Fehlerfortpflanzung und Gruppierung in der projektiven Geometrie

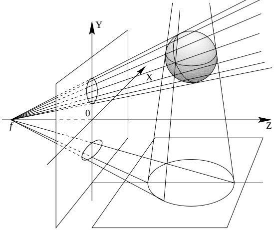
Error Propagation in Geometry-Based Grouping

Sven Utcke

Department für Informatik
Universität Hamburg

25. April 2006

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

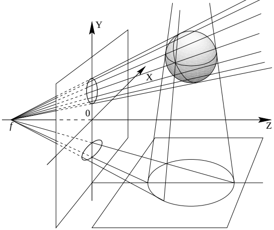
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

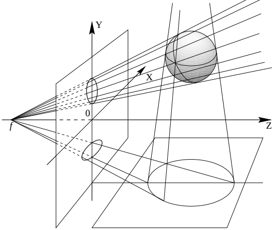
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

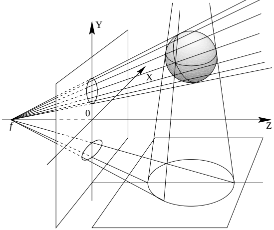
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

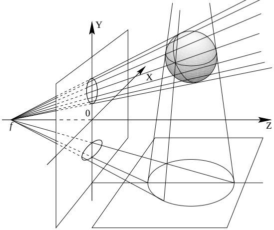
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

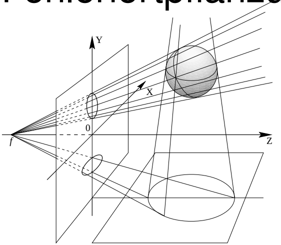
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie



Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

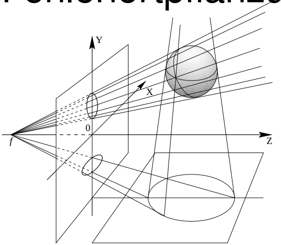
Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile

Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie

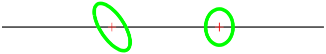


Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

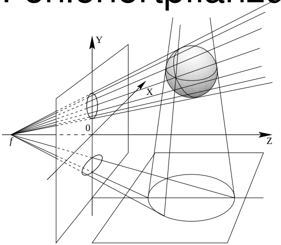
- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie

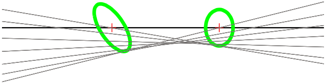


Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

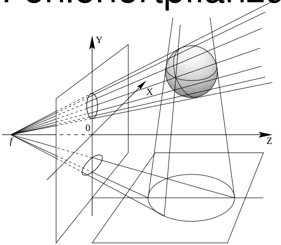
- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Fehlerfortpflanzung, Gruppierung, proj. Geometrie

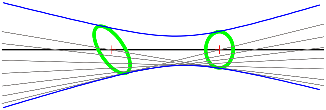


Projektive Geometrie

- Einsatzgebiet ist Computersehen
- Abbildungsvorschrift einer Lochkamera

Gruppierung

- Zusammenfassen zusammengehöriger Bildteile



Fehlerfortpflanzung

- Auswirkung von Messfehlern auf abgeleitete Größen.

Motivation für Fehlerfortpflanzung:

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum"
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Motivation für Fehlerfortpflanzung: Fehlerfortpflanzung verhindert Frickellösungen.

Leider üblich

- Fehlermaß in Pixel oder „Residuum“
- Sehr viele Parameter / Schwellwerte
- Unangebrachte Algorithmen (z. B. Euklidischer Abstand im projektiven Raum)

Ziel

- „Wahrscheinlichkeit“ als natürliches Fehlermaß
- Einige wenige (typisch 1–3) Parameter (Signifikanzlevel)
- Das Fehlerverhalten von Algorithmen im Vorfeld studieren

Fehlerquellen

Objektiv

- Verzeichnungen
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- Empfindlichkeit
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- Abtastprobleme
- Anisotrophie
- Kantenmodell

Fehlerquellen

Objektiv

- Verzeichnungen
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- Empfindlichkeit
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

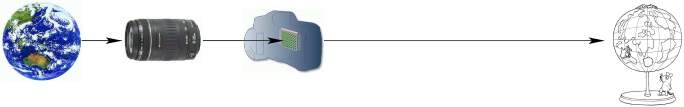
Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- Abtastprobleme
- Anisotrophie
- Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- Verzeichnungen
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- Empfindlichkeit
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

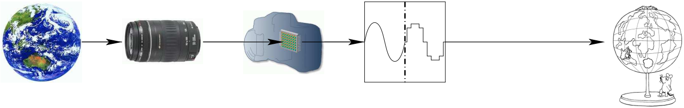
Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- Abtastprobleme
- Anisotrophie
- Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- Verzeichnungen
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- Empfindlichkeit
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

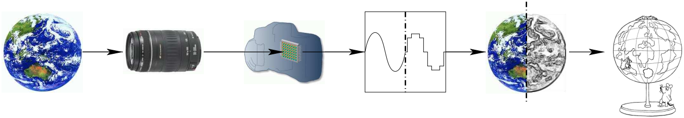
Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- Abtastprobleme
- Anisotrophie
- Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- Verzeichnungen
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- Empfindlichkeit
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

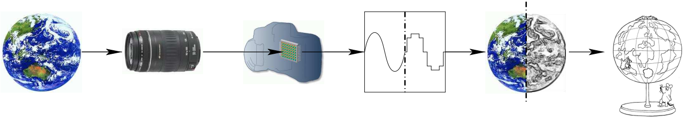
Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- Abtastprobleme
- Anisotrophie
- Kantenmodell

Fehlerquellen



Objektiv

- ~~Verzeichnungen~~
- Sphärische Aberr.
- Chromat. Aberr.
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Unschärfe

Sensor

- ~~Empfindlichkeit~~
- Pixelrauschen
- Bayer-Artefakte

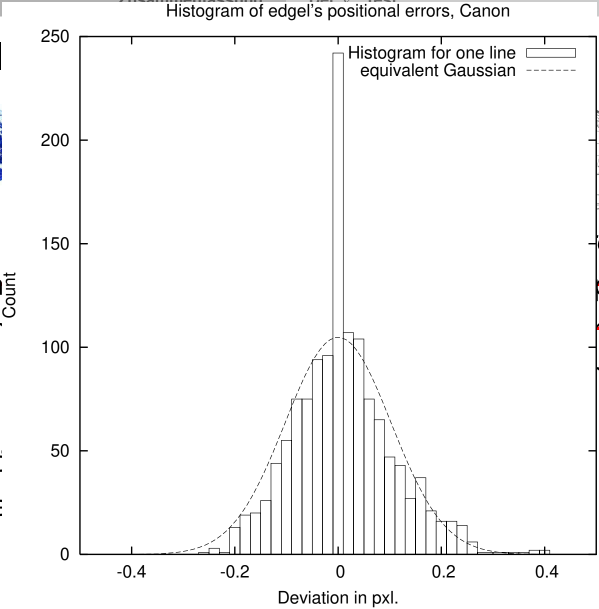
Diskretisierung

- Rundung
- Aliasing
- Kompression

Kantendetektor

- ~~Abtastprobleme~~
- ~~Anisotrophie~~
- Kantenmodell

Fehlerquel



Objektiv

- ~~Verzeichn~~
- Sphärisch
- Chromat.
- Koma
- Bildfeldwö
- Unschärfe

ektor

- ~~probleme~~
- ~~rophie~~
- nmodell

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung

Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}^{\mathsf{T}}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}$

