

Fehlerfortpflanzung und Gruppierung in der projektiven Geometrie

Error Propagation in Geometry-Based Grouping

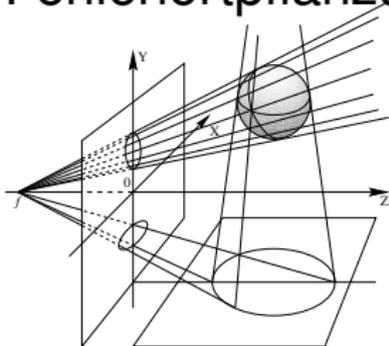
Sven Utcke

Department für Informatik
Universität Hamburg

25. April 2006



Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



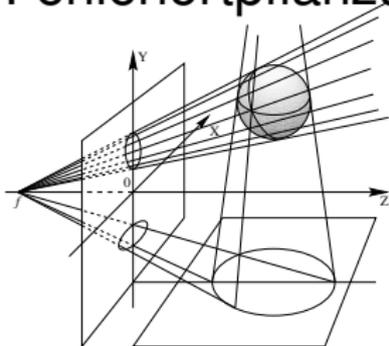
Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

+

+

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



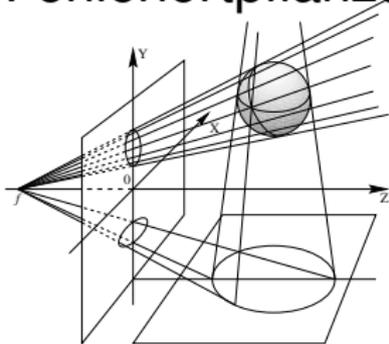
Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

+

+

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

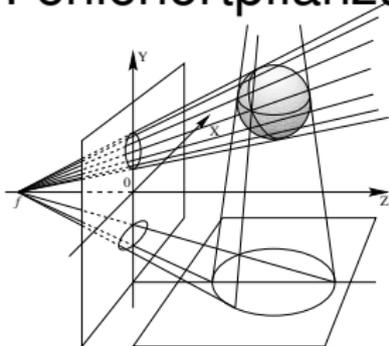


Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

+ +

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

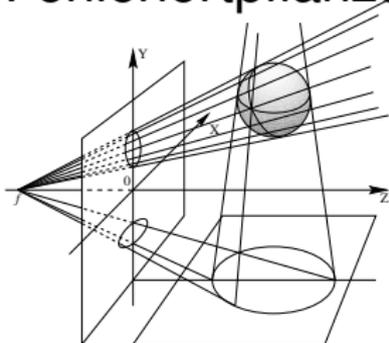


Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

+ +

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

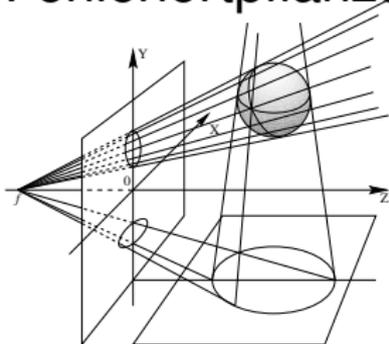


Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.



Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

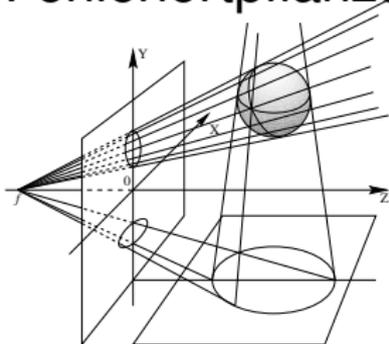


Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.



Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie

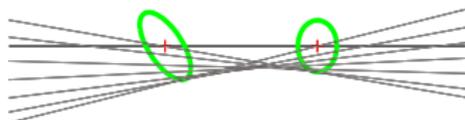


Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

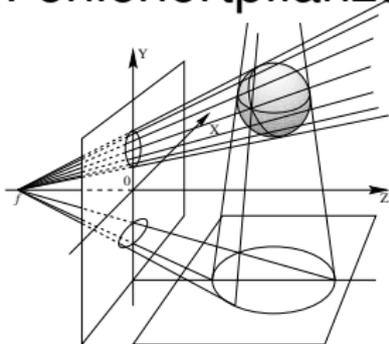
- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie

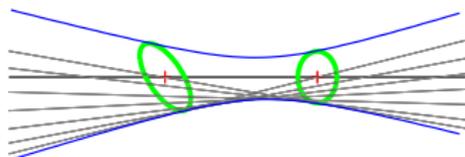


Projektive Geometrie

- ▶ Einsatzgebiet ist Computersehen
- ▶ Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- ▶ Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



Fehlerfortpflanzung

- ▶ Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Motivation für Fehlerfortpflanzung:

Motivation für Fehlerfortpflanzung:
Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- ▶ „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- ▶ Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- ▶ Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- ▶ „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- ▶ Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- ▶ Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- ▶ „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- ▶ Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- ▶ Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- ▶ Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- ▶ Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- ▶ Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- ▶ „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- ▶ Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- ▶ Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ Verzeichnungen
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ Empfindlichkeit
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ Abtastprobleme
- ▶ Anisotropie
- ▶ Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ Verzeichnungen
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ Empfindlichkeit
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

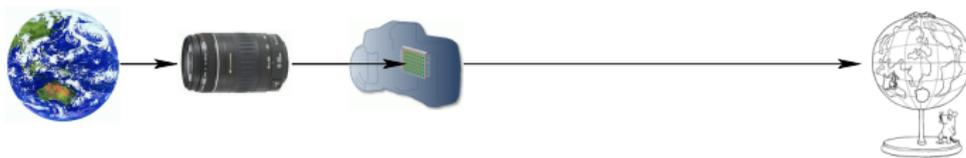
Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ Abtastprobleme
- ▶ Anisotropie
- ▶ Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ Verzeichnungen
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ Empfindlichkeit
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

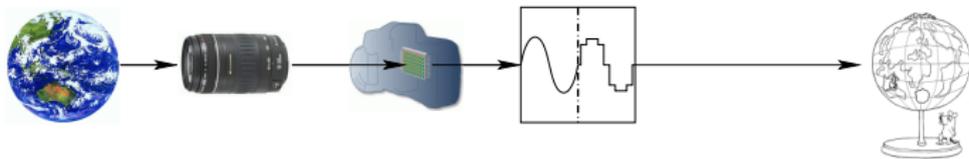
Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ Abtastprobleme
- ▶ Anisotropie
- ▶ Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ Verzeichnungen
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ Empfindlichkeit
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

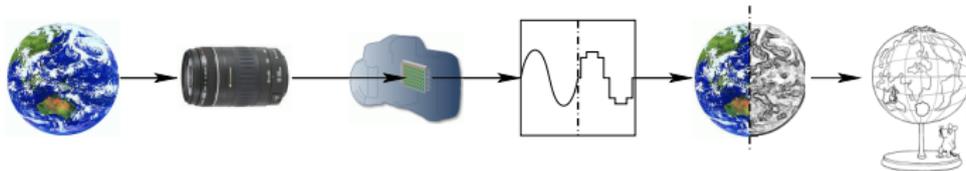
Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ Abtastprobleme
- ▶ Anisotropie
- ▶ Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ Verzeichnungen
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ Empfindlichkeit
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

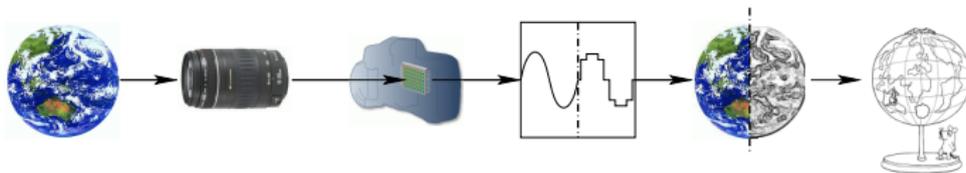
Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ Abtastprobleme
- ▶ Anisotropie
- ▶ Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ▶ ~~Verzeichnungen~~
- ▶ Sphärische Aberr.
- ▶ Chromat. Aberr.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwölbung
- ▶ Unschärfe

Sensor

- ▶ ~~Empfindlichkeit~~
- ▶ Pixelrauschen
- ▶ Bayer-Artefakte

Diskretisierung

- ▶ Rundung
- ▶ Aliasing
- ▶ Kompression

Kantendetektor

- ▶ ~~Abtastprobleme~~
- ▶ ~~Anisotropie~~
- ▶ Kantenmodell

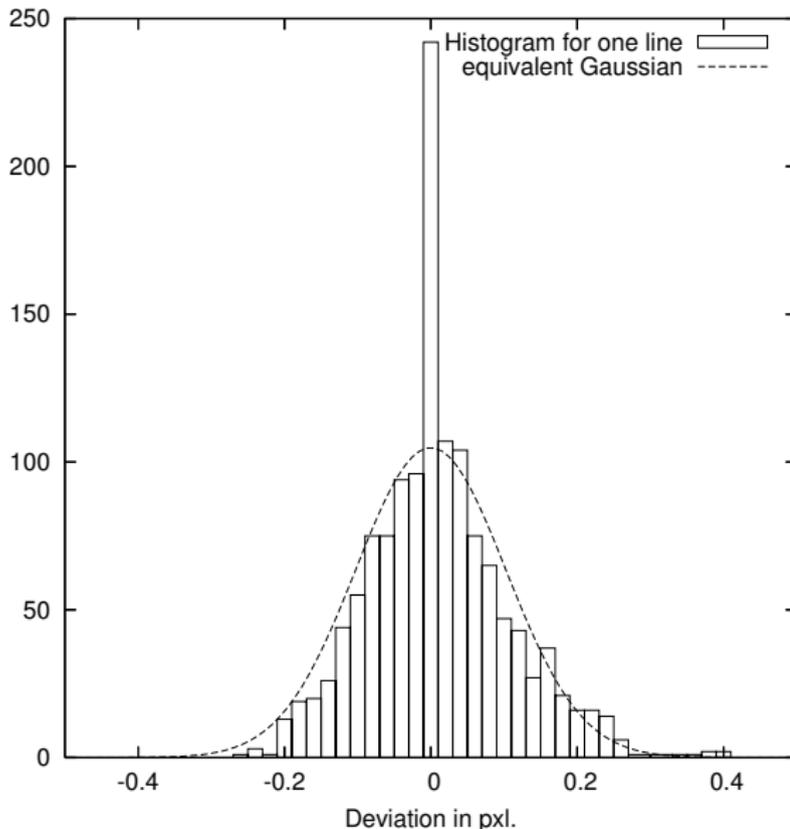
Histogram of edge's positional errors, Canon

Fehlerquel

**Objektiv**

- ▶ ~~Verzeichn~~
- ▶ Sphärisch
- ▶ Chromat.
- ▶ Koma
- ▶ Bildfeldwö
- ▶ Unschärfe

Count

**ektor**

- ~~probleme~~
- ~~rophie~~
- modell

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung

+

+

Kovarianzmatrizen:

$$\Sigma_y = \mathbf{J}_{y x_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y x_0}^T$$

Explizit

▶ $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y x_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0}$$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y_0 x} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial y} \right)^T \Big|_{y_0}$$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben

