Voronoi Diagrams, Delaunay Triangulations and Alpha Shapes

12.11.2008

Nils Kubera 5886728 (6kubera)

Inhalt

- Einleitung
- Definitionen
- Algorithmen zur Generierung
- Beschränkungen
- Aktualität
- Quellen

Inhalt

- **Einleitung**
- Definitionen
- Algorithmen zur Generierung
- Beschränkungen
- Aktualität
- Quellen

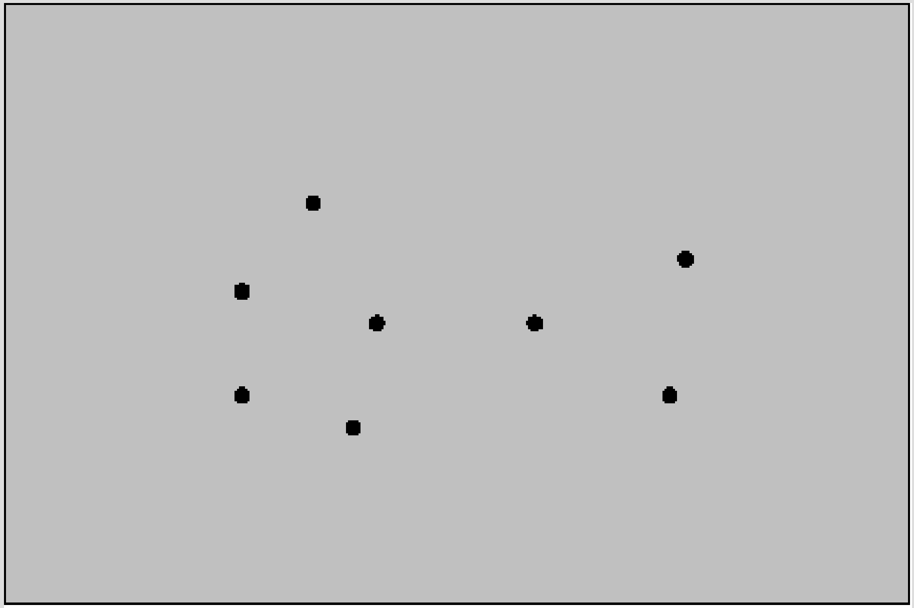
Einleitung

- Themen
  - Voronoi Diagramm
  - Delaunay Triangulation
  - Alpha Shapes

- Geometrische Methoden über Punktwolken in $\mathbb{R}^d$.

Einleitung

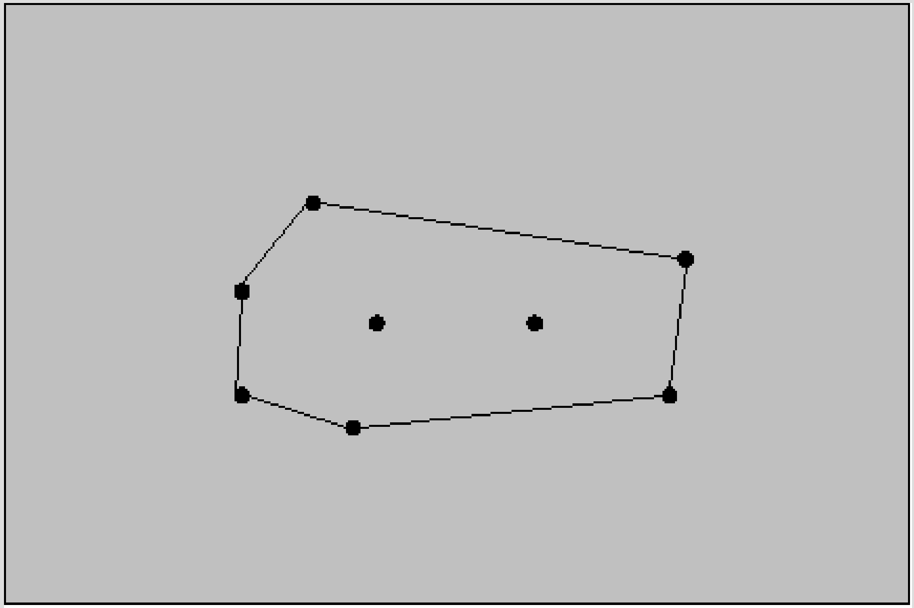
- Ziel:
  - Generierung einer „Begrenzung“ einer Punktwolke aus $\mathbb{R}^{d}$.



Punktwolke aus $\mathbb{R}^2$

Einleitung

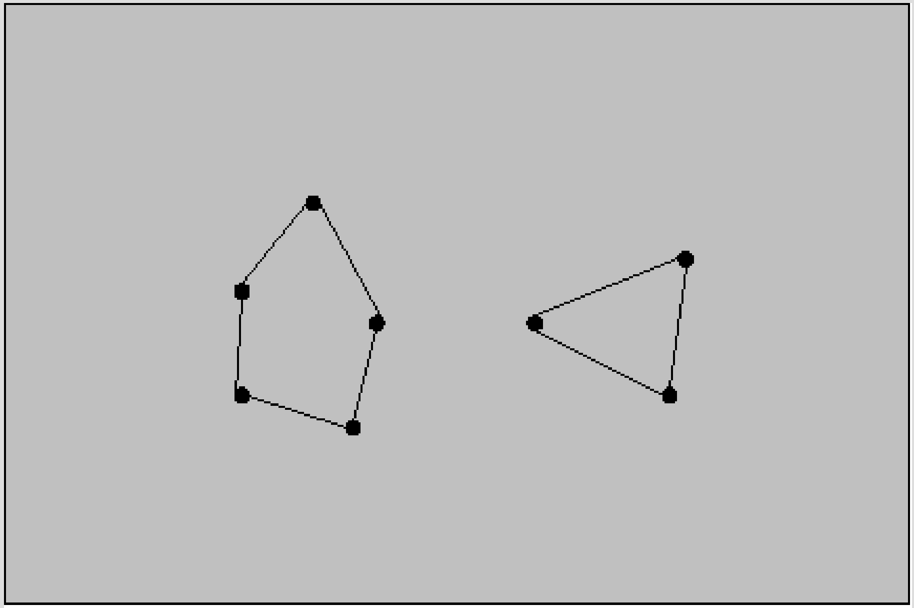
- Ziel:
  - Generierung einer „Begrenzung“ einer Punktwolke aus $\mathbb{R}^{d}$.



Mögliche „Begrenzung“

Einleitung

- Ziel:
  - Generierung einer „Begrenzung“ einer Punktwolke aus $\mathbb{R}^{d}$.



Andere mögliche „Begrenzung“

Inhalt

- Einleitung
- **Definitionen**
- Algorithmen zur Generierung
- Beschränkungen
- Aktualität
- Quellen