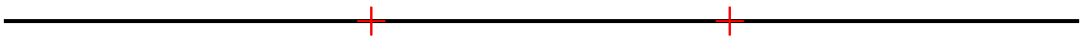
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left.\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$

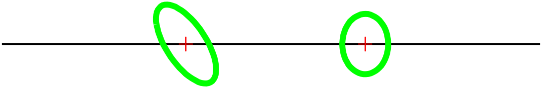
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left.\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}^T_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}$

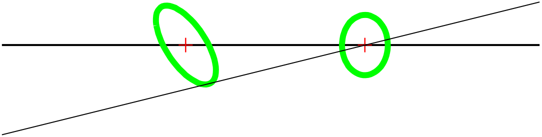
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left. \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^T \right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_\mathbf{y} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_\mathbf{x} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^T$

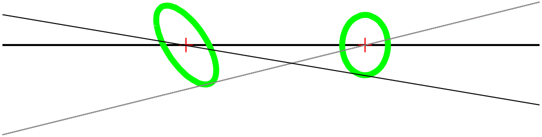
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_\mathbf{y} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left.\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^T \right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$

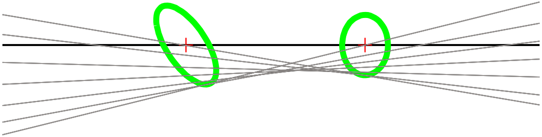
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left. \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^{\mathsf{T}} \right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$

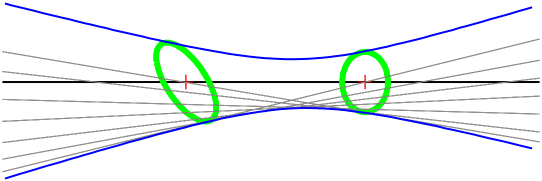
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2} \right)^{-1} \left. \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)^{\mathsf{T}} \right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$

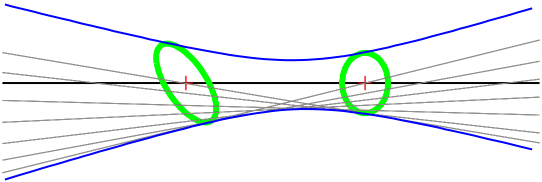
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min\limits_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left.\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{yx}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{yx}_0}^{\mathsf{T}}$$

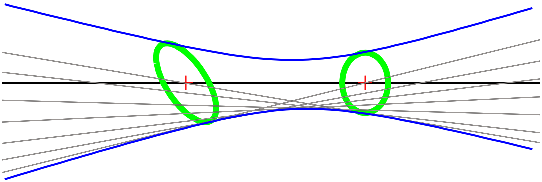
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{yx}_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left.\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$$

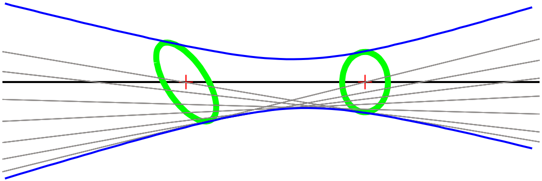
Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left.\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Prinzip der (linearen) Fehlerfortpflanzung



Kovarianzmatrizen: $$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0}^{\mathsf{T}}$$

Explizit

- $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_0} = \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$

Implizit

- $\min\limits_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gegeben
- $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0\mathbf{x}} = -\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{y}^2}\right)^{-1} \left.\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}\right)^{\mathsf{T}}\right|_{\mathbf{y}_0}$

Der χ^2-Test als einheitliches Fehlermaß

- erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- **Definition**: Summe von *N* quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- Summe von *N* quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi^2_{N,\alpha}$$

- Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
  $\Rightarrow$ hohe Signifikanz des Ergebnisses
  $\Rightarrow$ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2-Test als einheitliches Fehlermaß

- erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- **Definition**: Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi^2_{N,\alpha}$$

- Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
  $\Rightarrow$ hohe Signifikanz des Ergebnisses
  $\Rightarrow$ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2-Test als einheitliches Fehlermaß

- erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- **Definition**: Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi^2_{N,\alpha}$$

- Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
  $\Rightarrow$ hohe Signifikanz des Ergebnisses
  $\Rightarrow$ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Der χ^2-Test als einheitliches Fehlermaß

- erlaubt den Vergleich von Verteilungen
- **Definition**: Summe von N quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen
- Summe von N quadrierten Gauss-verteilten Fehlern d_i^2

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2}{\sigma_{d_i}^2} < \chi^2_{N,\alpha}$$

- Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
- geringe Wahrscheinlichkeit des zufälligen Zustandekommens
  $\Rightarrow$ hohe Signifikanz des Ergebnisses
  $\Rightarrow$ Verteilungen wahrscheinlich gleich

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden

Ansatz II

- Normierte homogene Koord. $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden

Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden

Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden

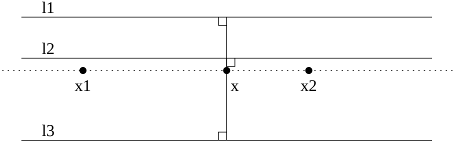
Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



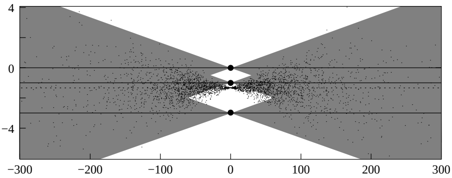
Ansatz II

- Normierte homogene Koord. $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



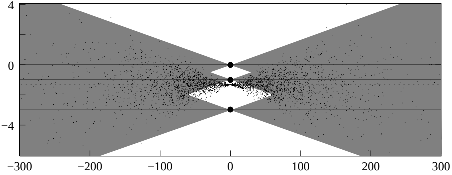
Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\ell_i^\mathsf{T} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



