend reguläre Form ohne Verlust der Nachbarschaftsrelation rekonstruiert werden kann, selbst wenn das Bildsignal mit einer beliebigen radialsymmetri-



(a) Quadratgitter (b) Hexagonalgitter (c) Dreiecksgitter

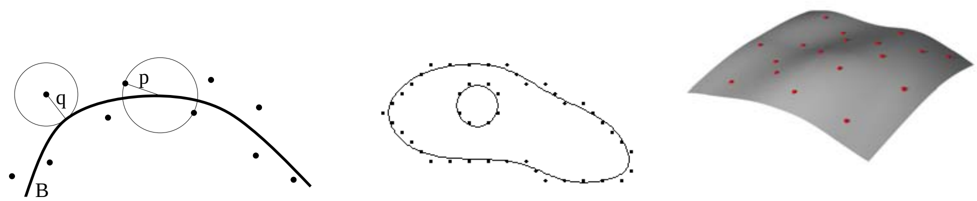
(d) Kubisches Gitter (e) FCC Gitter (f) BCC Gitter

Abbildung 3: Form der Pixel/Voxel bei unterschiedlichen regulären Abtastgittern bei identischer Abtastdichte, d.h. gleichem Überdeckungsradius (dargestellt durch Kreis/Kugel).

schen, Punktverteilungsfunktion endlicher Größe weichgezeichnet wird. Es wurden ferner der Einfluss von Rauschen auf den Rekonstruktionsfehler und die Frage, in welchem Maße dieser durch Weichzeichnen reduziert werden kann, analysiert.

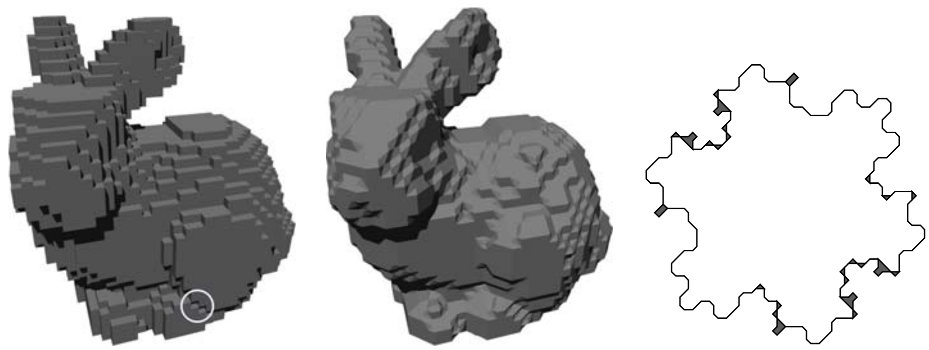
Während moderates Rauschen damit gut beherrscht werden kann, zeigte sich, dass starkes Rauschen es unmöglich macht, eine Form auf diese Weise topologisch korrekt zu rekonstruieren. Dies liegt vor allem an der Lokalität der gitterbasierten Rekonstruktionsmethoden. Daher wurden alternative Rekonstruktionsmethoden untersucht und entwickelt, die nicht auf der rein lokalen Konfiguration direkt benachbarter Abtastpunkte basieren, sondern eine grössere lokale Umgebung einbeziehen. Dies erlaubte auch, nicht nur gitterbasierte, sondern beliebige Abtastungen (wie z.B. einer Oberflächenabtastung mittels eines Laser-Range-Scanners) zu verwenden.

Somit wurden zwei bisher getrennte Forschungsfelder zusammengeführt: Die Rekonstruktion aus gitterbasierten Abtastungen und die Rekonstruktion aus Randabtastungen. Gerade in letzterem gab es in den vergangenen Jahren zahlreiche Fortschritte [DG03][NSW06] [CL06], die es zum Teil auch erlauben, Oberflächen aus verrauschten Abtastdaten zu rekonstruieren. Doch bisher waren diese Ansätze nur auf relativ dichte Abtastungen von Objekten mit beschränkter Oberflächenkrümmung anwendbar.



(a) (b) (c)

Abbildung 4: (a) Der maximale Abstand eines Randpunktes zum nächsten Abtastpunkt wird mit p und der maximale Abstand eines Abtastpunktes zum nächsten Randpunkt wird mit q bezeichnet. (b) Randabtastung in 2D, (c) Randabtastung in 3D.