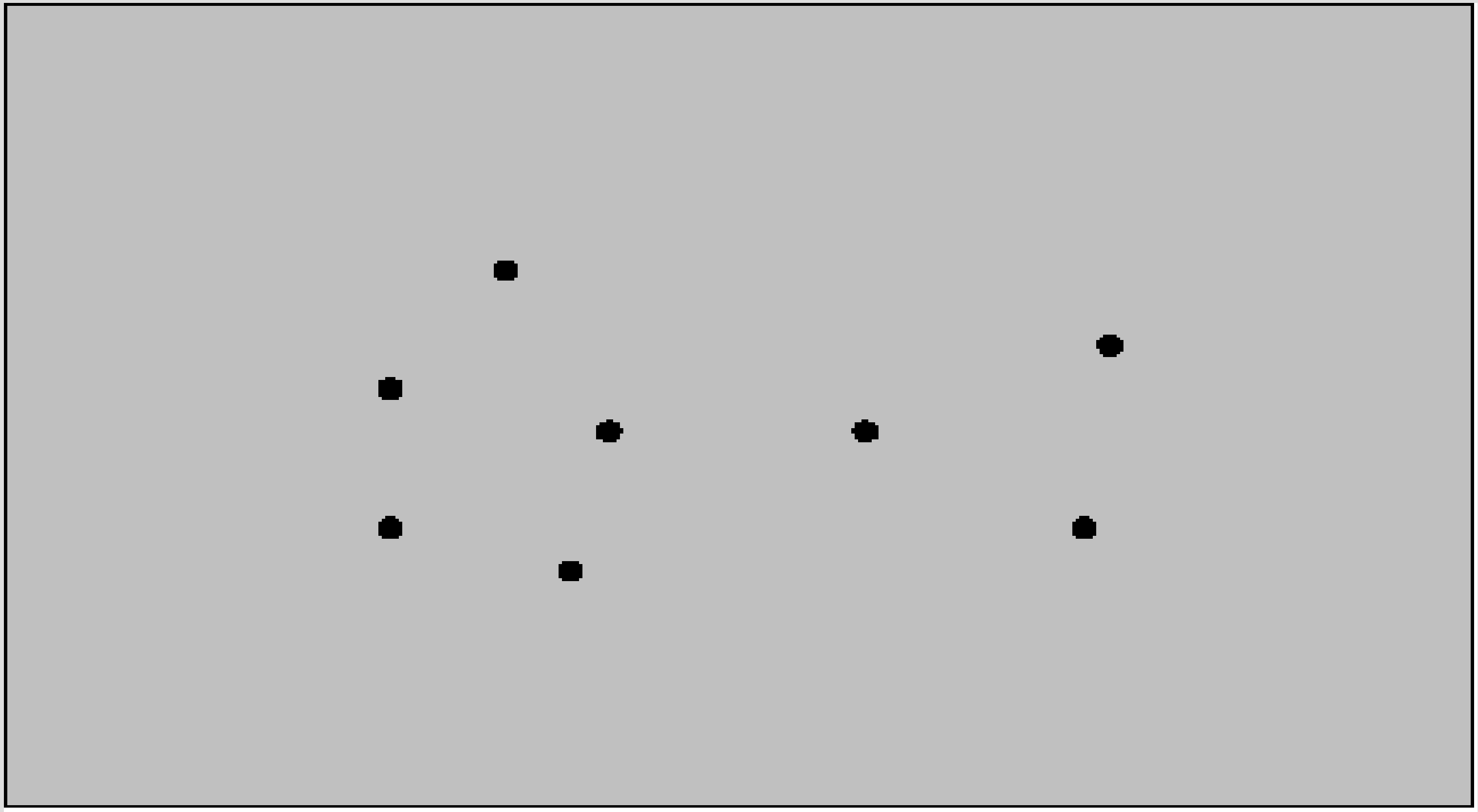
Definitionen

S = eine Menge von n Punkten aus $\mathbb{R}^d$.

$$S \subset \mathbb{R}^d$$

S ist eine „Punktwolke“ in den meisten Anwendungsfällen ist d=2 oder d=3.

Definitionen



$S \subset \mathbb{R}^d$ mit d=2 und n=8

Definitionen

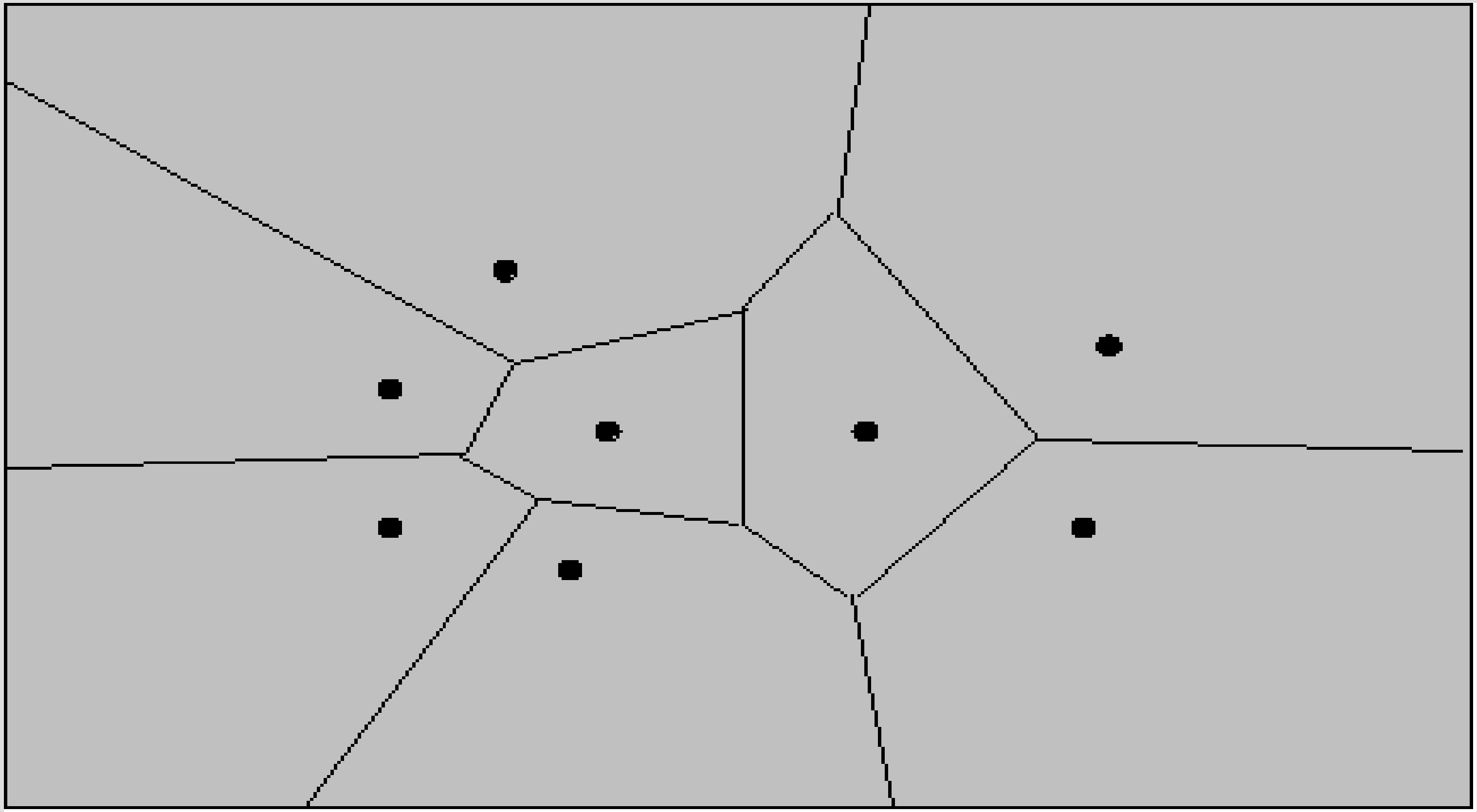
Voronoi-Diagramm:

Zerlegung des Raumes $\mathbb{R}^d$ in d-Polyeder.

Jeder d-Polyeder enthält genau ein Zentrum $z \in S$.

Jeder Punkt p enthalten im d-Polyeder mit Zentrum z_0 ist näher an z_0 als an irgendeinem anderen $z \in S$.