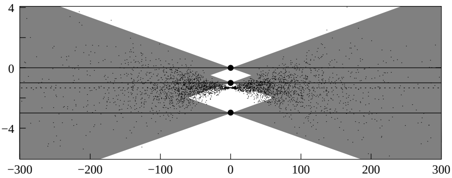
Ansatz II

- Normierte homogene Koord. $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



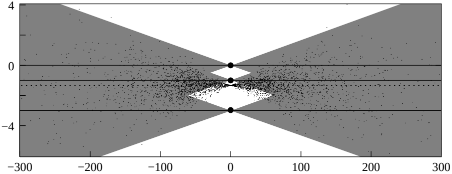
Ansatz II

- Normierte homogene Koord. $d_i = \ell_i^{\mathsf{T}} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\ell_i^{\mathsf{T}} \ell_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \ell_i \ell_i^{\mathsf{T}} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



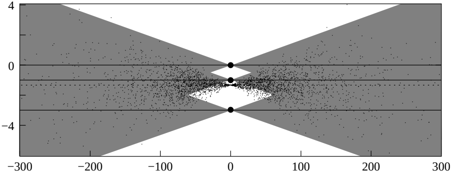
Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda (1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-Variant

Schnittpunktberechnung

Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



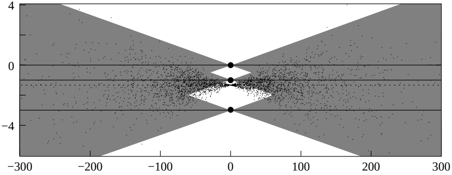
Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant

Schnittpunktberechnung

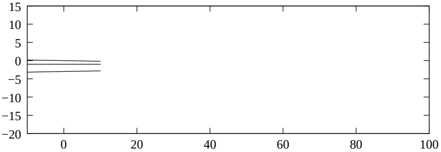
Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

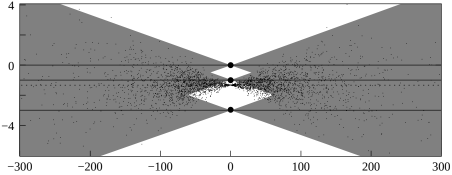
- Normierte homogene Koord. $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

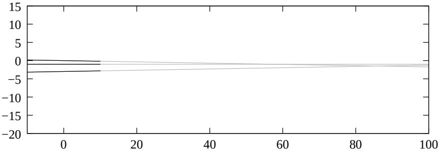
Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

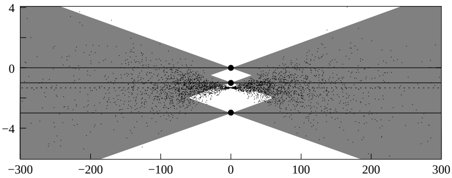
- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

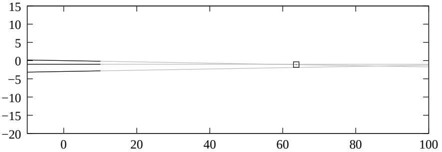
Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

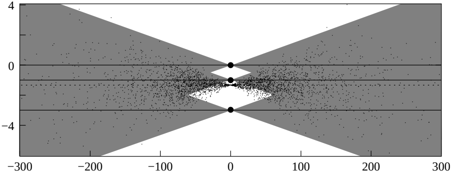
- Normierte homogene Koord. $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda (1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

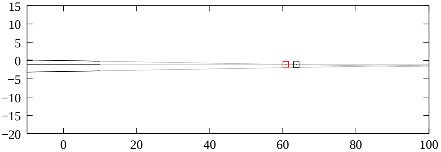
Ansatz I

- Hessesche Normalenform $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

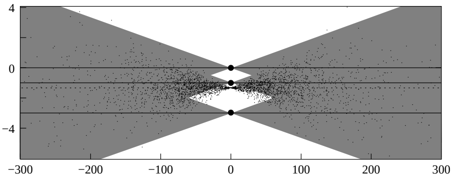
- Normierte homogene Koord. $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$, $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

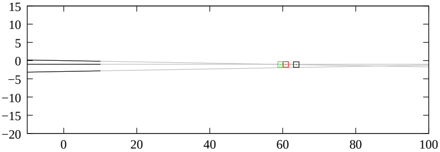
Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

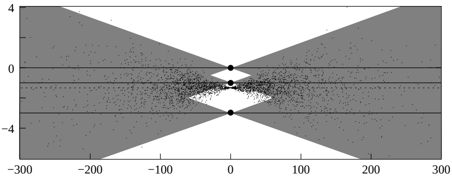
- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\boldsymbol{\ell}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

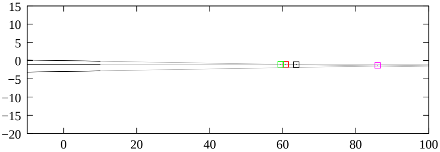
Ansatz I

- Hessesche Normalenform
  $d_i = a_i x + b_i y + c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$
- $\min\limits_{x,y} \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i)^2$
- Problem parallele Geraden



Ansatz II

- Normierte homogene Koord.
  $d_i = \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = a_i \hat{x} + b_i \hat{y} + c_i \hat{z}$,
  $\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$
- $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$
- Problem: Skalierungs-<u>V</u>ariant



Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i, \quad \mathbf{J}_{d_i,\boldsymbol{\ell}_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}, \quad \sigma^2_{d_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i} \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T} \ell_i \ell_i^\mathsf{T} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_i} \mathbf{x}} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$$

- Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- Nachteil: keine geschlossene Lösung
  Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i, \quad \mathbf{J}_{d_i,\boldsymbol{\ell}_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}, \quad \sigma^2_{d_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})$$

- Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- Nachteil: keine geschlossene Lösung
  Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i, \quad \mathbf{J}_{d_i,\boldsymbol{\ell}_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}, \quad \sigma^2_{d_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})$$

- Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- Nachteil: keine geschlossene Lösung
  Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i, \quad \mathbf{J}_{d_i,\boldsymbol{\ell}_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}, \quad \sigma^2_{d_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i}\mathbf{x}} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})$$

- Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- Nachteil: keine geschlossene Lösung
  Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Schnittpunktberechnung

Ansatz III

- Wie Ansatz II, aber mit Fehlerfortpflanzung

$$d_i = \mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i, \quad \mathbf{J}_{d_i,\boldsymbol{\ell}_i} = \mathbf{x}^\mathsf{T}, \quad \sigma_{d_i}^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i} \mathbf{x}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^\mathsf{T} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_i} \mathbf{x}} + \lambda(1 - \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x})$$

- Vorteil: invariant gegen Ähnlichkeitsabbildungen
- Nachteil: keine geschlossene Lösung
  Aber: schnelle iterative Ansätze [Kanatani]

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße

Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

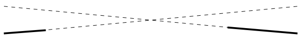
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad (\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad (\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\quad \dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