(a) (b) (c)

Abbildung 5: Rekonstruktion eines mit einem kubischen Gitter abgetasteten CT-Datensatzes des Stanford Bunnys durch Vereinigung der Voxel (a) und mit Hilfe des *Marching Cubes* Algorithmus (b), sowie Rekonstruktion einer mit einem Quadratgitter abgetasteten Koch-Schneeflocke mit Hilfe von α-shapes (c).

In der vorgestellten Arbeit wurde ein Abtasttheorem bewiesen, das für beliebige Abtastmethoden – auch unter dem Einfluss von Rauschen und Unschärfe – Grenzen definiert, wie fein Objektstrukturen sein dürfen, damit sie topologisch korrekt rekonstruiert werden können. Dabei sind beliebige n-dimensionale r-stabile Objektformen erlaubt. Damit stellt dies das erste Abtastheorem dar, das im drei- und höherdimensionalen Fall auch für nicht r-reguläre Formen den Erhalt der vollständigen topologischen Information garantiert. Dieser allgemeine Algorithmus, die sogenannte *thinned* (α, β)*-shape reconstruction* lässt sich auch auf gitterbasierte Abtastungen verwenden, da man hieraus leicht eine Abtastung des Randes ableiten kann (siehe Abbildungen 5(c) und 6). Im Vergleich zu vorherigen Arbeiten wird eine topologisch korrekte Rekonstruktion bereits bei deutlich weniger dichten Abtastungen garantiert.

(a) (b)

Abbildung 6: (a) 2D-Kantenrekonstruktion aus Canny-Kantenpunkten und (b) 3D-Rekonstruktion aus verrauschten Oberflächenabtastpunkten mit Hilfe von (α, β)-*shapes*.

4 Zusammenfassung

In der hier vorgestellten Arbeit werden verschiedene Ansätze für topologieerhaltene Digitalisierung zusammengeführt und in mehrerer Hinsicht stark weiterentwickelt. Damit sind die neuen Ergebnisse weitaus besser auf reale Daten anwendbar. So wurden erstmals Abtasttheoreme formuliert, die für Formen mit nicht-glatter Oberfläche zeigen, ob und wie selbst unter dem Einfluss von Rauschen und Weichzeichnungseffekten die toplogischen Informationen aus einer gegebenen Abtastung rekonstruiert werden können

Literatur

[CL06] F. Chazal und A. Lieutier. Topology guaranteeing manifold reconstruction using distance function to noisy data. In *Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry*, Seiten 112–118, 2006.

[DG03] T.K. Dey und S. Goswami. Tight Cocone: A Water-tight Surface Reconstructor. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 3:302–307, 2003.

[Lat97] L.J. Latecki. *Discrete Representation of Spatial Objects in Computer Vision*. Kluwer, 1997.

[NSW06] P. Niyogi, S. Smale und S. Weinberger. Finding the Homology of Submanifolds with High Confidence from Random Samples. *Discrete and Computational Geometry*, 2006.

[Pav82] T. Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Computer Science Press, 1982.

[Ser82] Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.

[Ste07] P. Stelldinger. *Image Digitization and its Influence on Shape Properties in Finite Dimensions*. Dissertation, Universität Hamburg, 2007.

Peer Stelldinger schloss 2003 sein von der Studienstiftung des Deutschen Volkes gefördertes Studium der Informatik (Ergänzungsfach Mathematik) an der Universität Hamburg ab. Im Anschluss arbeitete er als Doktorand an der Universität Hamburg. 2005 forschte er im Rahmen eines vom DAAD geförderten Gastaufenthaltes an der Temple University, Philadelphia. Seine Dissertation hat er 2007 am Fachbereich Informatik der Universität Hamburg mit Auszeichnung abgeschlossen. Zu seinen Forschungsinteressen zählen Diskrete Geometrie und Topologie, insbesondere topologieerhaltende Abtasttheoreme, aber auch lineare Signalverarbeitung und Bildsegmentierungsmethoden. Er begutachtet regelmäßig Beiträge für internationale Fachzeitschriften (PRL, CVIU, IVC, JMIV) und ist Autor von über 20 Publikationen.

Seit 2007 forscht und unterrichtet Herr Stelldinger als Vertretungsprofessor an der Universität Hamburg und leitet in dieser Funktion unter anderem das von ihm initiierte DFG-Projekt „Herleitung, Implementation und Validierung beweisbar korrekter Methoden zur Oberflächen- und Volumenrekonstruktion unter realen Bedingungen".