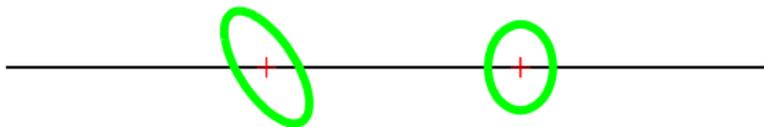
$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \Bigg|_{y_0}$$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow y$ gegeben

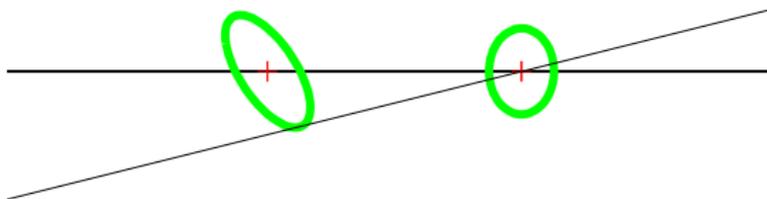
$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial y} \right)^T \Bigg|_{y_0}$$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow y$ gegeben

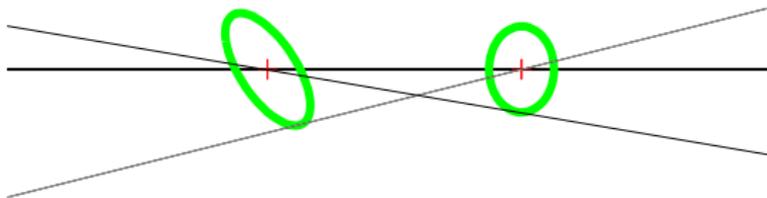
▶ $\mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

▶ $\mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial y} \right)^T \Big|_{y_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow y$ gegeben

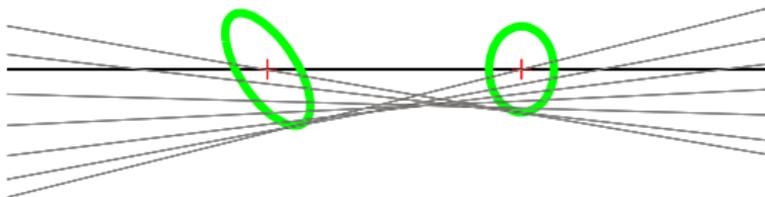
$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial y} \right)^T \Bigg|_{y_0}$$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow y$ gegeben

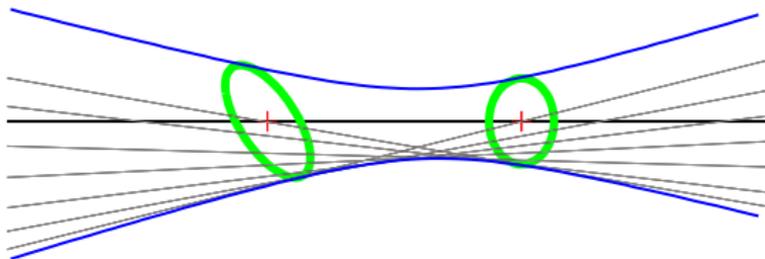
▶ $\mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

▶ $\mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \Big|_{y_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow y$ gegeben

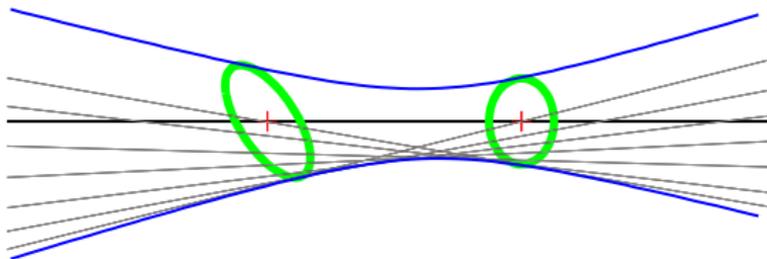
▶ $\mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

▶ $\mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial y} \right)^T \Big|_{y_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

▶ $f: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben

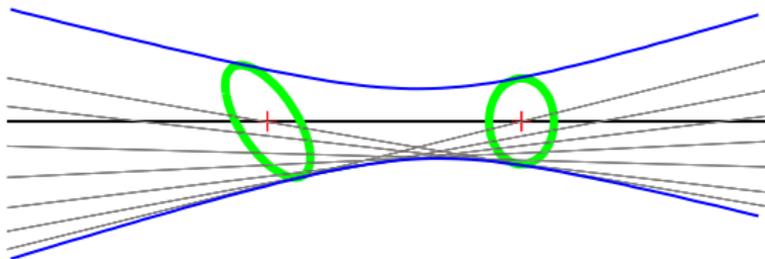
$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Implizit

▶ $\min_y C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben

$$\text{▶ } \mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \Bigg|_{y_0}$$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

► $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben

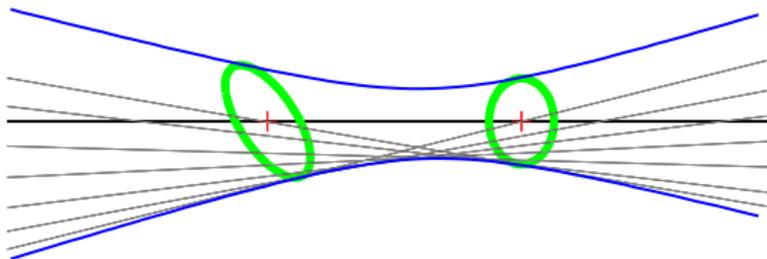
► $\mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

► $\min_y C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben

► $\mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \Big|_{y_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_y = \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} \Sigma_x \mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0}^T$

Explizit

► $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben

► $\mathbf{J}_{y\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

► $\min_y C(\mathbf{x}, y)$ gegeben

► $\mathbf{J}_{y_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \Big|_{y_0}$

Der χ^2 -Test als einheitliches Fehlermaß

- ▶ erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- ▶ **Definition:** Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- ▶ Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma^2 d_i} < \chi_{N,\alpha}^2$$

- ▶ Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- ▶ geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
⇒ hohe Signifikanz des Ergebnisses
⇒ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2 -Test als einheitliches Fehlermaß

- ▶ erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- ▶ **Definition:** Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- ▶ Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi_{N,\alpha}^2$$

- ▶ Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- ▶ geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
⇒ hohe Signifikanz des Ergebnisses
⇒ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2 -Test als einheitliches Fehlermaß

- ▶ erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- ▶ **Definition:** Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- ▶ Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi_{N,\alpha}^2$$

- ▶ Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- ▶ geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
⇒ hohe Signifikanz des Ergebnisses
⇒ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2 -Test als einheitliches Fehlermaß

- ▶ erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- ▶ **Definition:** Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- ▶ Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi_{N,\alpha}^2$$

- ▶ Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- ▶ geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
⇒ hohe Signifikanz des Ergebnisses
⇒ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform

$$d_j = a_j x + b_j y + c_j, \quad a_j^2 + b_j^2 = 1$$

- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden

Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.

$$d_j = l_j^T \mathbf{x} = a_j \hat{x} + b_j \hat{y} + c_j \hat{z},$$

$$l_j^T l_j = a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 = 1$$

- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden

Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = l_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $l_i^T l_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden

Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = l_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $l_i^T l_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_j = a_j x + b_j y + c_j, a_j^2 + b_j^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden

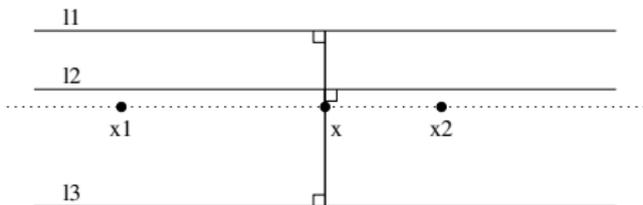
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_j = l_j^T \mathbf{x} = a_j \hat{x} + b_j \hat{y} + c_j \hat{z},$
 $l_j^T l_j = a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



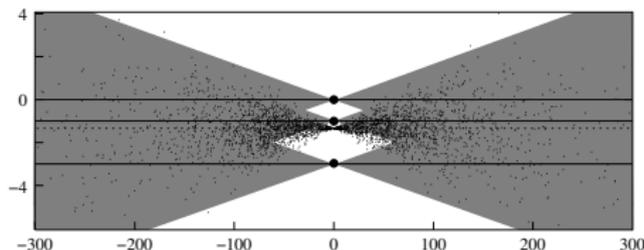
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = l_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $l_i^T l_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



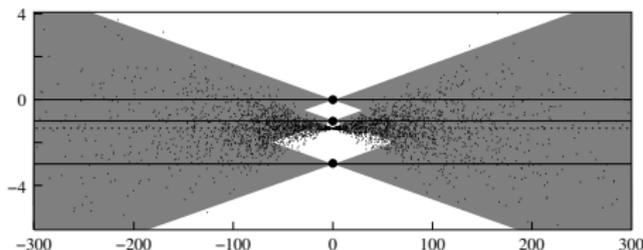
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = l_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $l_i^T l_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T l_i l_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



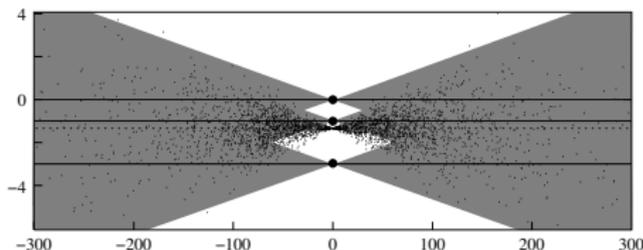
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



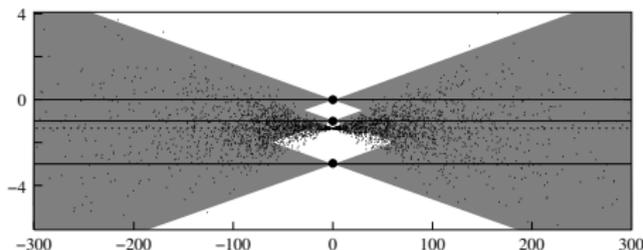
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



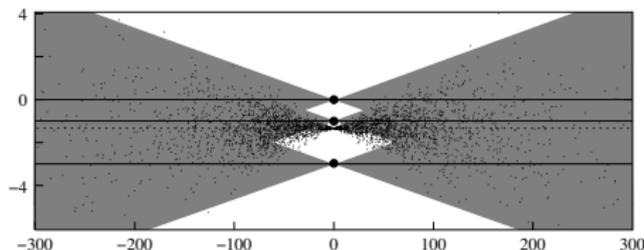
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



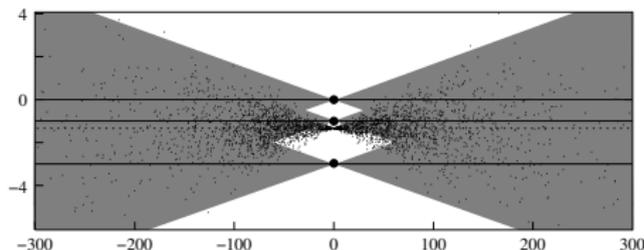
Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