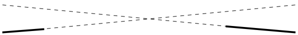
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad (\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad (\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

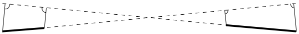
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad$ $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad$ $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

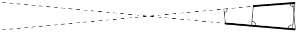
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

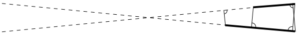
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad$ $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\quad$ $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Förstner04]

$\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\quad$ $\dfrac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

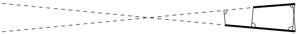
$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

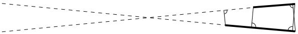
max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$\|(\ell_1 - \ell_2)\|_2^2 < T$ $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$

$\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$ $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
[Först.04]

$\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\ell_1^\mathsf{T} \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

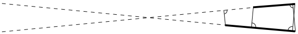
max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)^{\mathsf{T}}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1-\boldsymbol{\ell}_2}(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)^{\mathsf{T}}\Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1\times\boldsymbol{\ell}_2}(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$
[Först.04]

$\dfrac{(\boldsymbol{\ell}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\ell}_2)^2}{\|\boldsymbol{\ell}_1\|^2\,\|\boldsymbol{\ell}_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\dfrac{(\boldsymbol{\ell}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\ell}_2)^2}{\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}_1\boldsymbol{\ell}_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

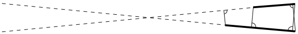
max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$ [Först.04]

$\dfrac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\|\boldsymbol{\ell}_1\|^2 \, \|\boldsymbol{\ell}_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\dfrac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}_1 \boldsymbol{\ell}_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

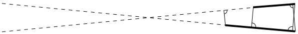
$\|(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $\quad$ $(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $\quad$ $(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\|\boldsymbol{\ell}_1\|^2 \, \|\boldsymbol{\ell}_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}_1 \boldsymbol{\ell}_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

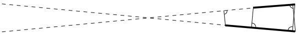
max. Abstand $< T$ [Coelho90]

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

$\|(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$ [Först.04]

$\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\|\boldsymbol{\ell}_1\|^2 \, \|\boldsymbol{\ell}_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}_1 \boldsymbol{\ell}_2}}$

Kollinearität — verschiedene Abstandsmaße



Abstandsmaße

max. Abstand $< T$ [Coelho90]

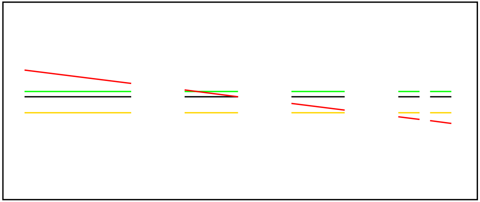
$\|(\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

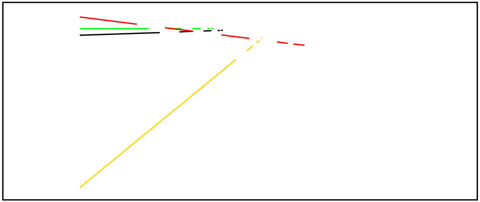
$\|(\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)\|_2^2 < T$ $\qquad (\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2)^\mathsf{T} \Sigma_{\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2} (\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2) < \chi^2$

[Först.04]

$\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\|\boldsymbol{\ell}_1\|^2 \, \|\boldsymbol{\ell}_2\|^2} > 1 - T$ [Imiya96] $\frac{(\boldsymbol{\ell}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{\ell}_2)^2}{\sigma^2_{\boldsymbol{\ell}_1 \boldsymbol{\ell}_2}}$

Kollinearität — Performance der Abstandsmaße

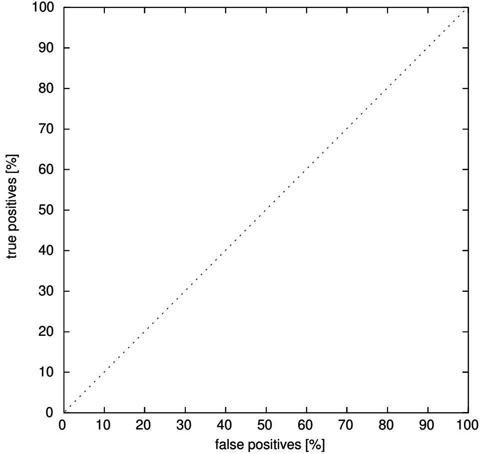




Abstandsmaße

- $1 - \dfrac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^T$
- $\dfrac{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}} < \chi^2$

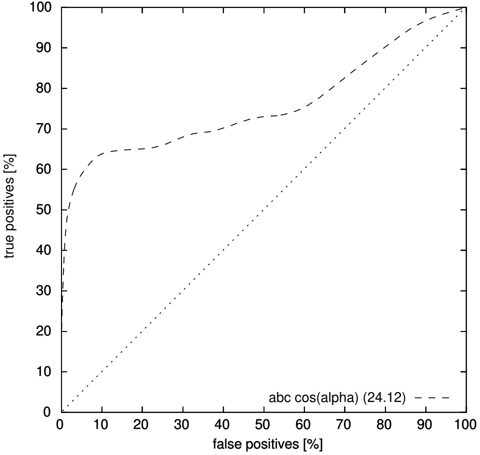
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \frac{(\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1-\ell_2}(\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1\times\ell_2}(\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^\mathsf{T}$
- $\frac{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2 - (\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1\ell_2}} < \chi^2$

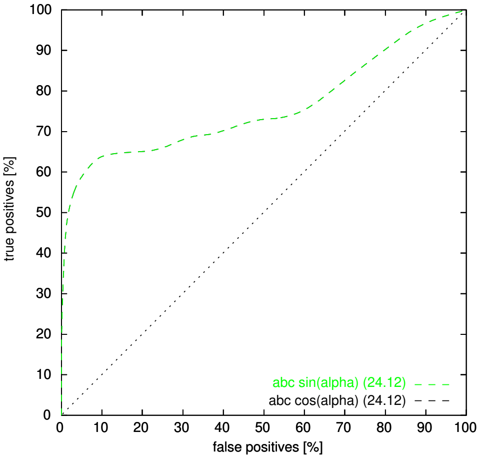
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \frac{(\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1-\ell_2}(\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1\times\ell_2}(\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^\mathsf{T}$
- $\frac{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2 - (\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1\ell_2}} < \chi^2$