Definitionen



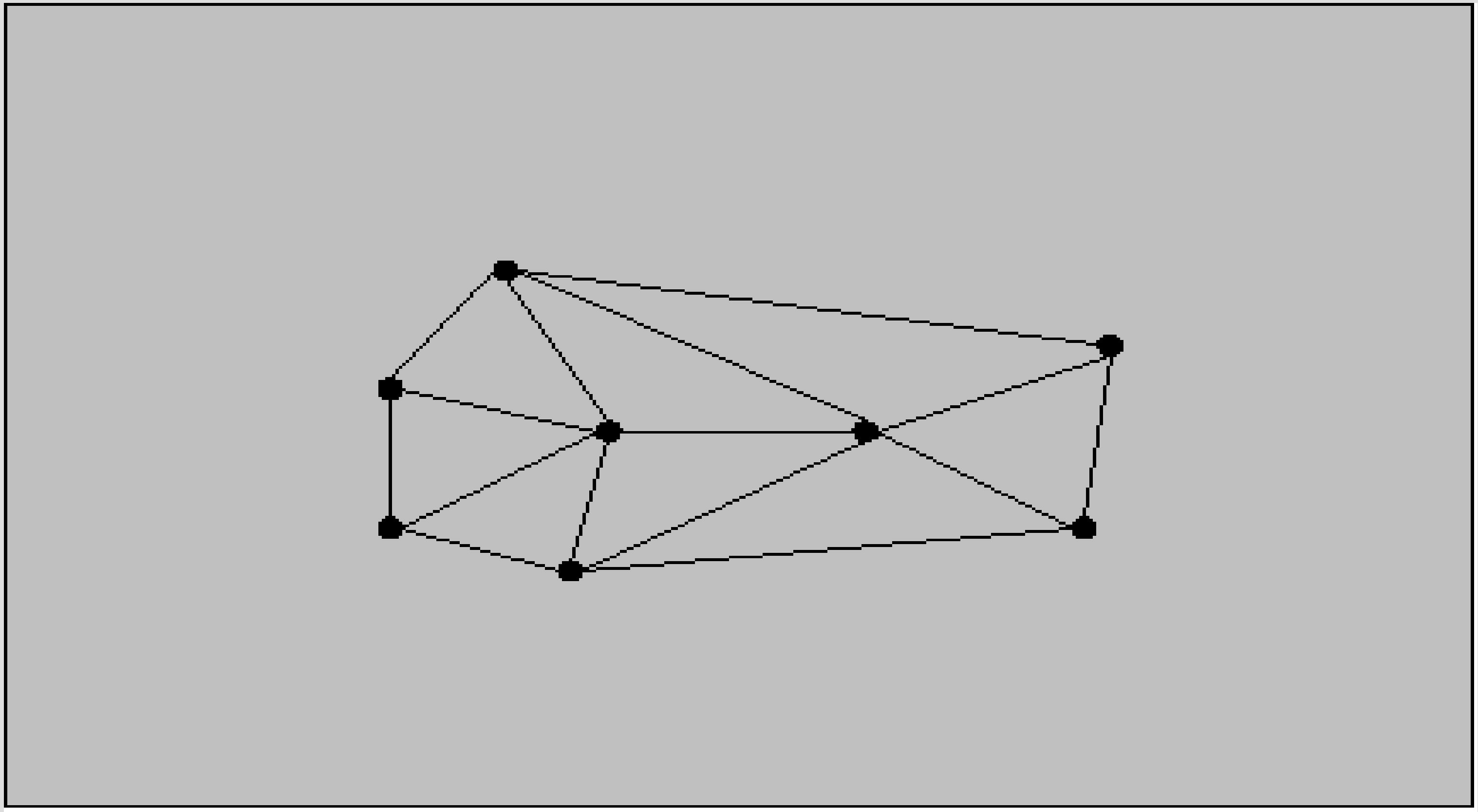
Voronoi-Diagramm für S

Definitionen

Delaunay-Triangulation DT(S)

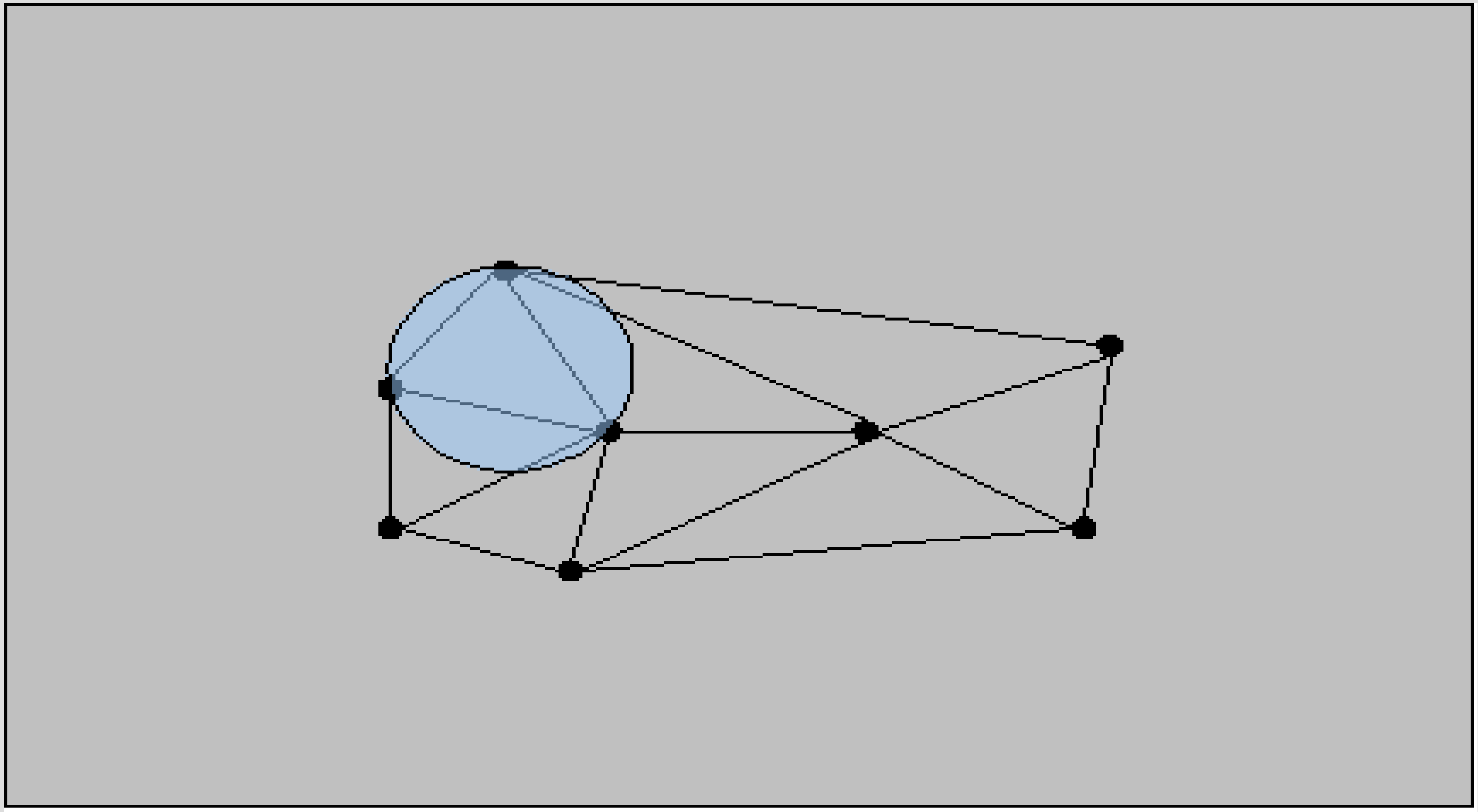
Verbindung aller Punkte aus S zu Dreiecken T, so dass der Umkreis von T keine weiteren Punkte aus S enthält.

Definitionen



Delaunay-Triangulation für S

Definitionen



Delaunay-Triangulation für S

Definitionen

Zusammenhang:

Die Delaunay-Triangulation und das Voronoi-Diagramm sind dual zueinander.