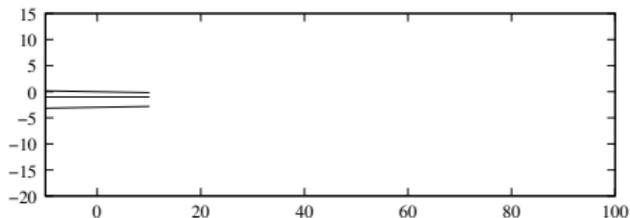
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

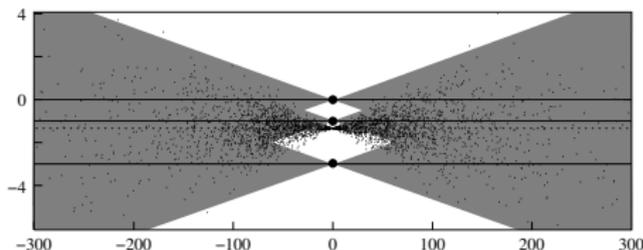
- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

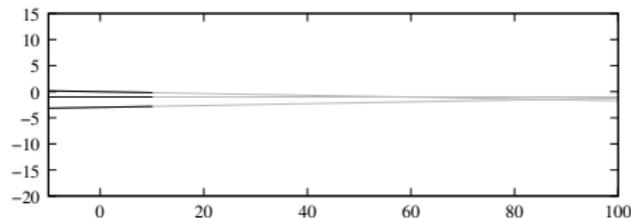
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

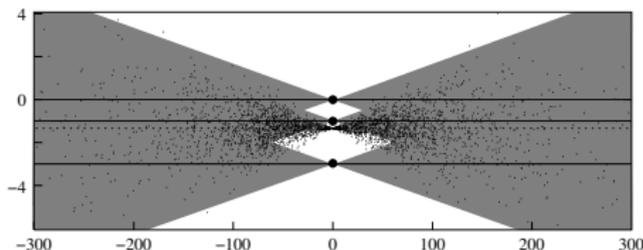
- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

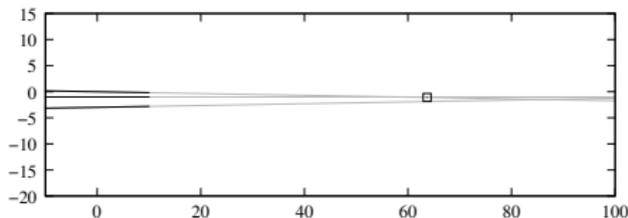
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

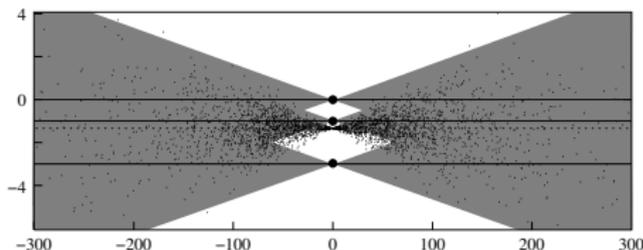
- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

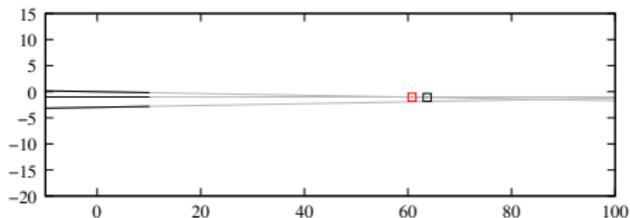
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

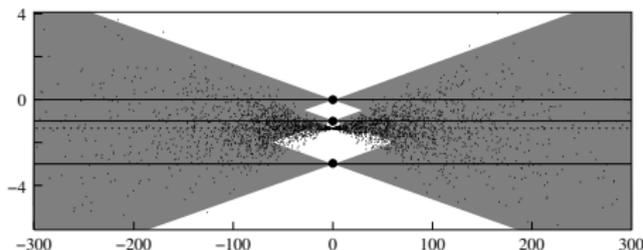
- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

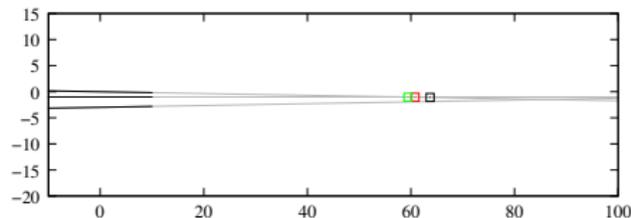
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

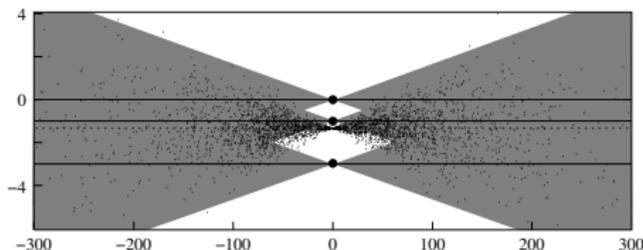
- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

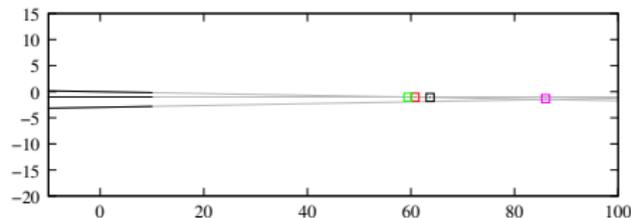
Ansatz I

- ▶ Hessesche Normalenform
 $d_i = a_i x + b_i y + c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- ▶ Problem parallele Geraden



Ansatz II

- ▶ Normierte homogene Koord.
 $d_i = \ell_i^T \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z},$
 $\ell_i^T \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- ▶ $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$
- ▶ Problem: Skalierungs-Variant



Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- ▶ Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^T \ell_i, \quad \mathbf{J}_{d_i, \ell_i} = \mathbf{x}^T, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$$

- ▶ Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Nachteil: keine geschlossene Lösung
Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- ▶ Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^T \ell_i, \quad \mathbf{J}_{d_i, \ell_i} = \mathbf{x}^T, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$$

- ▶ Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Nachteil: keine geschlossene Lösung
Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- ▶ Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^T \ell_i, \quad \mathbf{J}_{d_i, \ell_i} = \mathbf{x}^T, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$$

- ▶ Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Nachteil: keine geschlossene Lösung
Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- ▶ Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^T \ell_i, \quad \mathbf{J}_{d_i, \ell_i} = \mathbf{x}^T, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$$

- ▶ Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Nachteil: keine geschlossene Lösung
Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- ▶ Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^T \ell_i, \quad \mathbf{J}_{d_i, \ell_i} = \mathbf{x}^T, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}^T \ell_i \ell_i^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma \ell_i \mathbf{x}} + \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x})$$

- ▶ Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Nachteil: keine geschlossene Lösung
Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße

Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

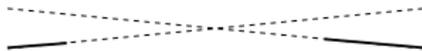
$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T$$

[Imiya96]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

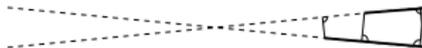
[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T$$

[Imiya96]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T$$

[Imiya96]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

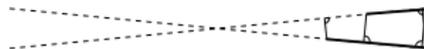
[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T$$

[Imiya96]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

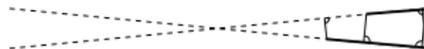
$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

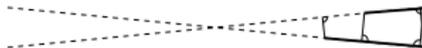
$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

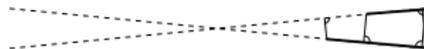
$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

$$\text{max. Abstand} < T \quad [\text{Coelho90}]$$

$$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$$

$$(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$$

$$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$$

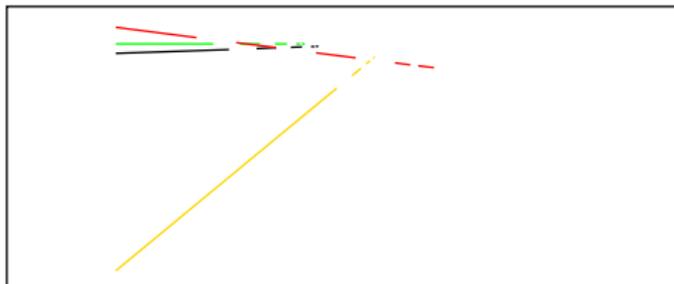
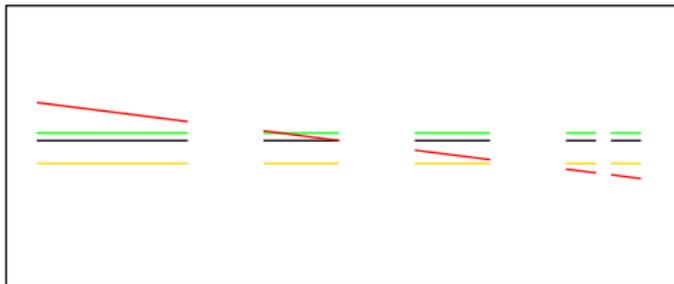
$$(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$$

[Först.04]

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} > 1 - T \quad [\text{Imiya96}]$$

$$\frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2}$$

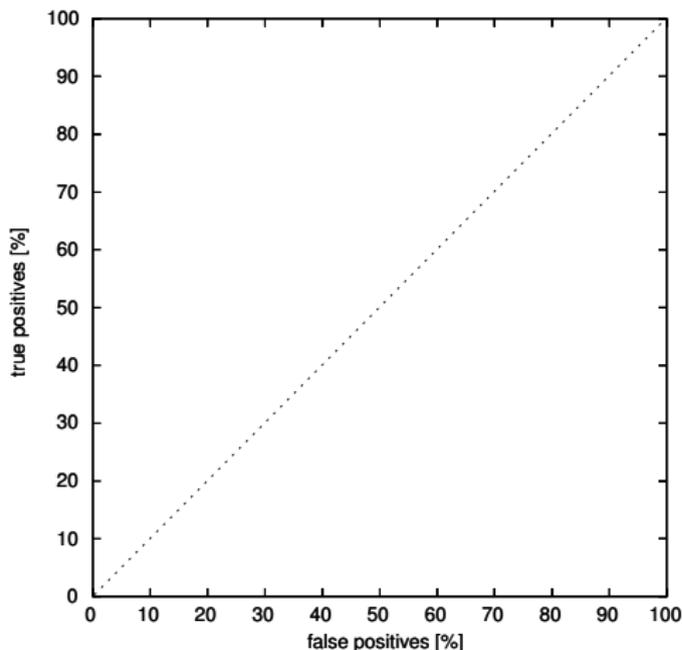
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(l_1^T l_2)^2}{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(l_1 \times l_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T (l_1 - l_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T \Sigma_{l_1 - l_2} (l_1 - l_2) < \chi^2$
- ▶ $(l_1 \times l_2)^T \Sigma_{l_1 \times l_2} (l_1 \times l_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2 - (l_1^T l_2)^2}{\sigma_{l_1 l_2}^2} < \chi^2$