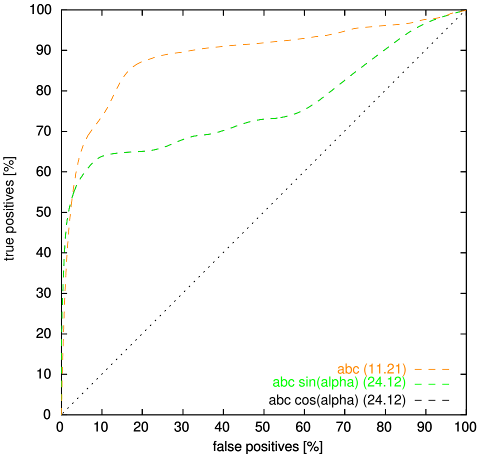
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^T$
- $\frac{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}} < \chi^2$

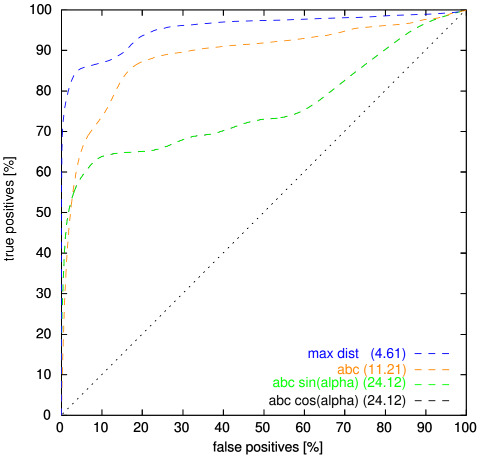
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \frac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^T$
- $\frac{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}} < \chi^2$

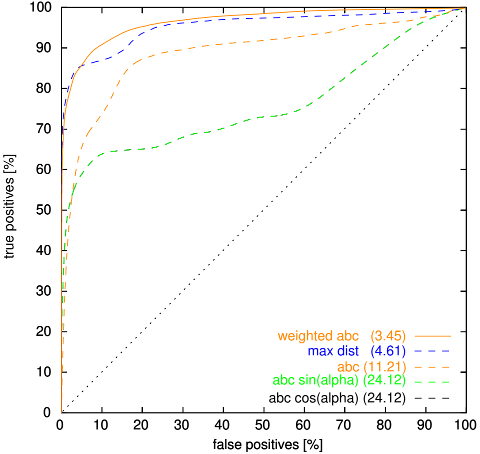
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \frac{(\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1-\ell_2}(\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1\times\ell_2}(\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^\mathsf{T}$
- $\frac{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2 - (\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1\ell_2}} < \chi^2$

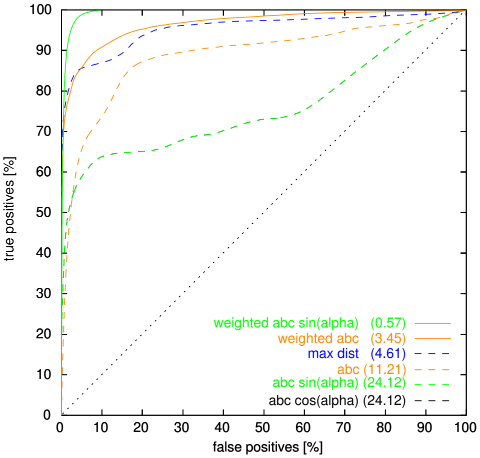
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \dfrac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^T$
- $\dfrac{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}} < \chi^2$

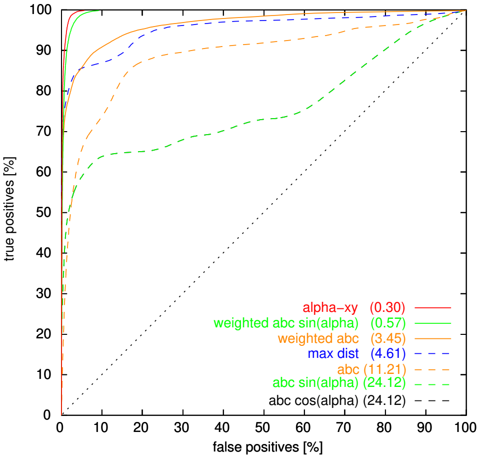
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \dfrac{(\ell_1^T \ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T (\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 - \ell_2} (\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^T \Sigma_{\ell_1 \times \ell_2} (\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^T$
- $\dfrac{\|\ell_1\|^2 \, \|\ell_2\|^2 - (\ell_1^T \ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1 \ell_2}} < \chi^2$

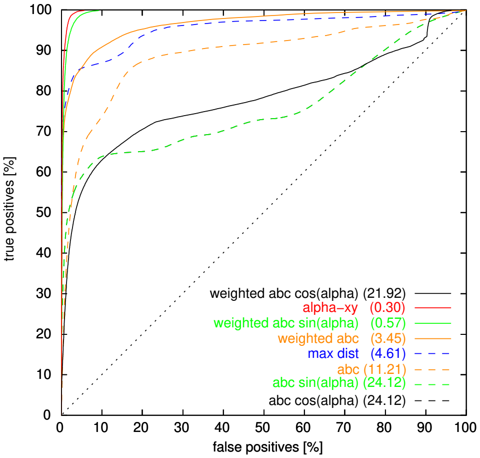
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \dfrac{(\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1-\ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1-\ell_2}(\ell_1-\ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1\times\ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1\times\ell_2}(\ell_1\times\ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^\mathsf{T}$
- $\dfrac{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2 - (\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1\ell_2}} < \chi^2$

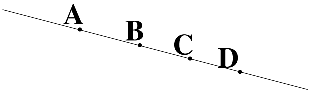
Kollinearität — Performance der Abstandsmaße



Abstandsmaße

- $1 - \dfrac{(\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2} < T$
- $\|(\ell_1 \times \ell_2)\|_2^2 < T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}(\ell_1 - \ell_2) < T$
- max. Abstand $< T$
- $(\ell_1 - \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1-\ell_2}(\ell_1 - \ell_2) < \chi^2$
- $(\ell_1 \times \ell_2)^\mathsf{T}\Sigma_{\ell_1\times\ell_2}(\ell_1 \times \ell_2) < \chi^2$
- $(\alpha, x, y)^\mathsf{T}$
- $\dfrac{\|\ell_1\|^2\,\|\ell_2\|^2 - (\ell_1^\mathsf{T}\ell_2)^2}{\sigma^2_{\ell_1\ell_2}} < \chi^2$

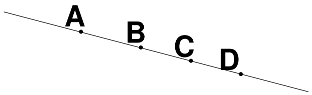
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

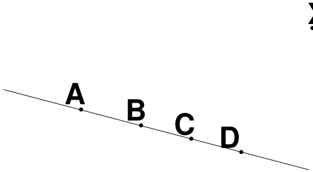
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

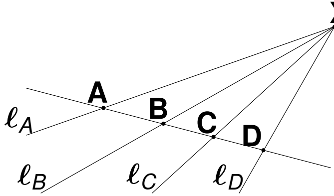
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