Definitionen

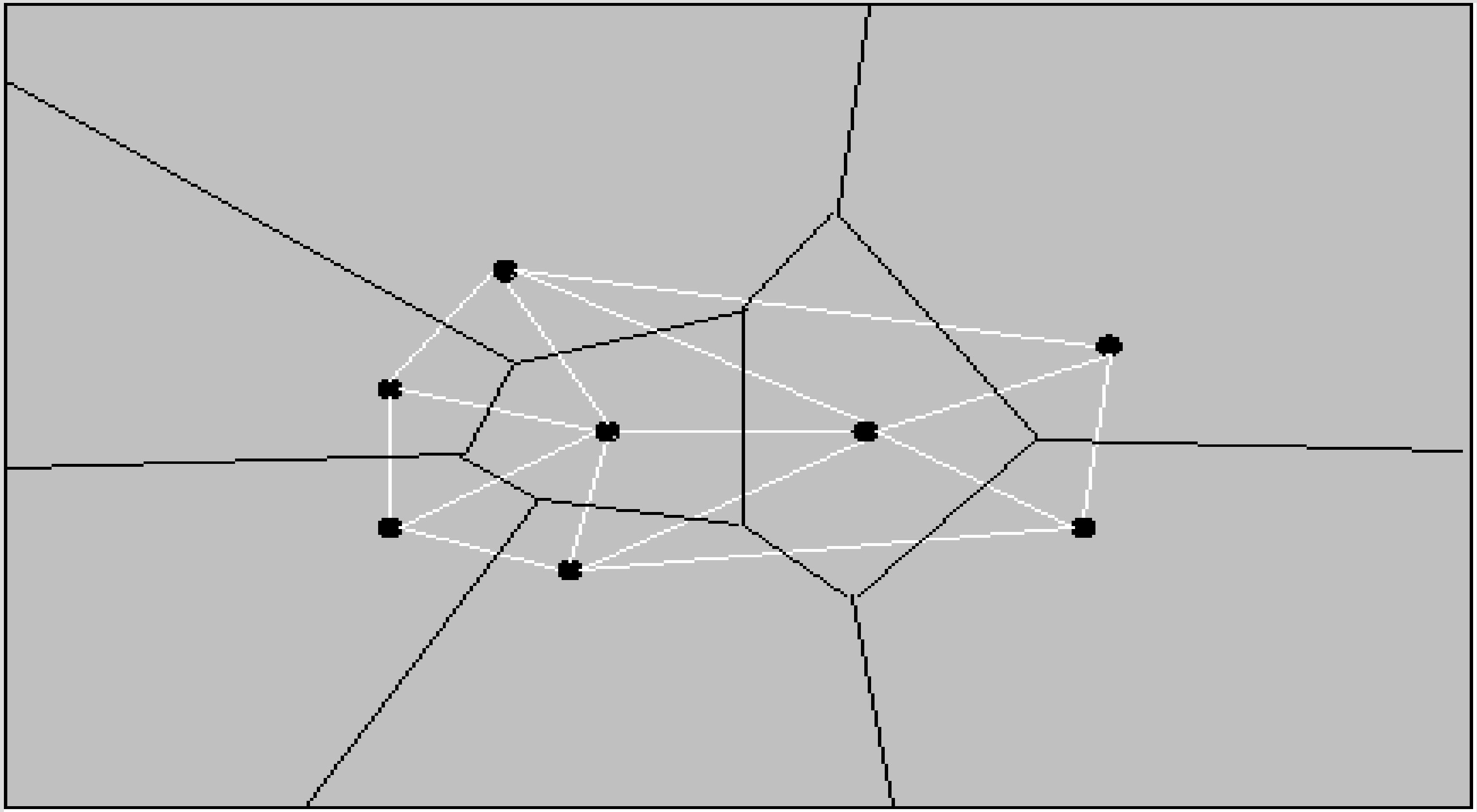
Dualität bei Graphen:

Graph *G* und *H* sind dual :
Für jede Fläche F aus *G* enthält *H* einen Knoten,

für zwei aneinander grenzende Flächen F' und F'' aus *G* enthält *H* eine Kante, die die Knoten verbindet

und umgekehrt.

Definitionen



DT und Voronoi-Diagramm

Definitionen

Alpha Shapes:

Methode zur Generierung einer möglichen „Hülle“ von S genannt Alpha Shape mit einem Parameter α.

Das Alpha Shape ist nicht gezwungenermaßen Konvex oder verbunden.

Definitionen

α - Wert für den gilt: $0 \leq \alpha \leq \infty$

α-ball - „Kugel“ der Dimension $\leq d$ mit
Radius α.
Für $\alpha=0$ Punkt,
Für $\alpha=\infty$ Teilung des Raums

Definitionen

Verschiedene α-balls

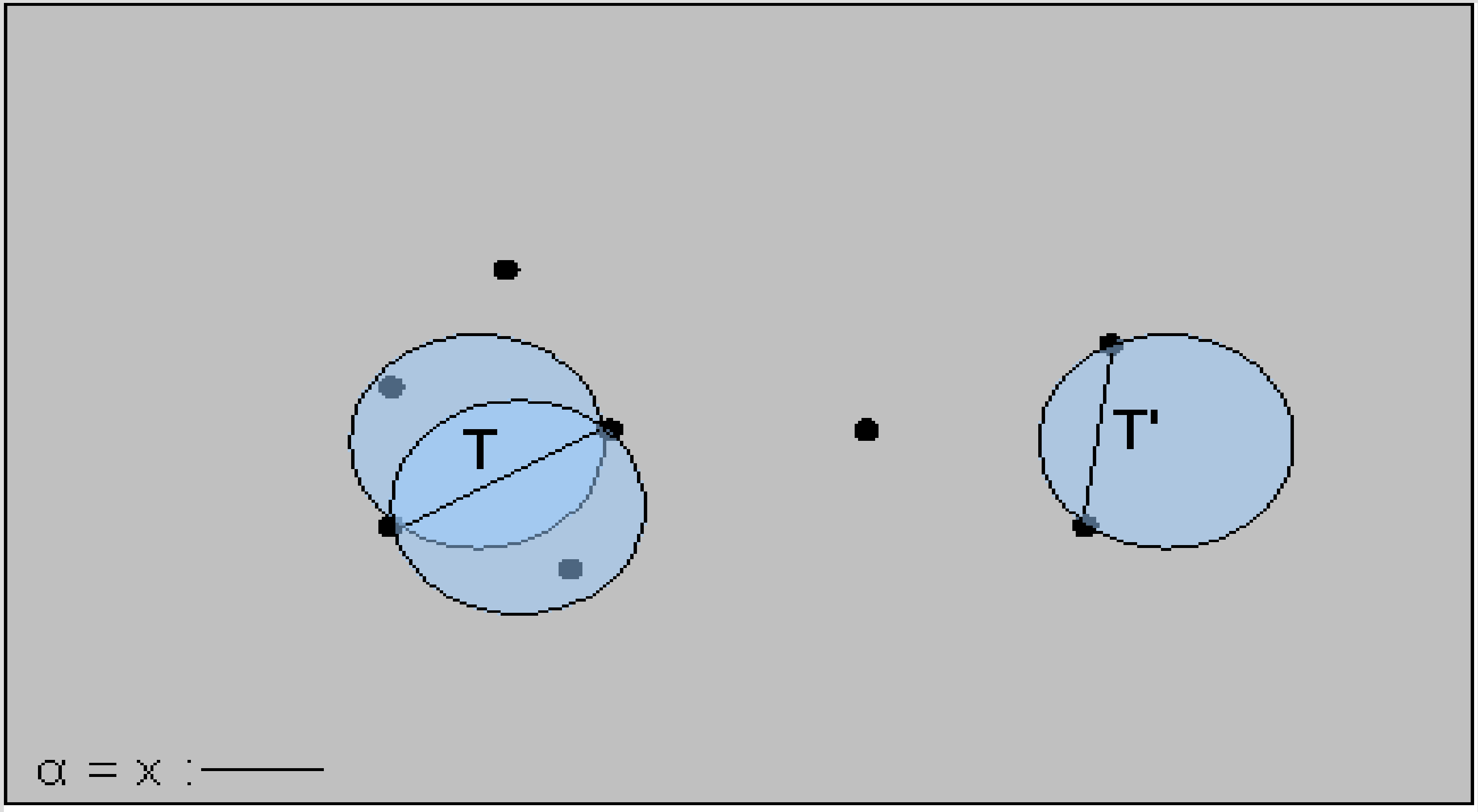
Definitionen

k-simplex - Polytop der Dimension k mit k+1 Ecken.

Für k=0 Punkt, k=1 Kante, k=2 Dreieck, k=3 Tetraeder.

ein k-simplex T ist α-*exposed* wenn es einen α-ball gibt auf dessen Hülle alle Ecken aus T und kein Punkt p aus S in seinem inneren liegen.

Definitionen



α-exposed?