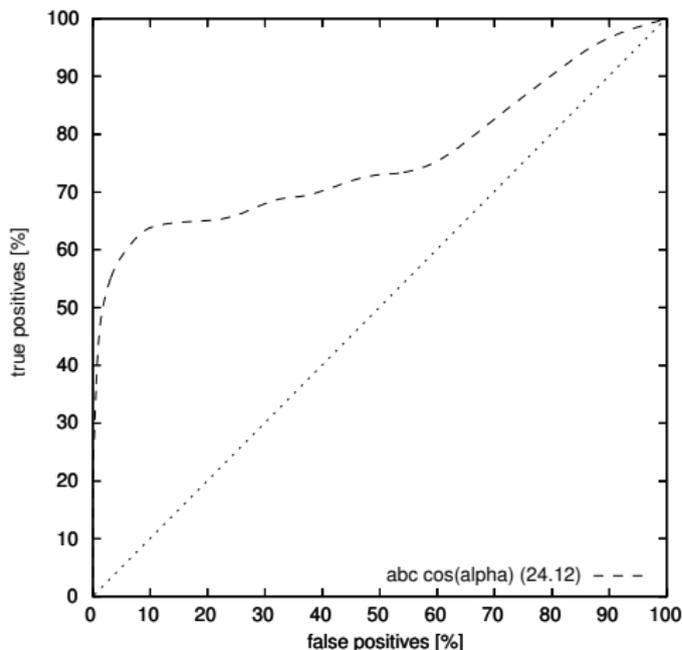
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(l_1^T l_2)^2}{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(l_1 \times l_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T (l_1 - l_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T \Sigma_{l_1 - l_2} (l_1 - l_2) < \chi^2$
- ▶ $(l_1 \times l_2)^T \Sigma_{l_1 \times l_2} (l_1 \times l_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2 - (l_1^T l_2)^2}{\sigma_{l_1 l_2}^2} < \chi^2$

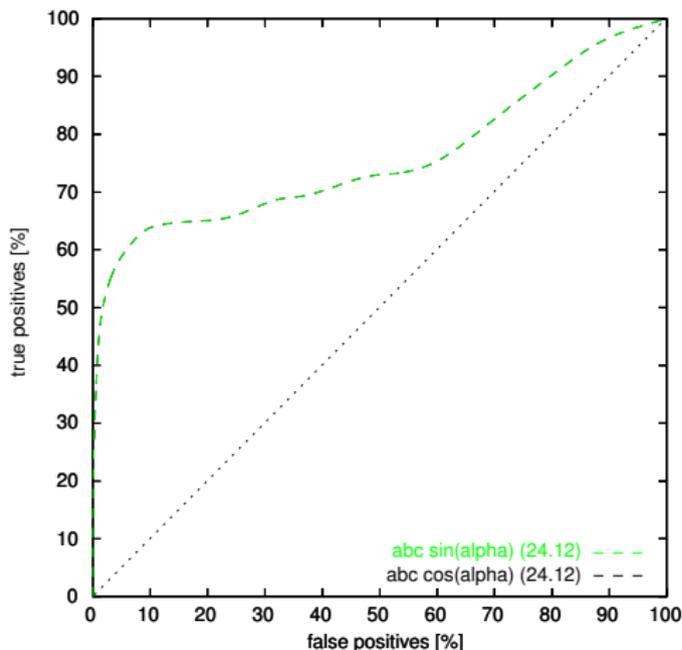
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(l_1^T l_2)^2}{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(l_1 \times l_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T (l_1 - l_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T \Sigma_{l_1 - l_2} (l_1 - l_2) < \chi^2$
- ▶ $(l_1 \times l_2)^T \Sigma_{l_1 \times l_2} (l_1 \times l_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2 - (l_1^T l_2)^2}{\sigma_{l_1 l_2}^2} < \chi^2$

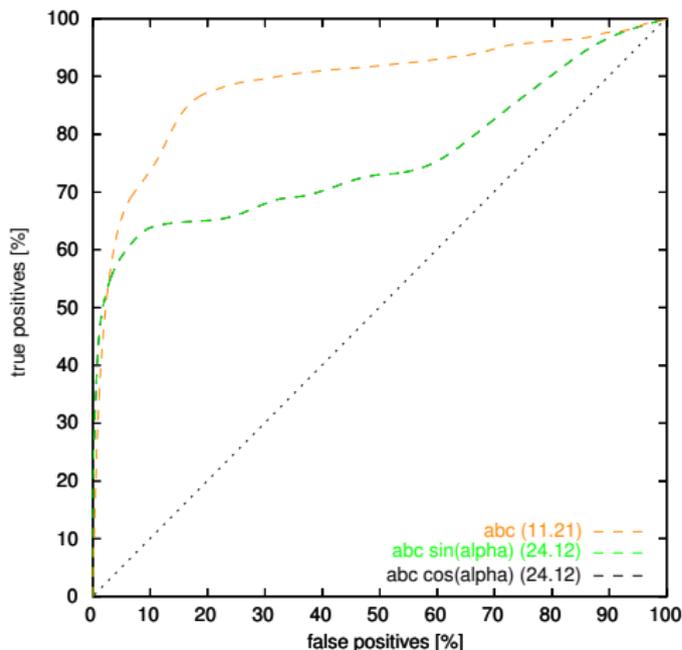
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2} < \chi^2$

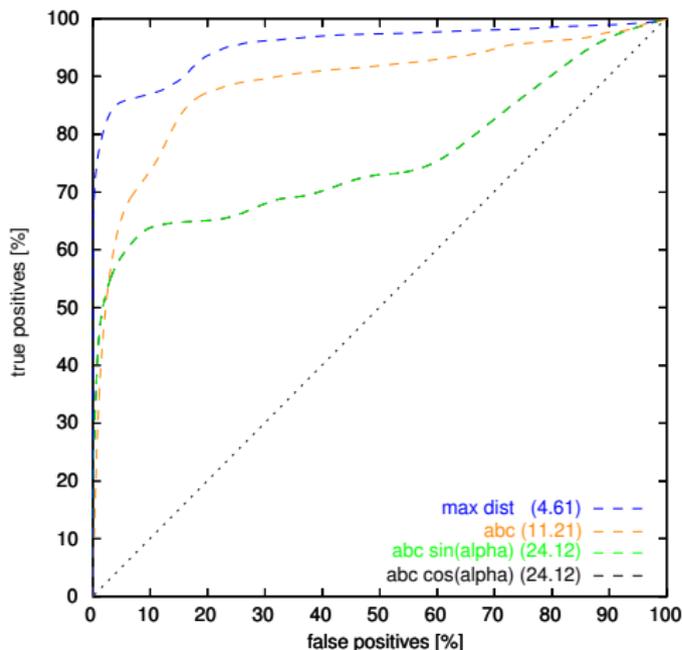
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2} < \chi^2$

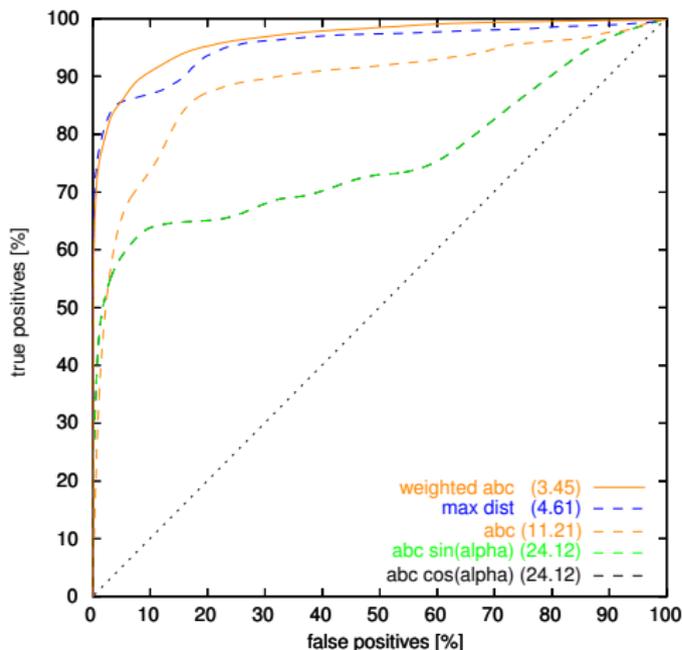
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_2)^2}{\|\mathbf{l}_1\|^2 \|\mathbf{l}_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)^T (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)^T \Sigma_{\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2} (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) < \chi^2$
- ▶ $(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)^T \Sigma_{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|\mathbf{l}_1\|^2 \|\mathbf{l}_2\|^2 - (\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_2)^2}{\sigma_{\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2}^2} < \chi^2$

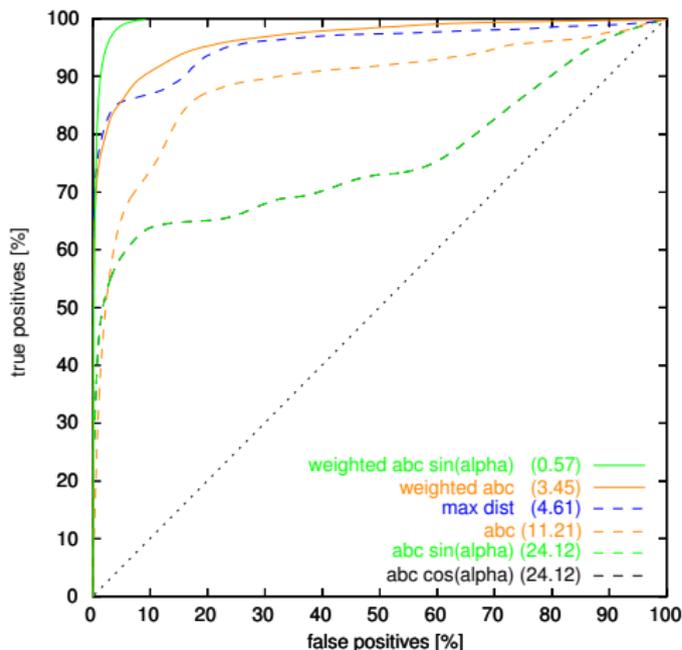
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2} < \chi^2$

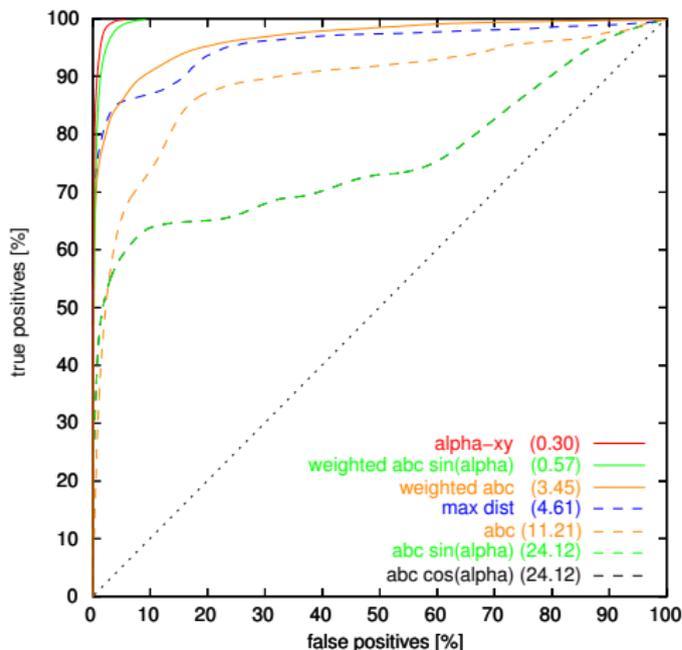
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- ▶ max. Abstand $< T$
- ▶ $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|\ell_1\|^2 \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma_{\ell_1 \ell_2}^2} < \chi^2$