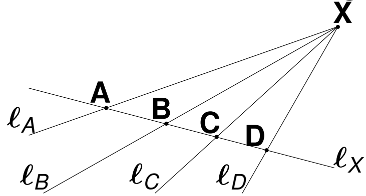
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|}$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

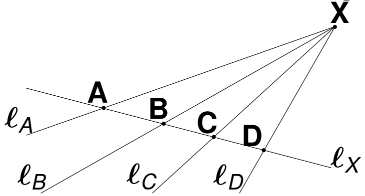
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

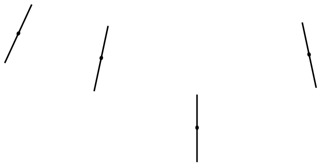
$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

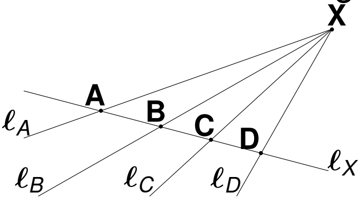


$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

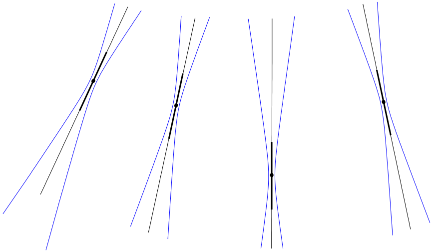


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

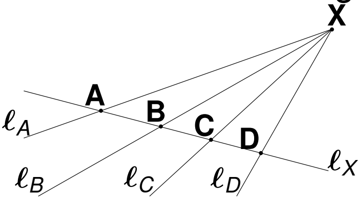


$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

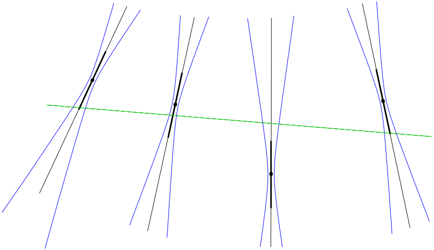


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

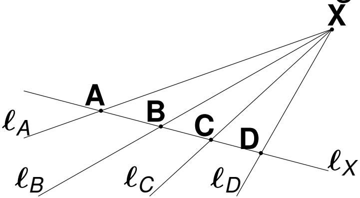


$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

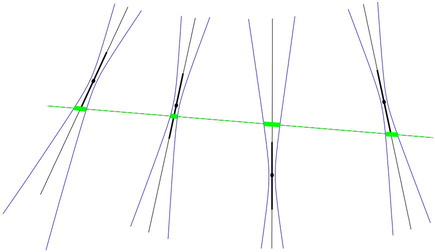


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

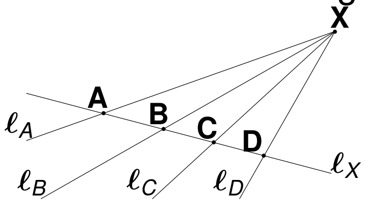


$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A \ell_B \ell_C \ell_D) = \frac{|\ell_A \ell_C \ell_X|}{|\ell_B \ell_C \ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B \ell_D \ell_X|}{|\ell_A \ell_D \ell_X|}$$

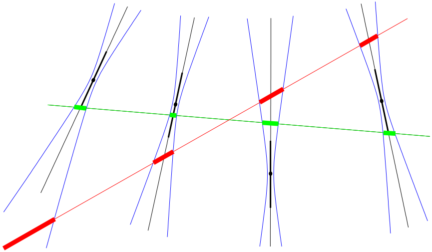


Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses

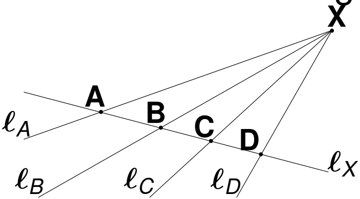


$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A\ell_B\ell_C\ell_D) = \frac{|\ell_A\ell_C\ell_X|}{|\ell_B\ell_C\ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B\ell_D\ell_X|}{|\ell_A\ell_D\ell_X|}$$

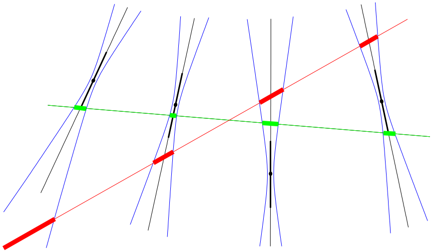


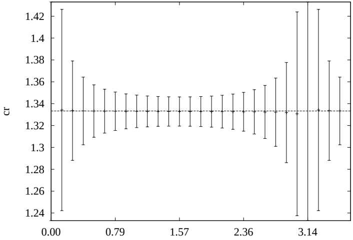
Schnelle Berechnung des Doppelverhältnisses



$$\mathrm{cr}(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{|\mathbf{ACX}|}{|\mathbf{BCX}|} \cdot \frac{|\mathbf{BDX}|}{|\mathbf{ADX}|} =$$

$$\mathrm{cr}(\ell_A\ell_B\ell_C\ell_D) = \frac{|\ell_A\ell_C\ell_X|}{|\ell_B\ell_C\ell_X|} \cdot \frac{|\ell_B\ell_D\ell_X|}{|\ell_A\ell_D\ell_X|}$$





Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

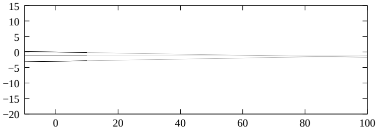
Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

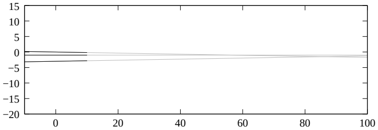
- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