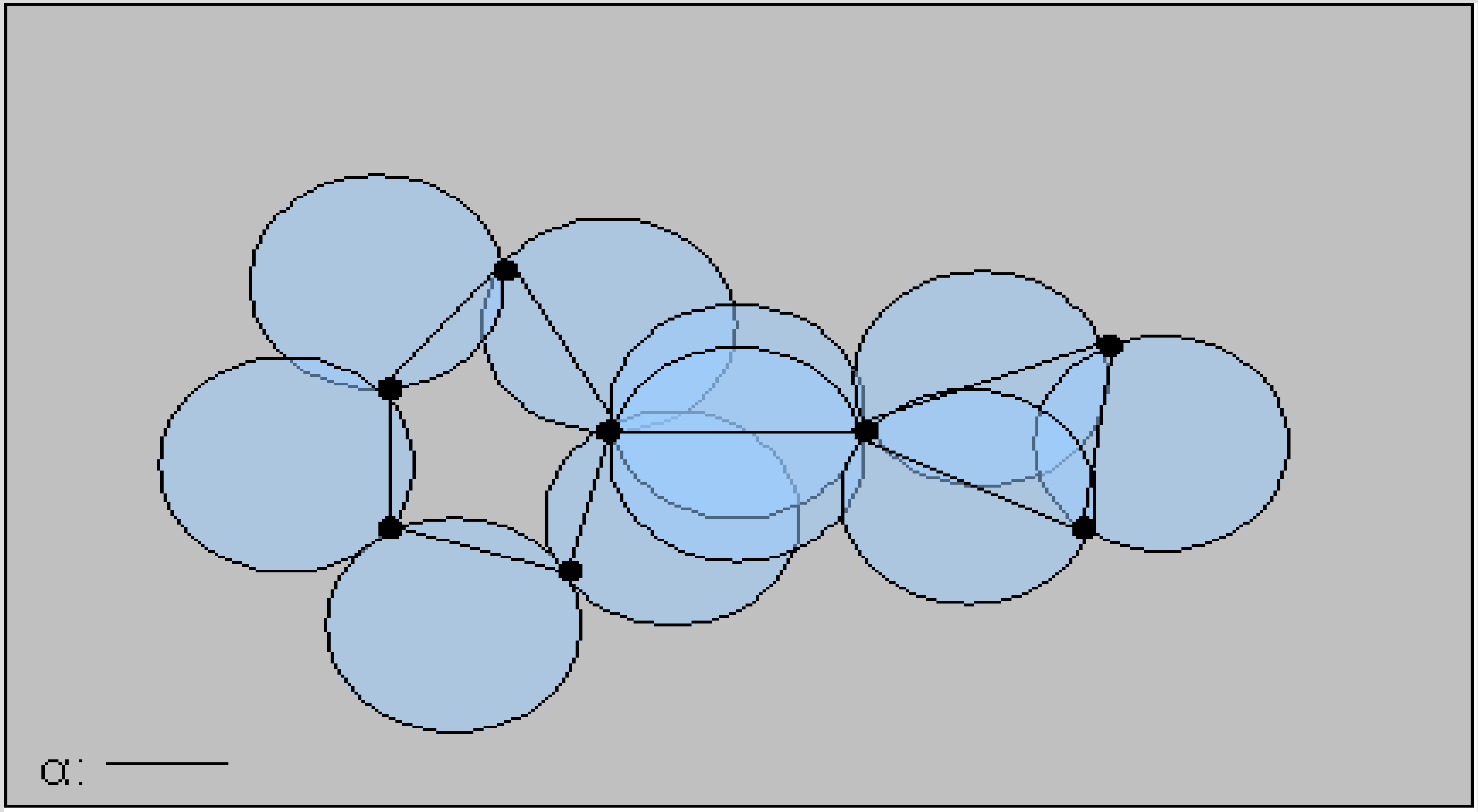
Definitionen

Die Hülle δS_{α} des Alpha Shapes von S sind alle k-Simplizes mit $0 \leq k < d$, die α-exposed sind.

Einlage

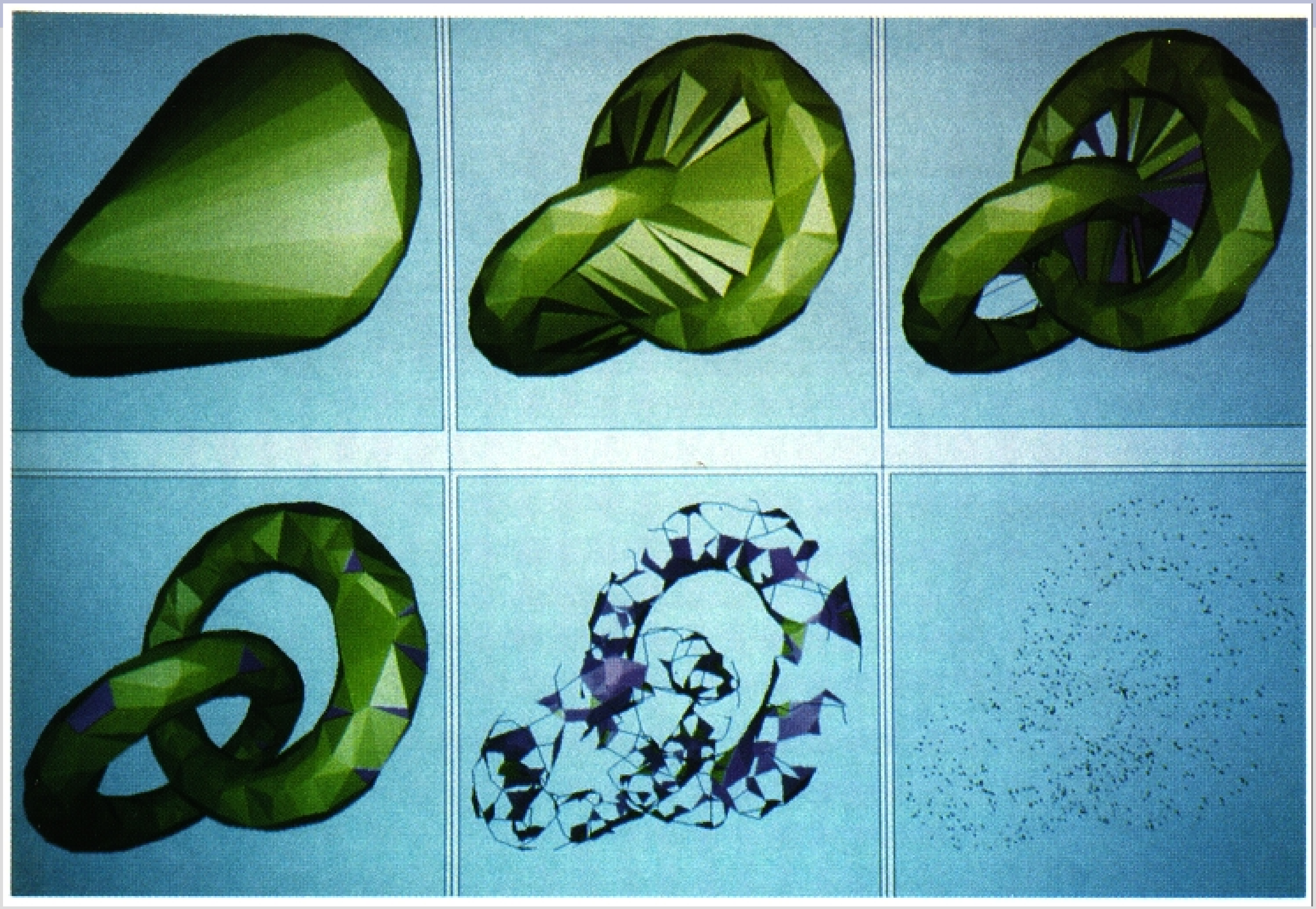
Konstruktion einer Punktwolke und eines Alpha Shape an der Tafel.