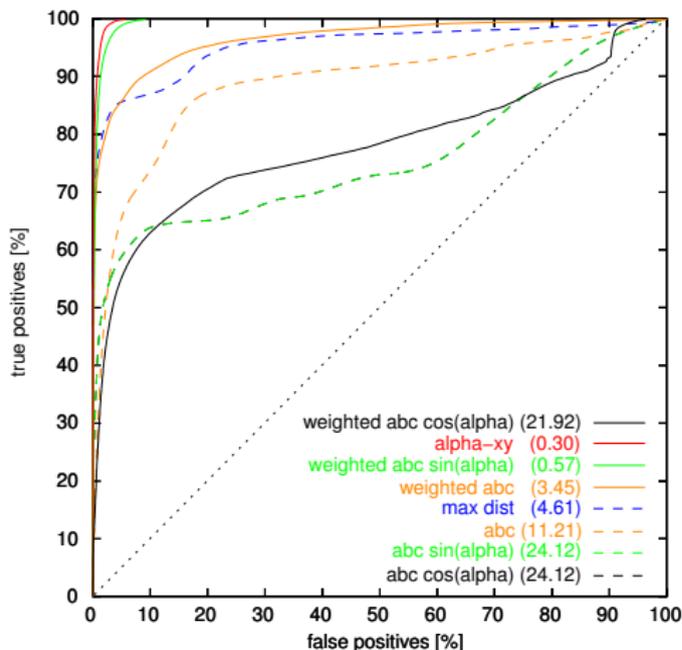
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(l_1^T l_2)^2}{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(l_1 \times l_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T (l_1 - l_2) < T$
- ▶ **max. Abstand** $< T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T \Sigma_{l_1 - l_2} (l_1 - l_2) < \chi^2$
- ▶ $(l_1 \times l_2)^T \Sigma_{l_1 \times l_2} (l_1 \times l_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2 - (l_1^T l_2)^2}{\sigma_{l_1 l_2}^2} < \chi^2$

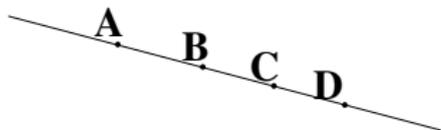
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- ▶ $1 - \frac{(l_1^T l_2)^2}{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2} < T$
- ▶ $\|(l_1 \times l_2)\|_2^2 < T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T (l_1 - l_2) < T$
- ▶ **max. Abstand** $< T$
- ▶ $(l_1 - l_2)^T \Sigma_{l_1 - l_2} (l_1 - l_2) < \chi^2$
- ▶ $(l_1 \times l_2)^T \Sigma_{l_1 \times l_2} (l_1 \times l_2) < \chi^2$
- ▶ $(\alpha, x, y)^T$
- ▶ $\frac{\|l_1\|^2 \|l_2\|^2 - (l_1^T l_2)^2}{\sigma_{l_1 l_2}^2} < \chi^2$

Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



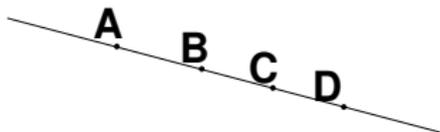
$$\text{cr}(\text{ABCD}) = \frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{BC}}} \cdot \frac{\overline{\text{BD}}}{\overline{\text{AD}}} = \frac{|\text{ACX}|}{|\text{BCX}|} \cdot \frac{|\text{BDX}|}{|\text{ADX}|}$$

$$\text{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

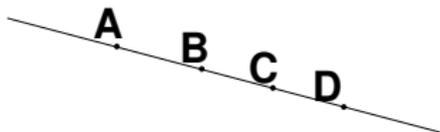


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

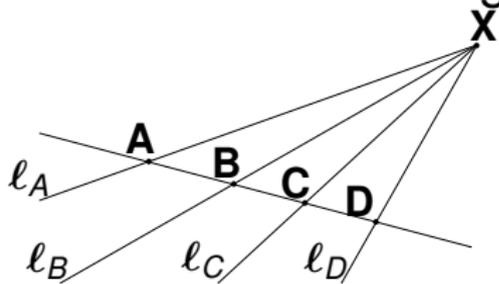
 X

$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$



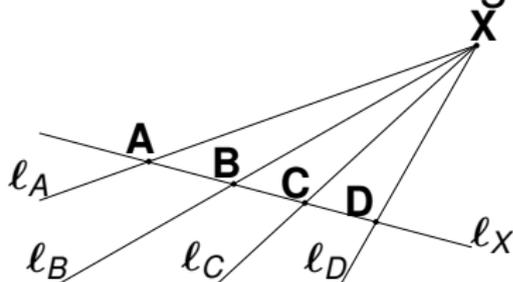
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

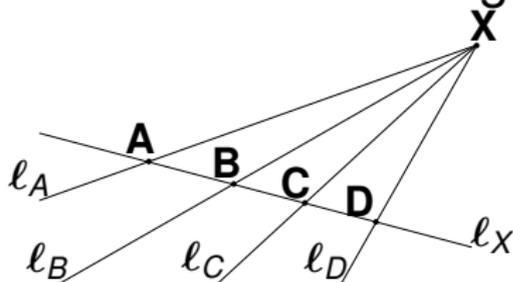
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

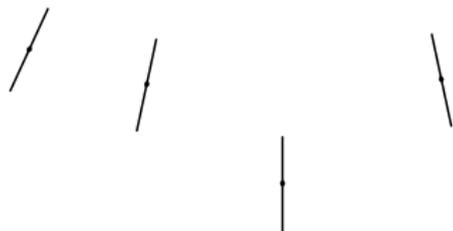
$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

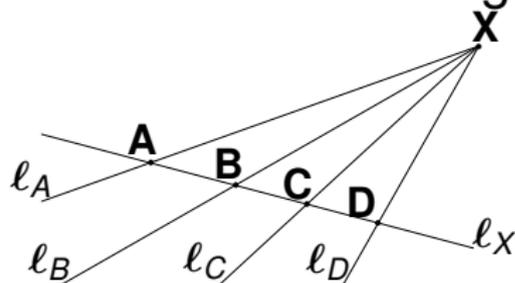


$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

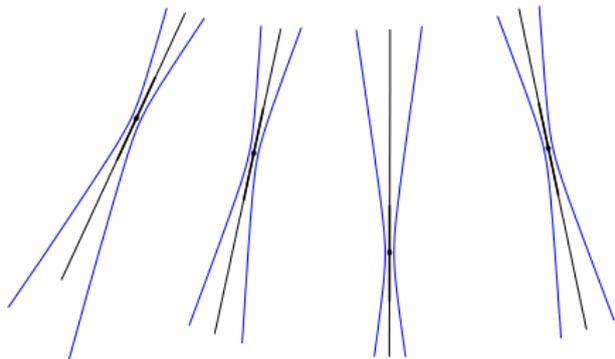


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

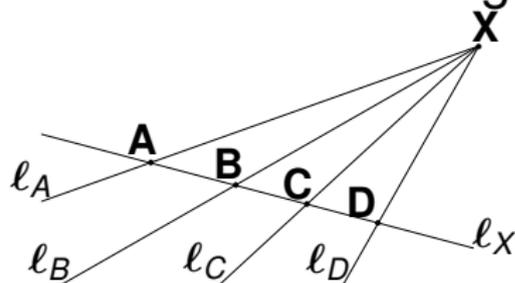


$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

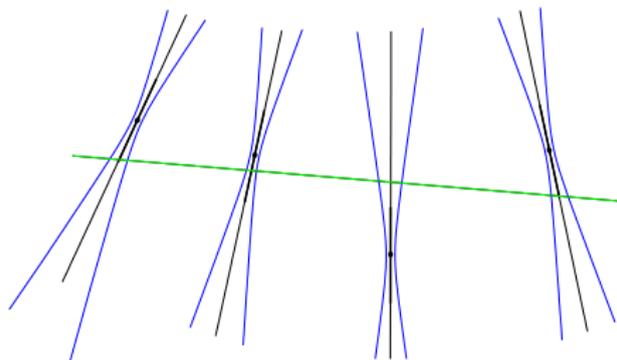


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

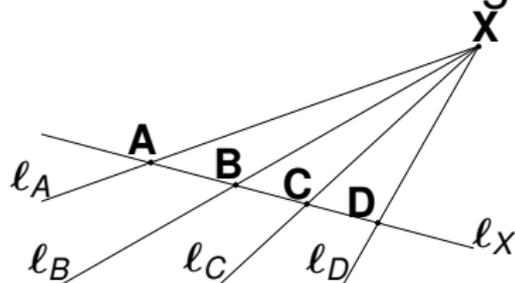


$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

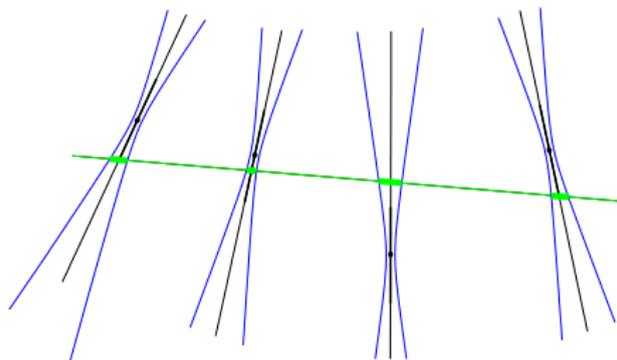


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

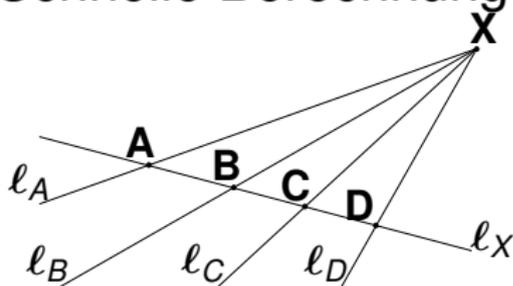


$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

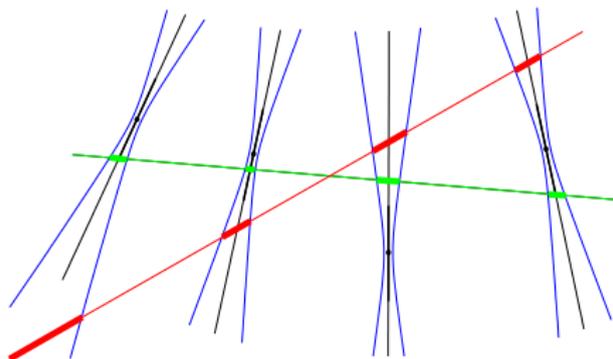


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

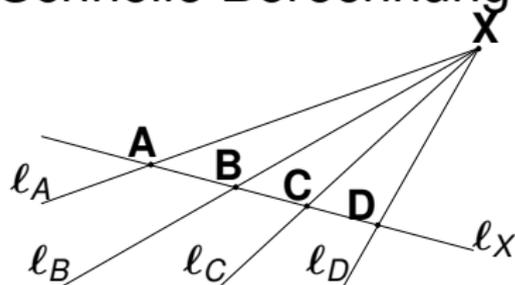


$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$

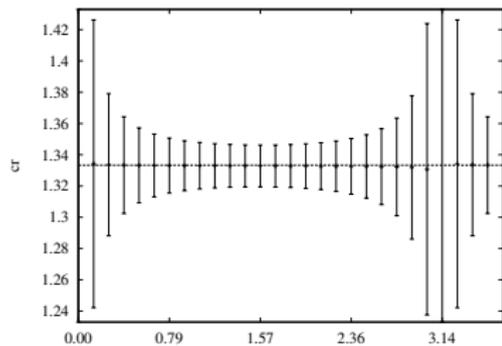
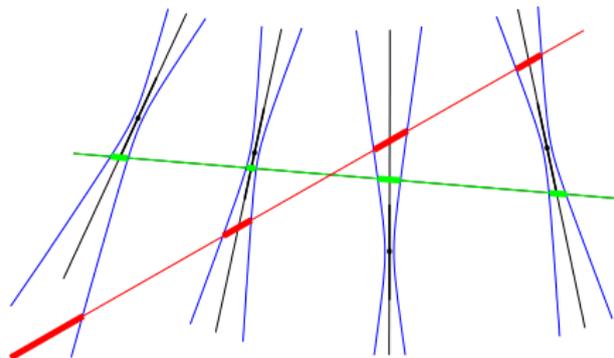