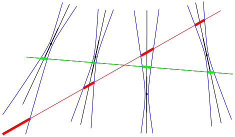


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

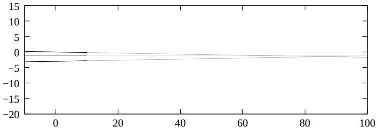


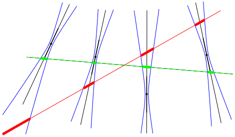


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

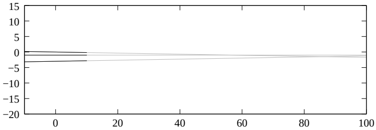


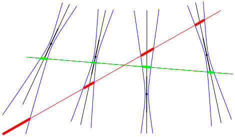


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

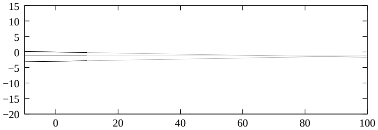


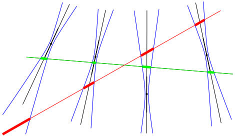


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

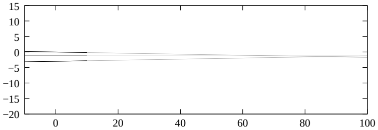


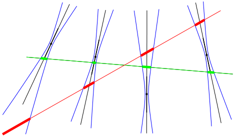


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

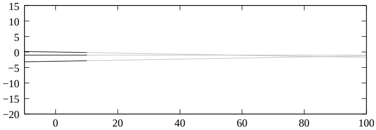


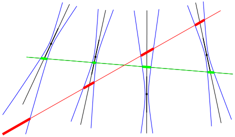


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

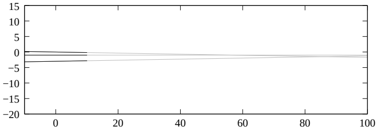


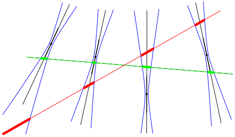


Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion

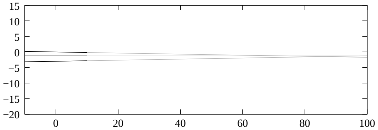


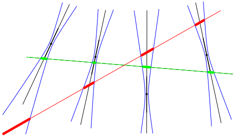


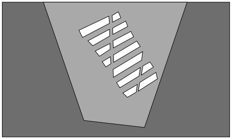
Beispiel I: Zebrastreifenerkennung

Merkmale

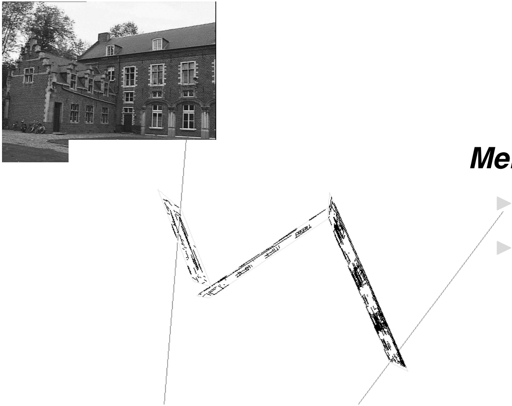
- Gemeinsamer Schnittpunkt
- Bekanntes Doppelverhältnis
- Horizont
- Rückprojektion







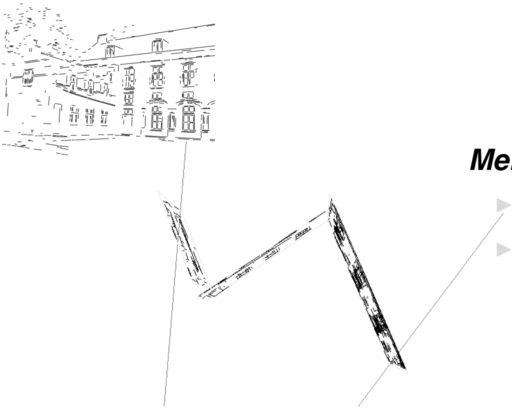
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

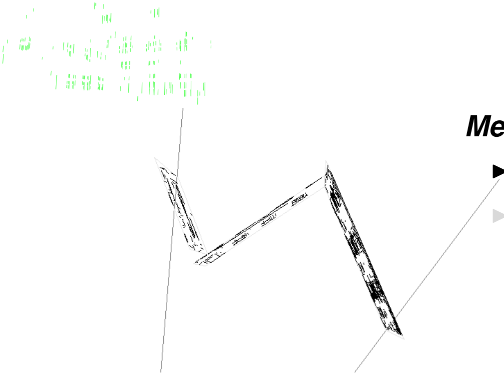
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

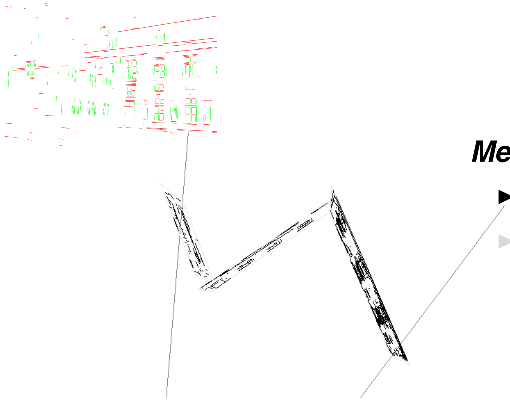
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

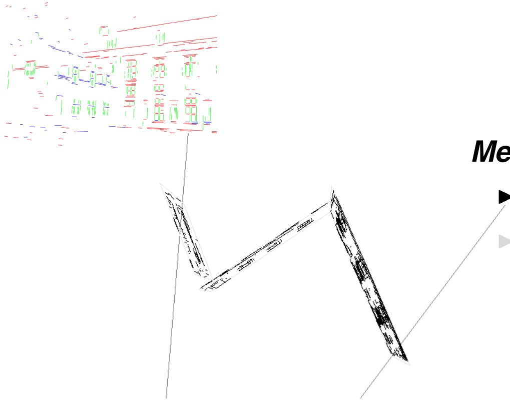
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

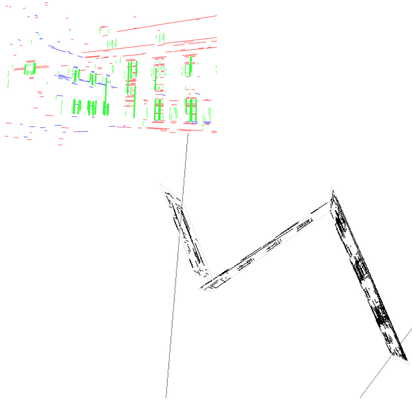
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

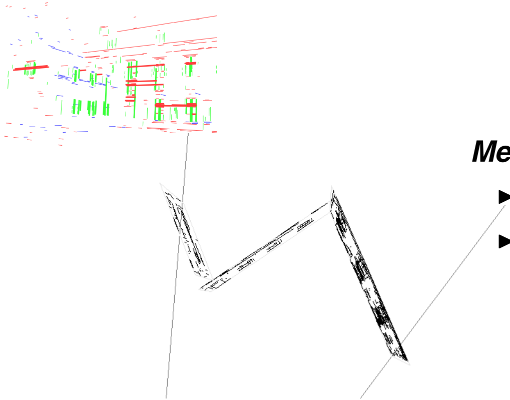
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

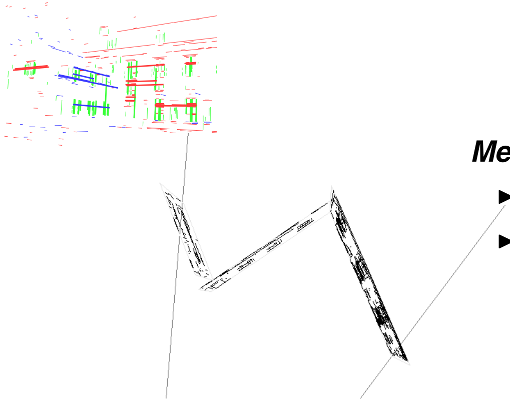
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