Definitionen



Alpha Shape für 2D-Beispiel

Definitionen



Alpha Shape für 3D-Beispiel

Definitionen

Für $\alpha = \infty : S_\alpha = \text{conv } S$

Für $\alpha = 0 : S_\alpha = S$

Definitionen

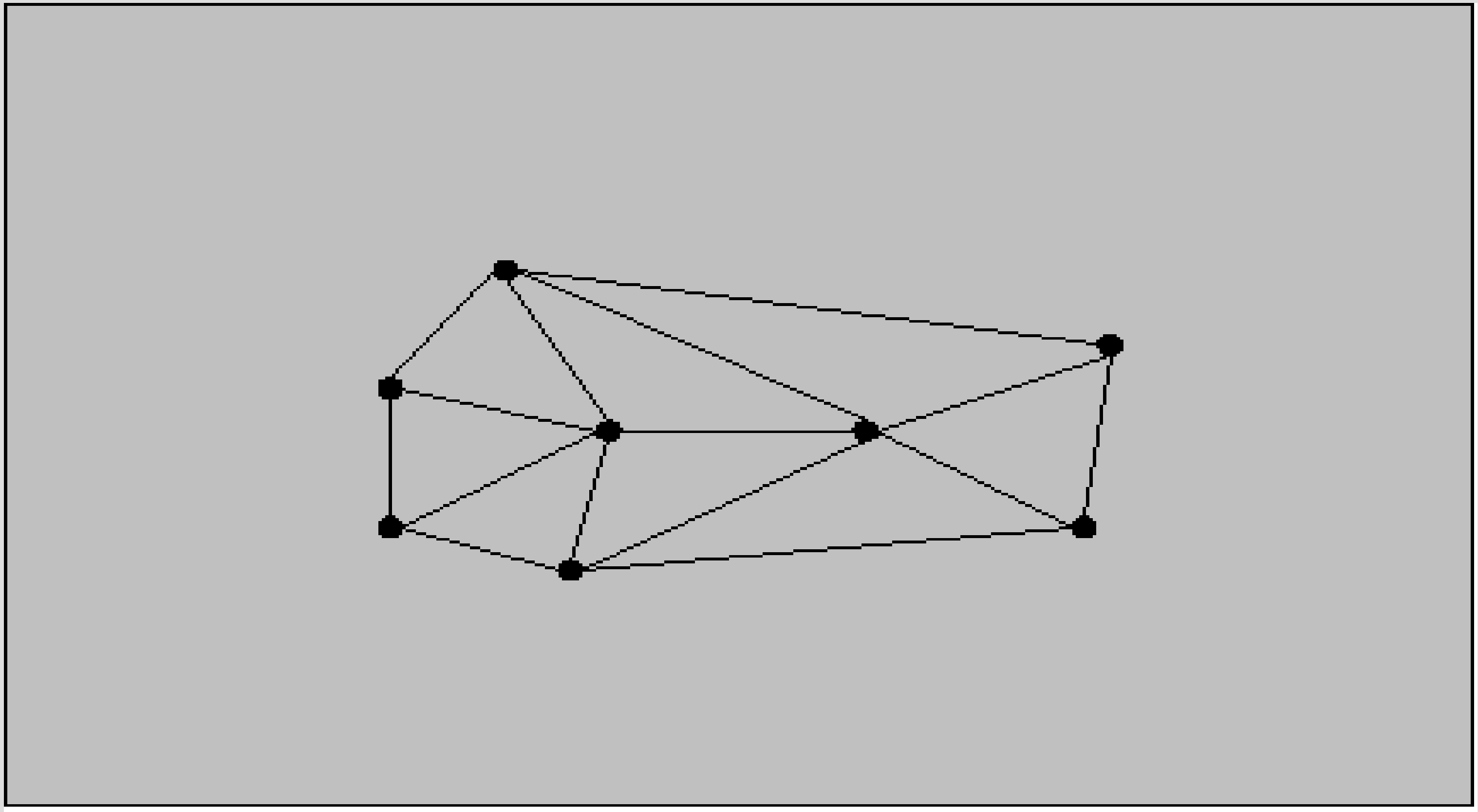
α-Complex C_α: Alle Simplizes T aus DT(S) für die gilt:

(1) Umkreisradius$_T$ < α und Umkreisfläche$_T$ enthält keinen Punkt aus S

oder

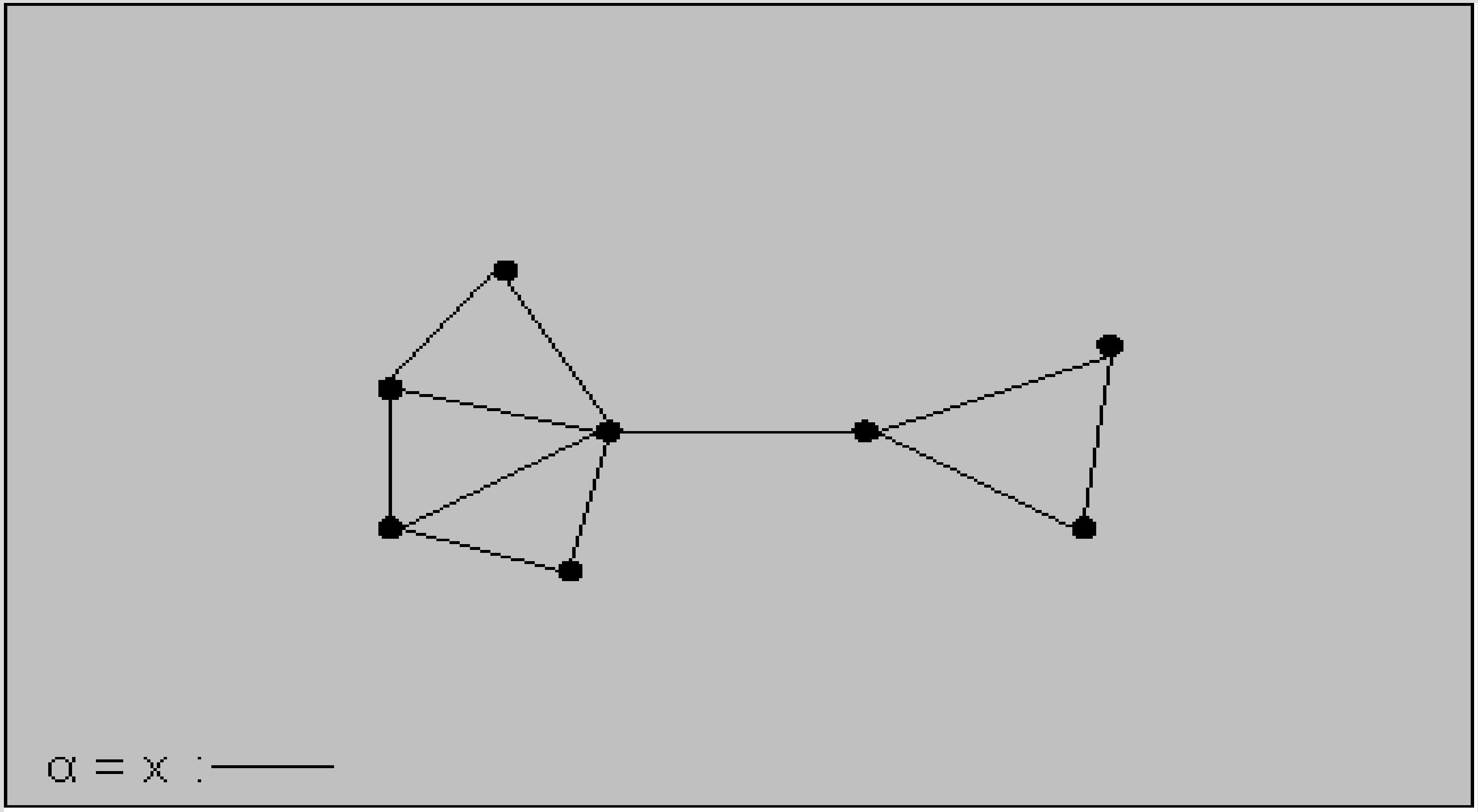
(2) T ist Teil eines anderen Simplex in C_α.