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\text{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\text{cr}(l_A l_B l_C l_D) = \frac{|l_A l_C l_X|}{|l_B l_C l_X|} \cdot \frac{|l_B l_D l_X|}{|l_A l_D l_X|}$$



Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

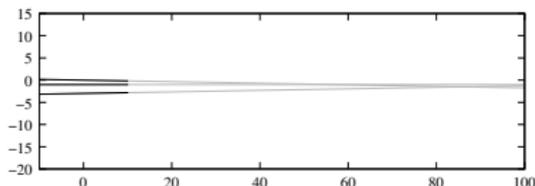
- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

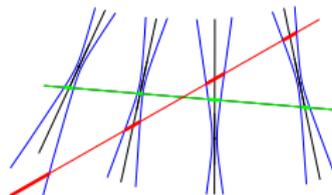
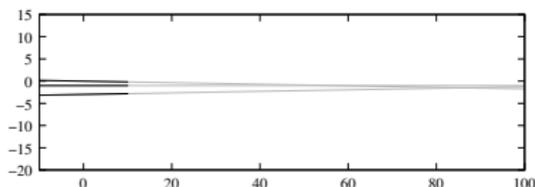


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

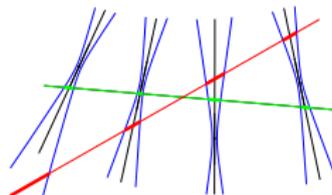
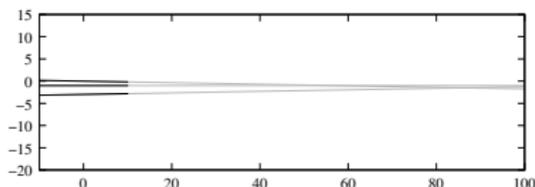


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

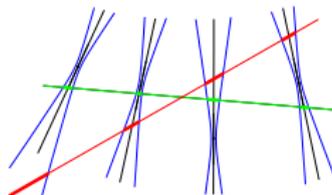
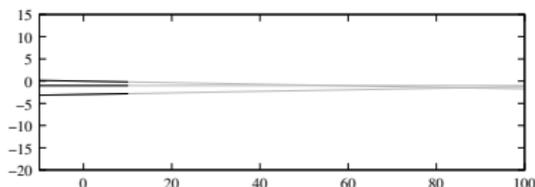


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

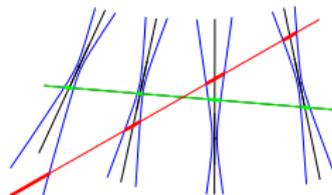
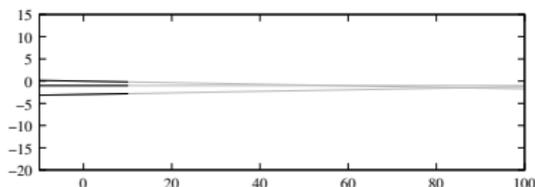


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

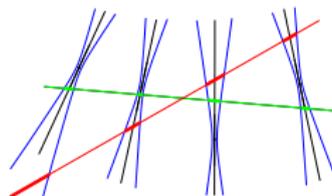
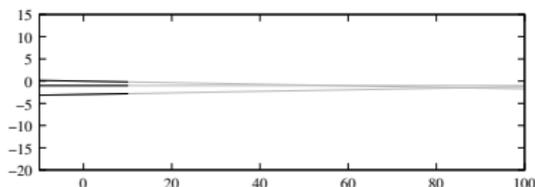


Beispiel I: Zebrastreifenenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

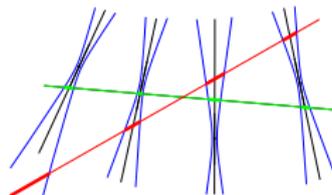
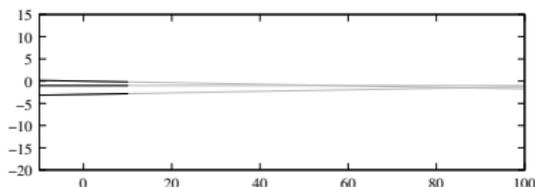


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

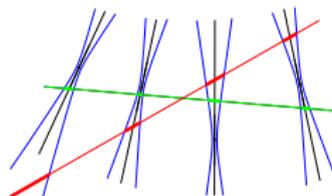
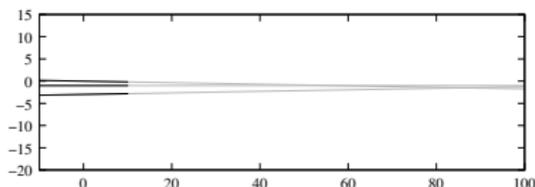


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung



Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion

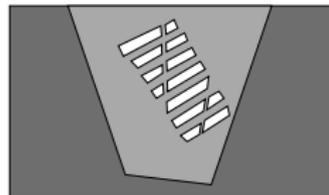
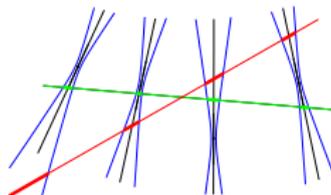
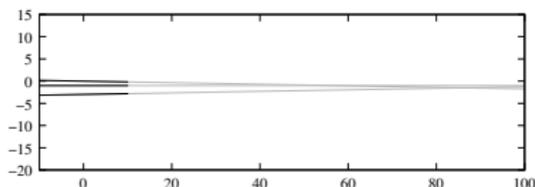


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

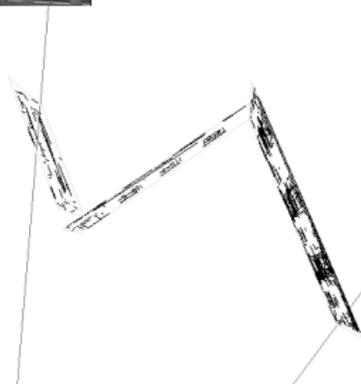


Merkmale

- ▶ Gemeinsamer Schnittpunkt
- ▶ Bekanntes Doppelverhältnis
- ▶ Horizont
- ▶ Rückprojektion



Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

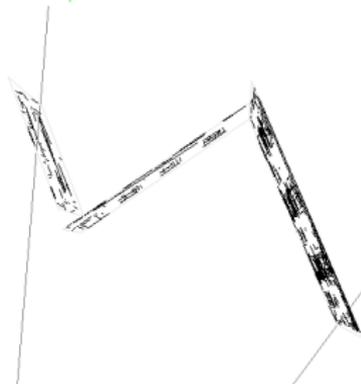
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

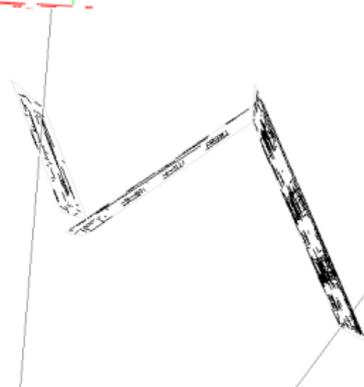
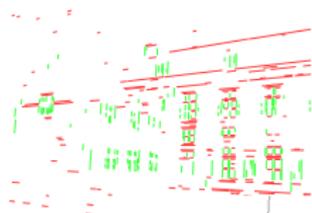
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

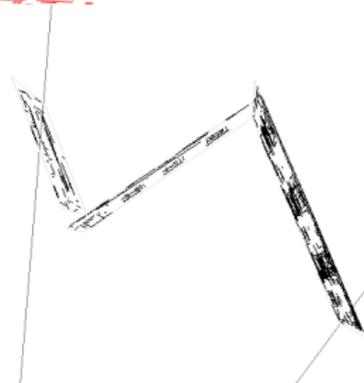
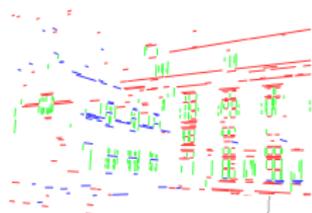
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

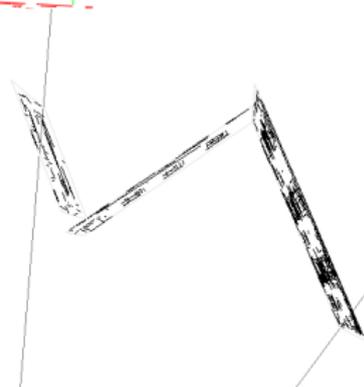
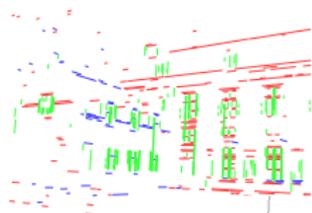
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

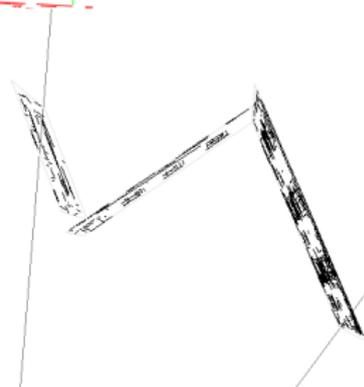
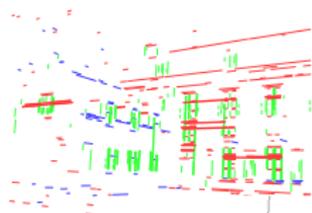
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