Definitionen



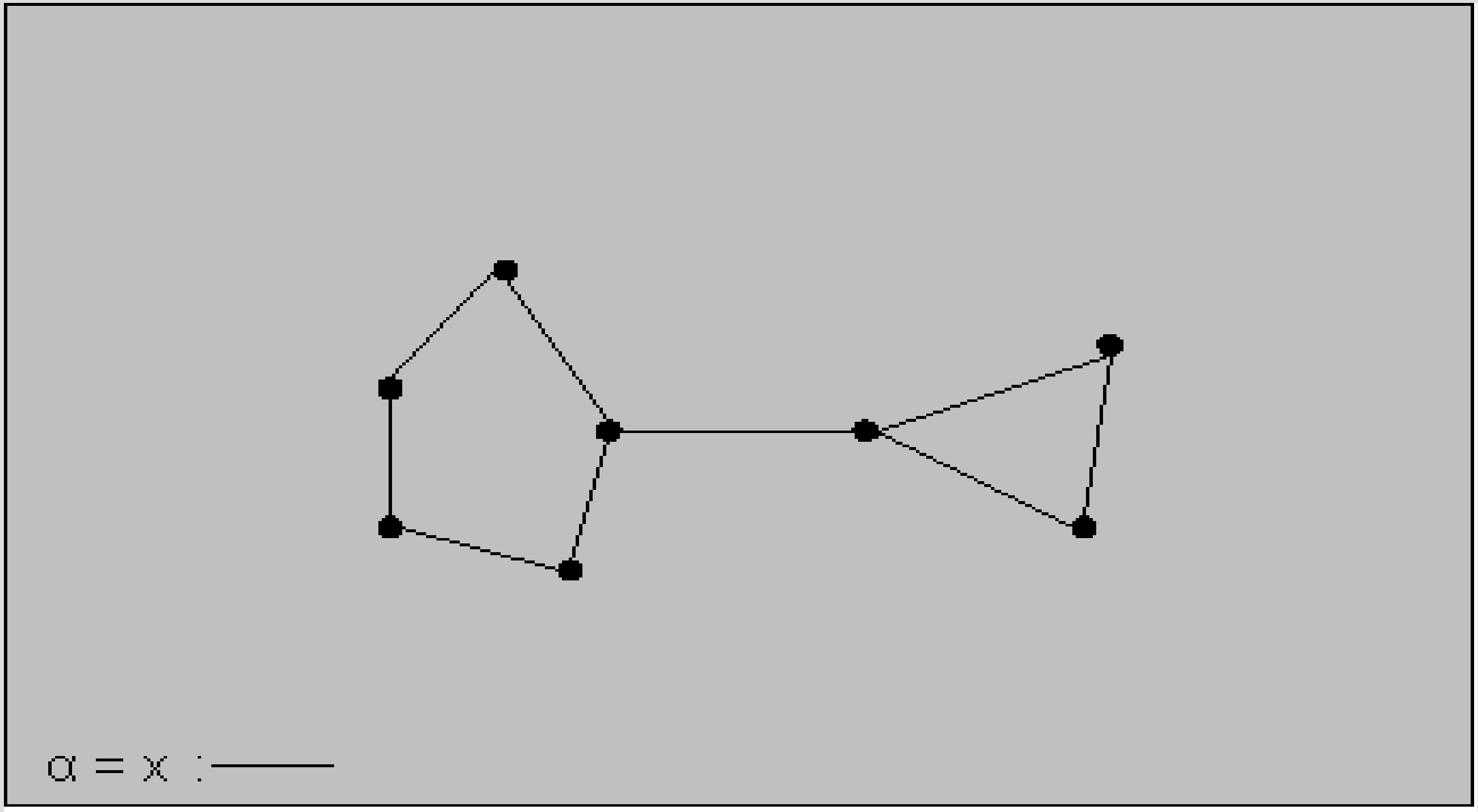
DT(S)

Definitionen



$C_\alpha(S)$

Definitionen



$\delta S_{\alpha}(S)$

Definitionen

$$\delta S_\alpha = \delta C_\alpha$$

(Die Hülle des Alpha Complex ist die Hülle des Alpha Shape)

Inhalt

- Einleitung
- Definitionen
- **Algorithmen zur Generierung**
- Beschränkungen
- Aktualität
- Quellen

Algorithmen

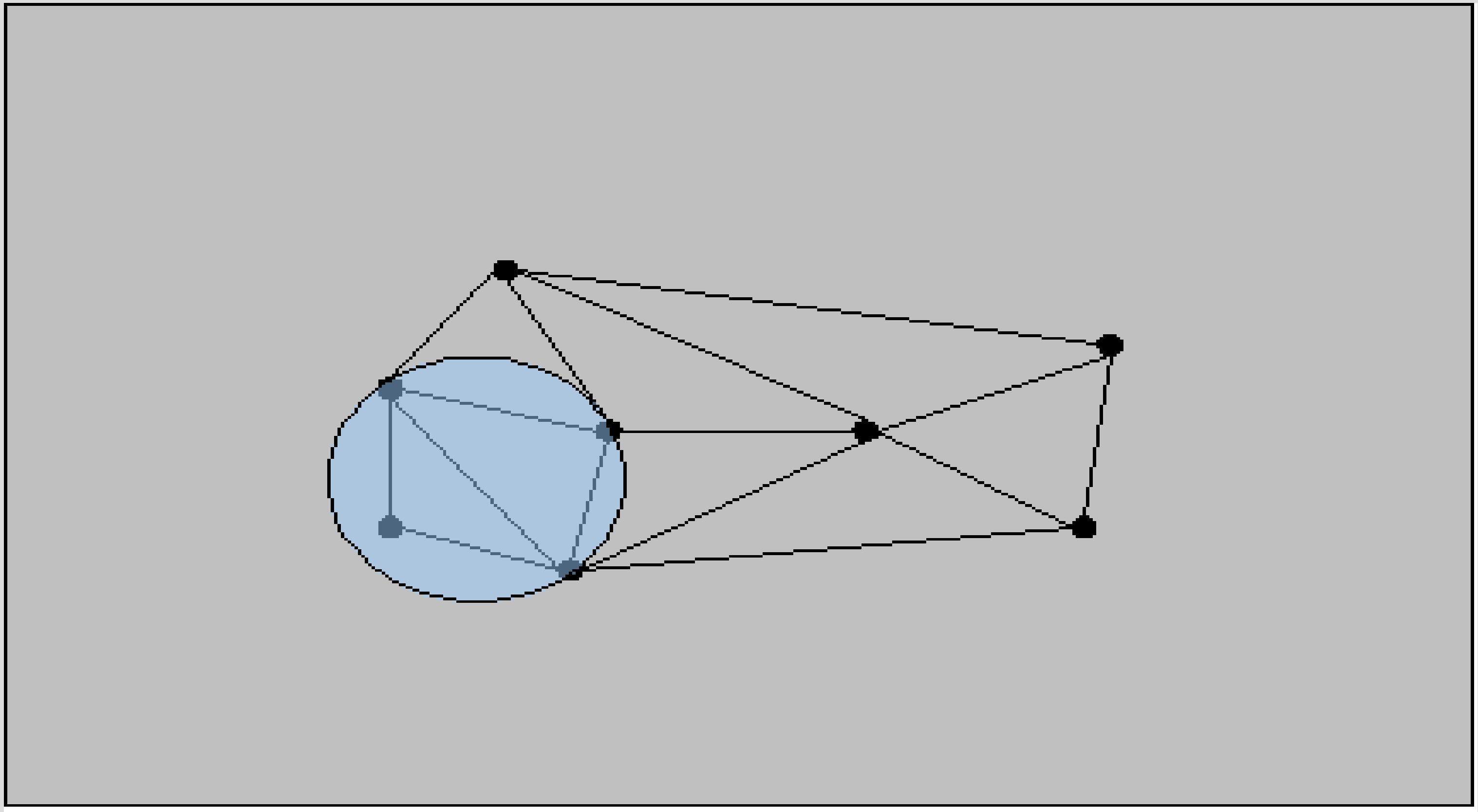
Delaunay Triangulation:

Flip Algorithmus -

1. Beliebiges Dreiecksnetz ohne Überschneidungen erzeugen
2. Dreiecke die eine gemeinsame Kante besitzen werden auf Umkreisbedingung geprüft und bei Nichterfüllung *geflippt.*

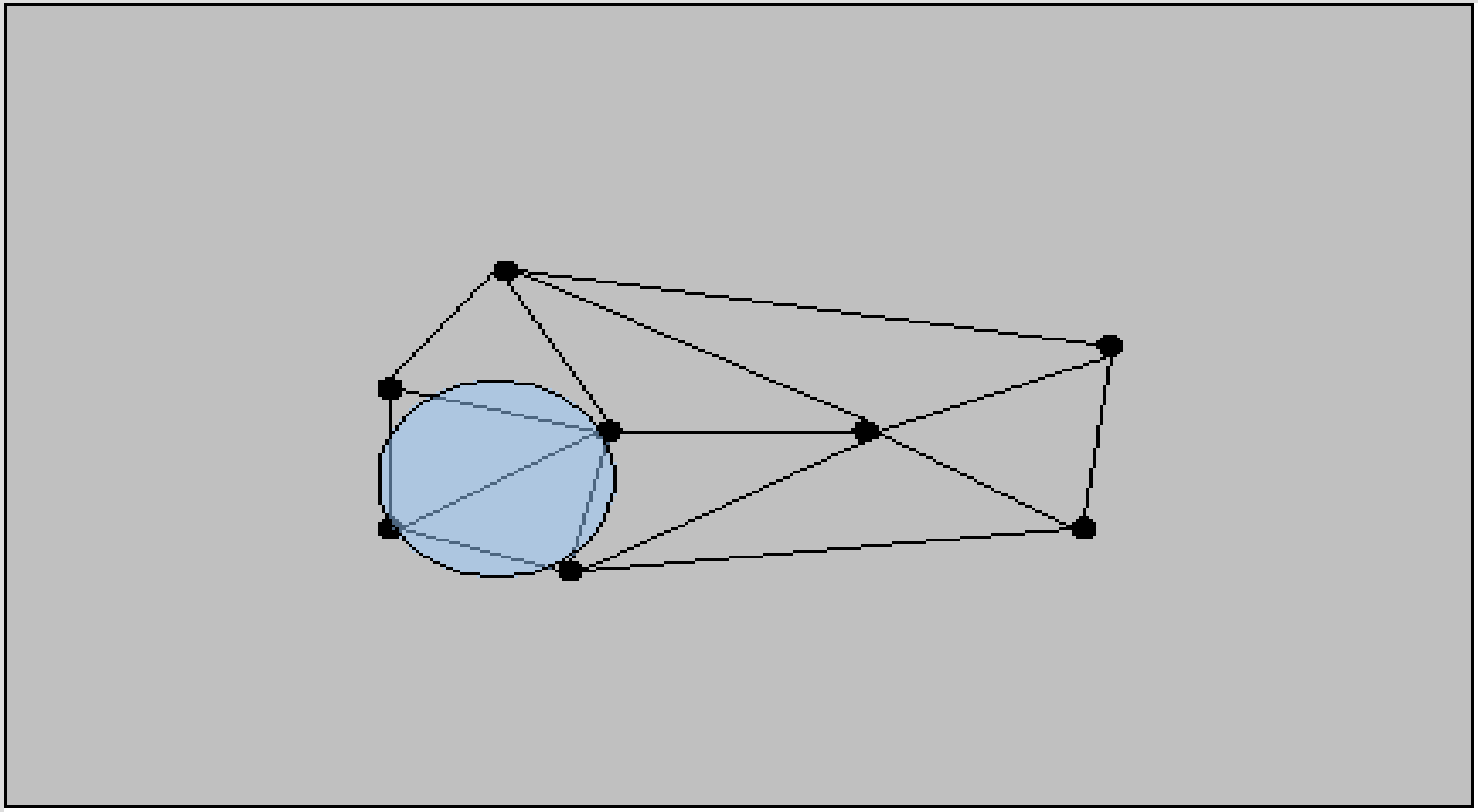
Laufzeit $O(n^2)$

Definitionen



Kante erfüllt Umkreisbedingung nicht

Definitionen



geflippte Kante erfüllt Umkreisbedingung

Algorithmen

Weitere Algorithmen:
Divide & Conquer,

Sweep (Hinzufügen von Dreiecken, die die Bedingung erfüllen)

Laufzeit O(n log n)

Algorithmen

Alpha Shapes:

Edelsbrunner´s Algorithmus -

1. Erzeuge DT(S)
2. C_α aus DT(S) erzeugen.
3. Berechnen, welche Simplizes $T \in C_\alpha$ die Hülle ($T \in \delta C_\alpha$) und welche das Innere ($\dim T = d$) von S_α ausmachen.

Inhalt

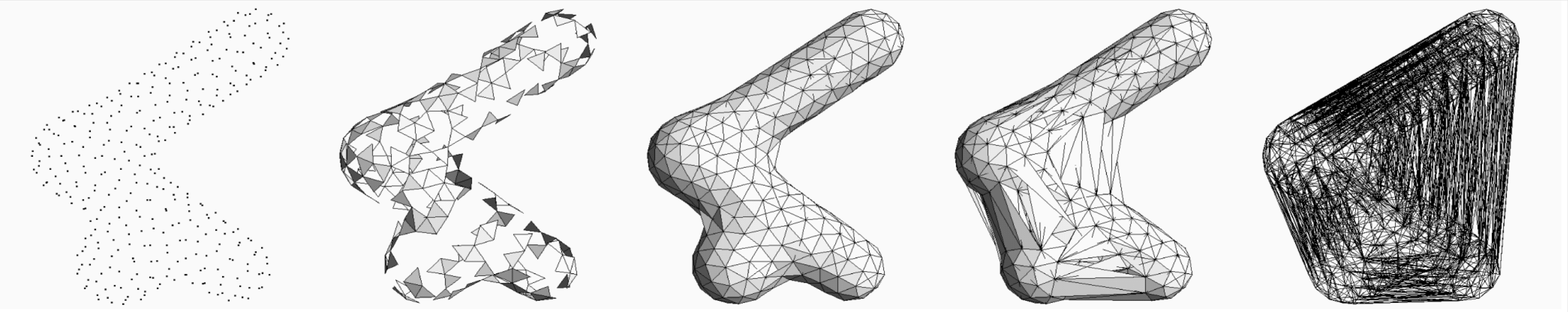
- Einleitung
- Definitionen
- Algorithmen zur Generierung
- **Beschränkungen**
- Anwendungsgebiete
- Quellen

Beschränkungen

Welchen natürlichen Beschränkungen unterliegt die Methode der Oberflächenrekonstruktion durch Alpha Shapes?

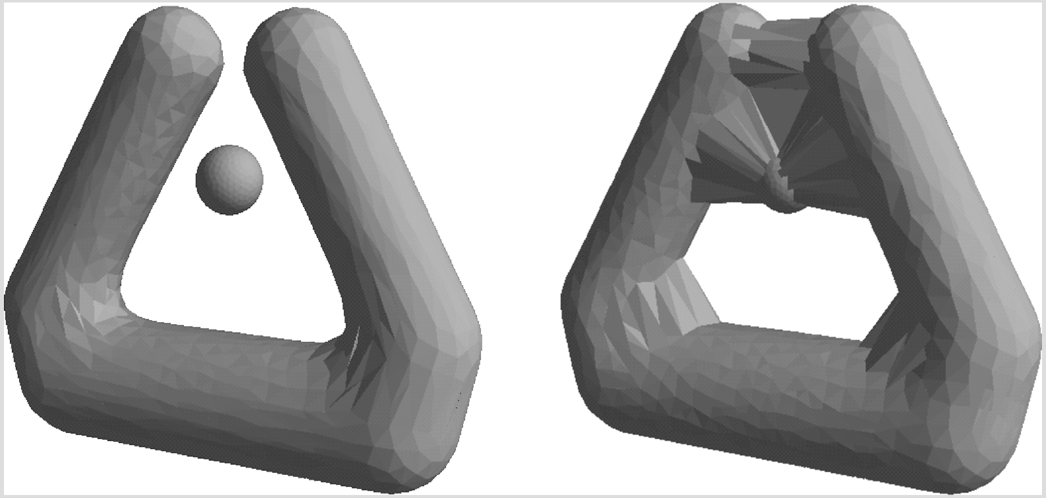
Beschränkungen

Das „beste“ α ist nicht zu berechnen sondern muss geschätzt oder geraten werden. bis es „gut aussieht.“



Beschränkungen

Häufig ist S nicht uniform erstellt was dazu führt, dass kein „zufriedenstellendes“ α existiert.



Inhalt

- Einleitung
- Definitionen
- Algorithmen zur Generierung
- Beschränkungen
- **Aktualität**
- Quellen

Aktualität

Voronoi Diagramm, Delaunay Triangulation -
Verwendung in verschiedensten Bereichen wie Biologie, Chemie, Mathematik Materialwissenschaft etc.

Alpha Shapes -
Werden bei größeren Punktmengen heutzutage kaum noch verwendet, sind aber Basis oder Teil einiger modernerer Oberflächenrekonstruktionsmethoden.

Inhalt

- Einleitung
- Definitionen
- Algorithmen zur Generierung
- Beschränkungen
- Aktualität
- **Quellen**

Quellen

Scripte:

- Introduction to Alpha Shapes (Fischer 2000)
- The Union of Balls and Its Dual Shape (Edelsbrunner 1995)
- Three-Dimensional Alpha Shapes (Edelsbrunner, Mücke 1994)

Websites

- wikipedia.de
    - Delaunay-Triangulation
    - Voronoi_diagram
    - Dualität_(Mathematik)
- wikipedia.en
    - Voronoi_diagram

- biogeometry.duke.edu/software/alphashapes

Quellen

Bildquellen:

- Grafik Folie 27, 42, 43: Introduction to Alpha Shapes (Fischer 2000)