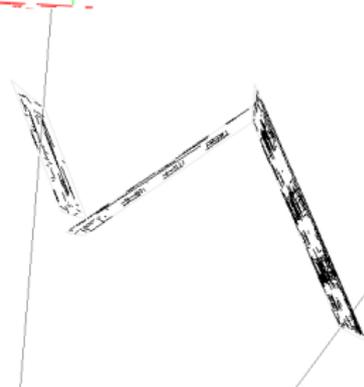
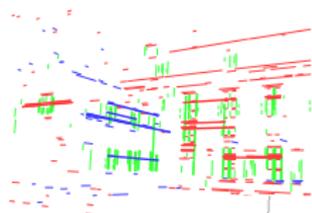
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

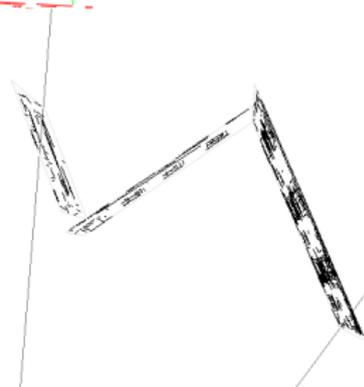
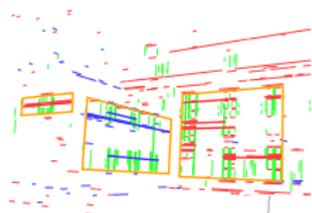
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

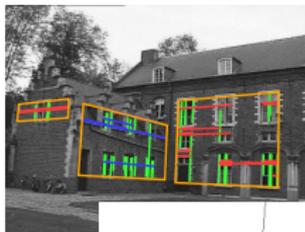
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- ▶ Schnittpunkt
- ▶ Kollinearität

Beispiel III: Rotationssymmetrie



Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie



Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

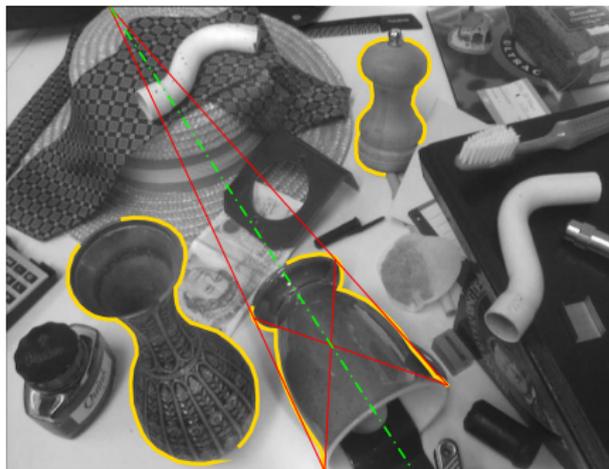


Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

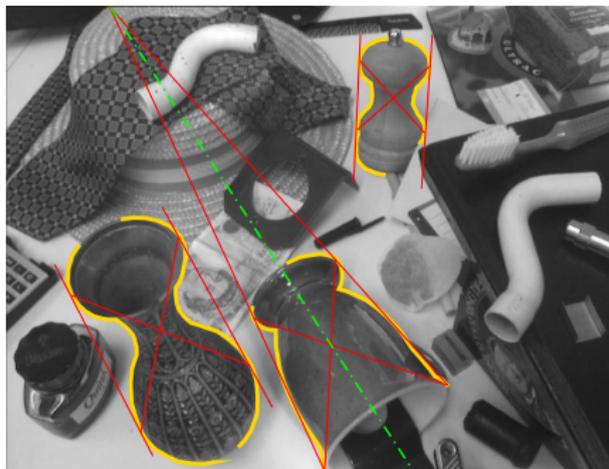


Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

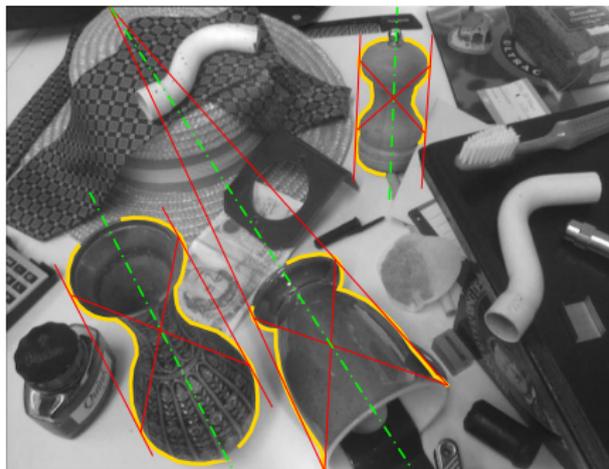


Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

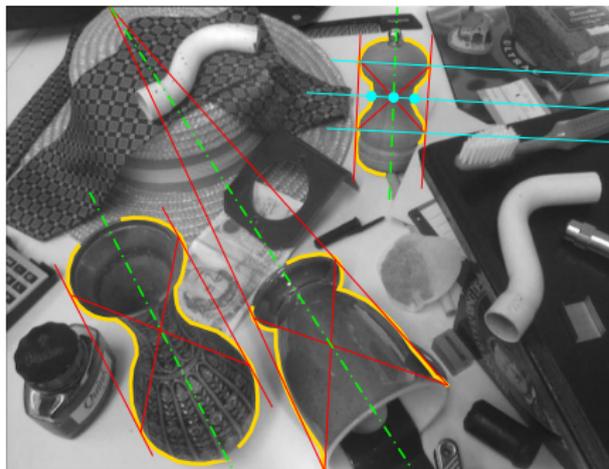


Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

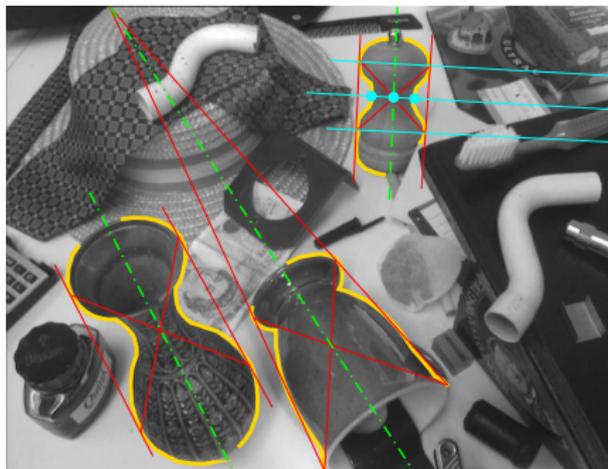


Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler

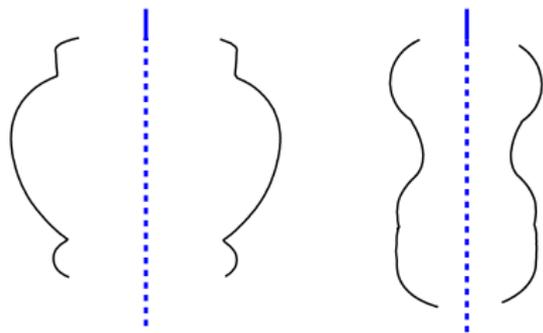
Beispiel III: Rotationssymmetrie



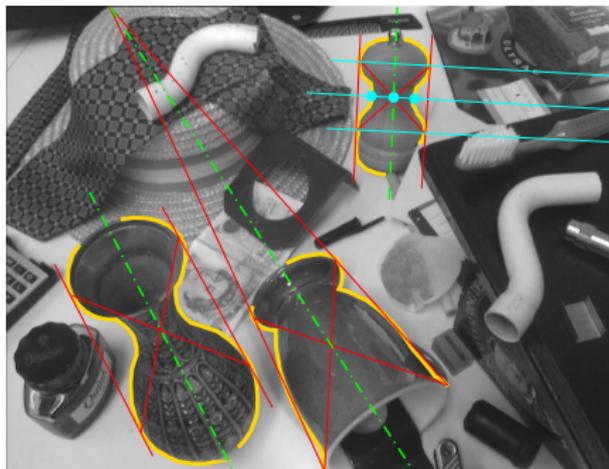
Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler



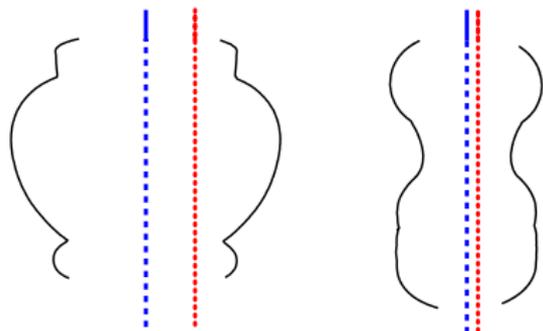
Beispiel III: Rotationssymmetrie



Merkmale

- ▶ Kollinearität (von Punkten)
- ▶ Doppelverhältnis

Extreme Fehler



Zusammenfassung

- ▶ Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- ▶ Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- ▶ Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- ▶ Integration von (3D) Modellfehlern
- ▶ Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- ▶ Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- ▶ Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- ▶ Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- ▶ Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- ▶ Integration von (3D) Modellfehlern
- ▶ Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- ▶ Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- ▶ Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- ▶ Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- ▶ Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- ▶ Integration von (3D) Modellfehlern
- ▶ Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- ▶ Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- ▶ Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- ▶ Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- ▶ Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

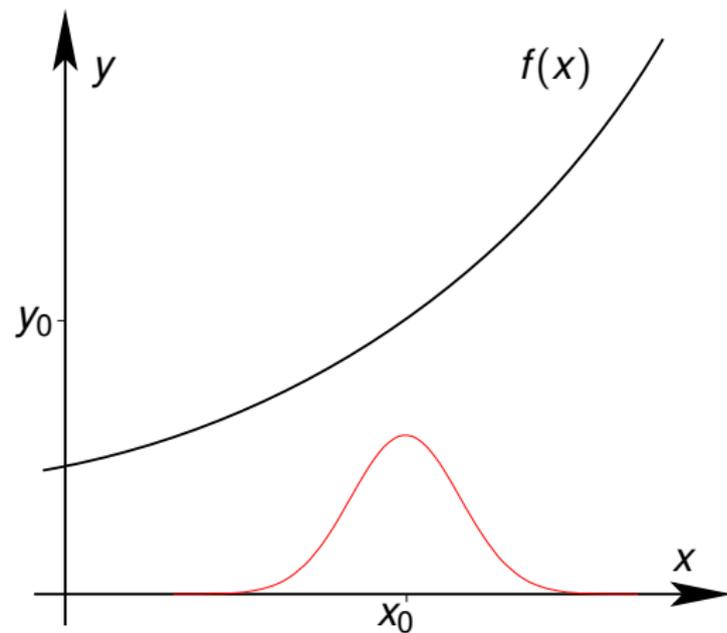
- ▶ Integration von (3D) Modellfehlern
- ▶ Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- ▶ Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

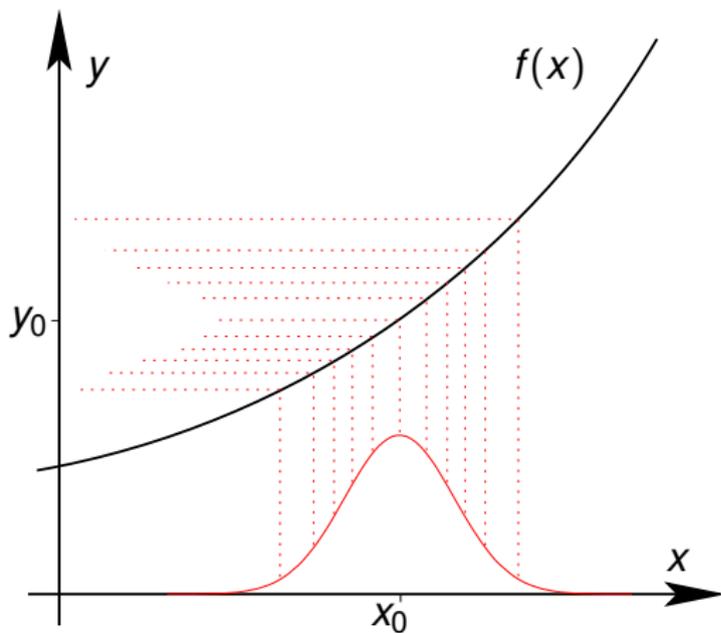
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar:
Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

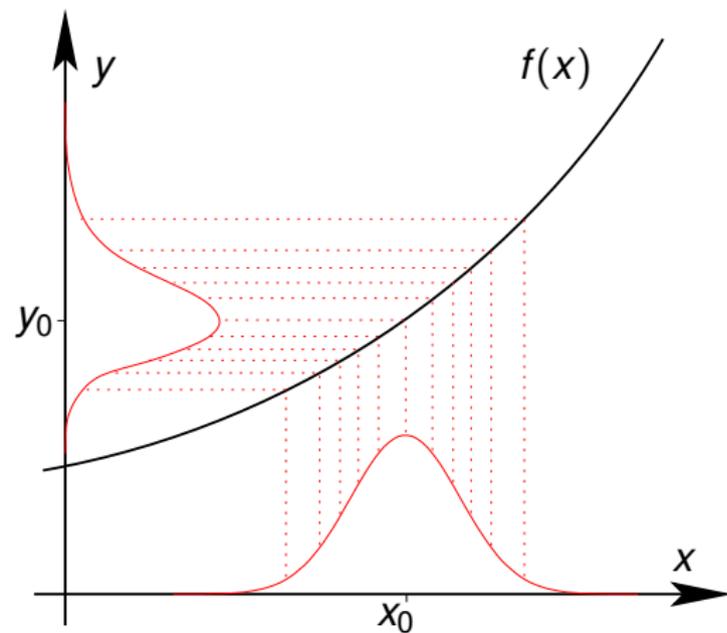
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar:
Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

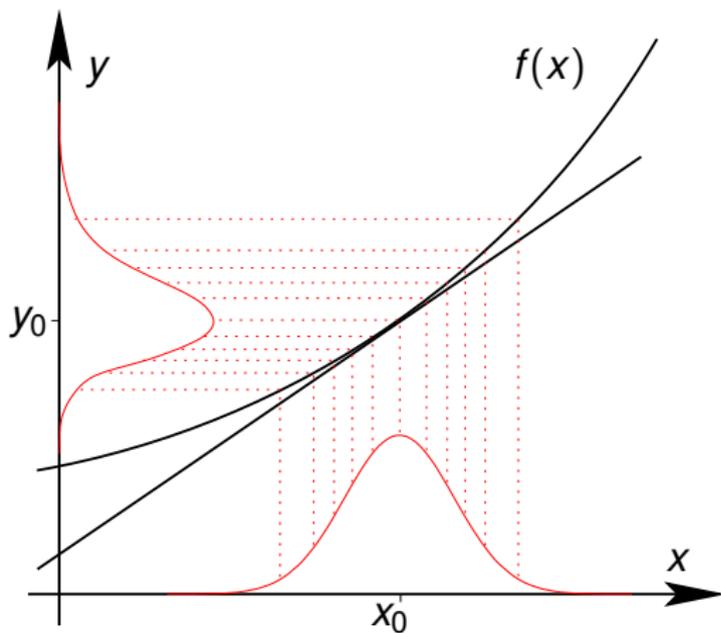
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar:
Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

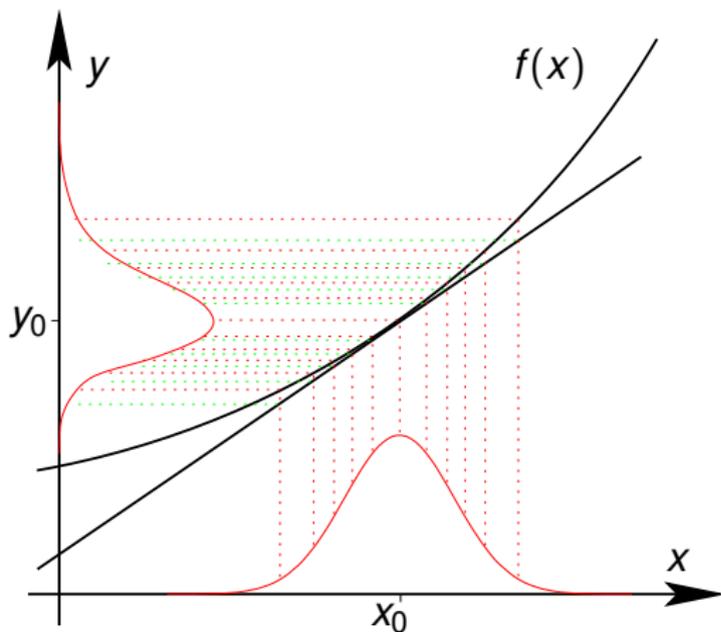
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar:
Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

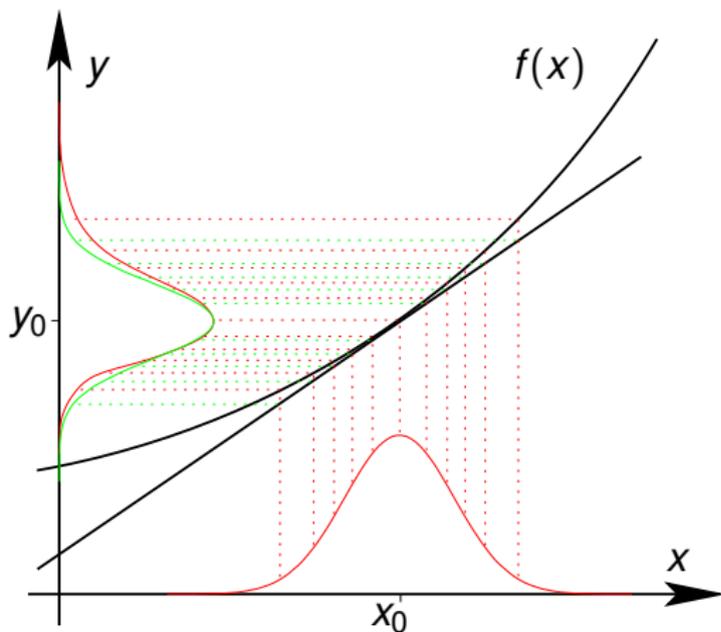
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar:
Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

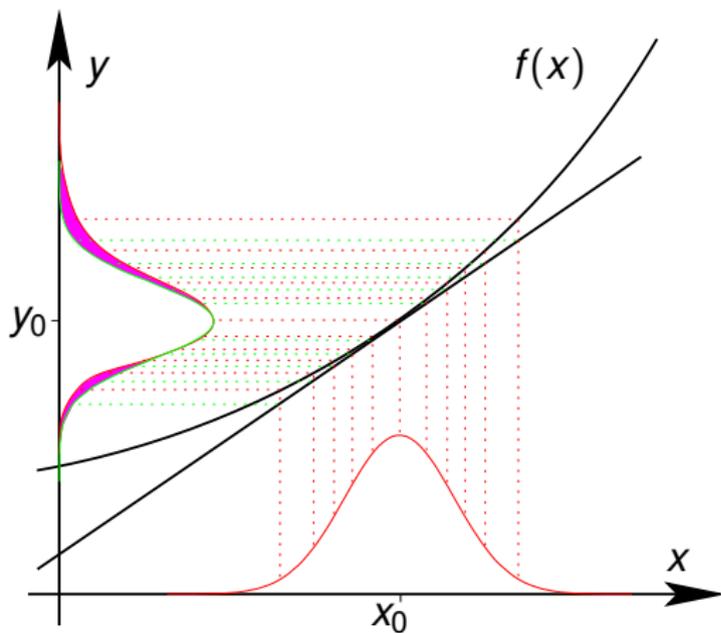
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar: Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- ▶ Gegeben: x , σ_x , $f(x)$
- ▶ Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- ▶ Handhabbar: Linearisierung
- ▶ Verteilung behält Form bei
- ▶ Annahme kleiner Fehler

[Return](#)

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel 2 Punkte

▶ $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^T$,

$$\ell = (a, b, c)^T = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1 \times} \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2 \times} \mathbf{p}_1,$$

+

$$\mathbf{p}_{i \times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$

▶ $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3 \times 3}$

+

▶ $\mathbf{J}_\ell \mathbf{p}_i = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times})$

$$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2 \times}^T \\ \mathbf{p}_{1 \times}^T \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}_{2 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_1} \mathbf{p}_{2 \times}^T + \mathbf{p}_{1 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_2} \mathbf{p}_{1 \times}^T$$

[Return](#)

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel 2 Punkte

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \mathbf{p}_i &= (x_i, y_i, 1)^T, \\ \ell &= (a, b, c)^T = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1 \times} \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2 \times} \mathbf{p}_1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_{i \times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright \Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3 \times 3}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{J}_\ell \mathbf{p}_i = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times})$$

$$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2 \times}^T \\ \mathbf{p}_{1 \times}^T \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}_{2 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_1} \mathbf{p}_{2 \times}^T + \mathbf{p}_{1 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_2} \mathbf{p}_{1 \times}^T$$

Return

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel 2 Punkte

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \mathbf{p}_i &= (x_i, y_i, 1)^T, \\ \ell &= (a, b, c)^T = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_{i \times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright \Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3 \times 3}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{J}_\ell \mathbf{p}_i = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times})$$

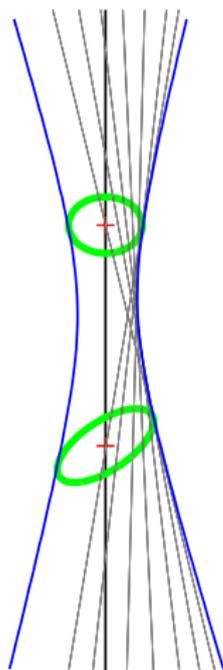
$$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2 \times}^T \\ \mathbf{p}_{1 \times}^T \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}_{2 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_1} \mathbf{p}_{2 \times}^T + \mathbf{p}_{1 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_2} \mathbf{p}_{1 \times}^T$$

Return

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel 2 Punkte



- ▶ $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^T$,
 $\ell = (a, b, c)^T = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1 \times} \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1$,

$$\mathbf{p}_{i \times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3 \times 3}$

- ▶ $\mathbf{J}_\ell \mathbf{p}_i = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times})$

$$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2 \times}, \mathbf{p}_{1 \times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2 \times}^T \\ \mathbf{p}_{1 \times}^T \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}_{2 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_1} \mathbf{p}_{2 \times}^T + \mathbf{p}_{1 \times} \Sigma_{\mathbf{p}_2} \mathbf{p}_{1 \times}^T$$

[Return](#)