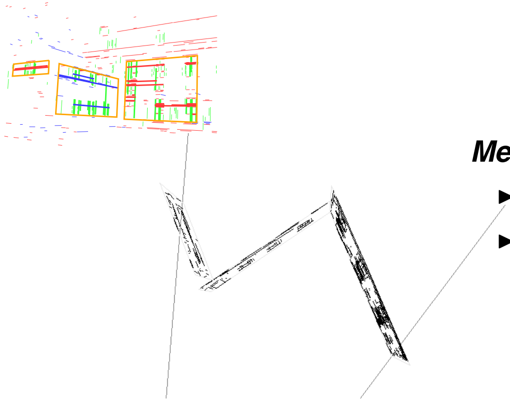
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

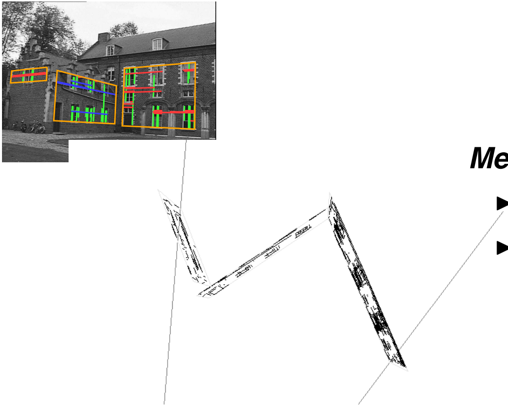
Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

Beispiel II: Häuserfronten



Merkmale

- Schnittpunkt
- Kollinearität

Beispiel III: Rotationssymmetrie

Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

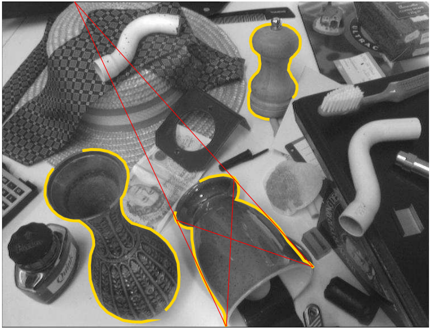
Beispiel III: Rotationssymmetrie

Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

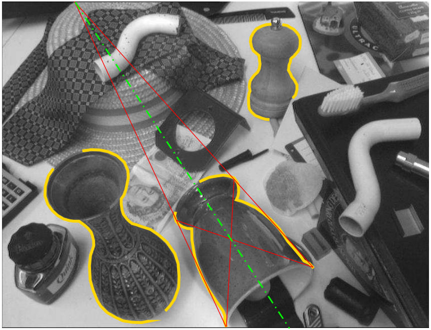


Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

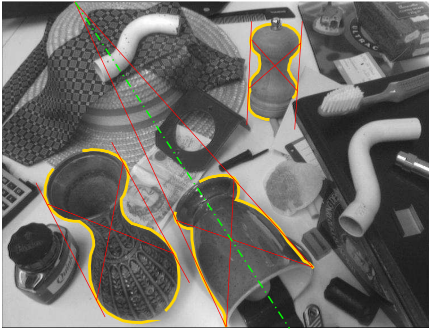


Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

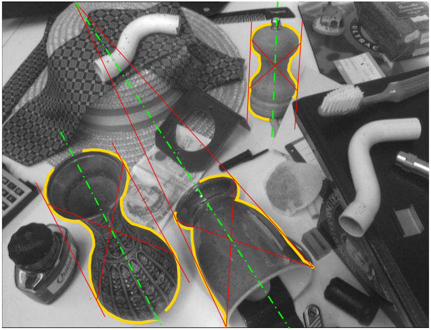


Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

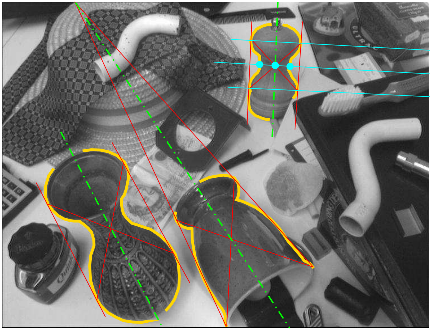


Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

Beispiel III: Rotationssymmetrie

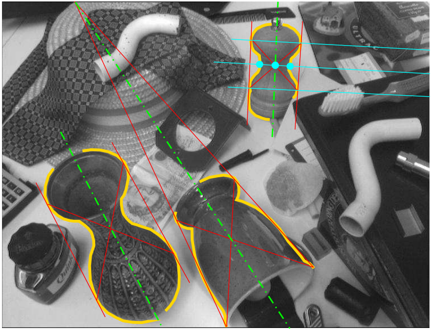


Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler

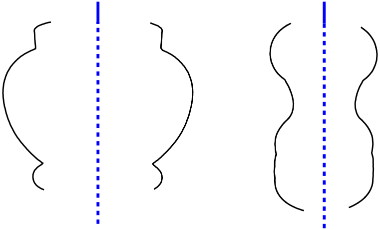
Beispiel III: Rotationssymmetrie



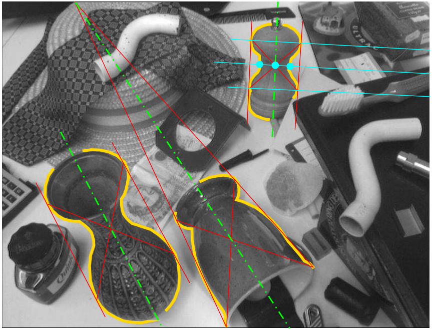
Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler



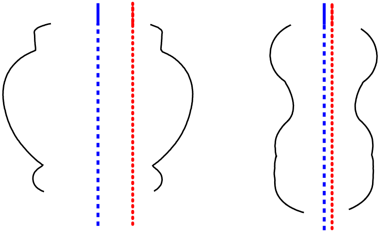
Beispiel III: Rotationssymmetrie



Merkmale

- Kollinearität (von Punkten)
- Doppelverhältnis

Extreme Fehler



Zusammenfassung

- Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- Integration von (3D) Modellfehlern
- Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- Integration von (3D) Modellfehlern
- Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

- Integration von (3D) Modellfehlern
- Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

Zusammenfassung

- Untersuchung des Fehlerverhaltens gängiger Algorithmen
- Entwicklung neuer Parametrisierungen und Algorithmen
- Praktische Anwendung anhand von drei Beispielen

Dissertation

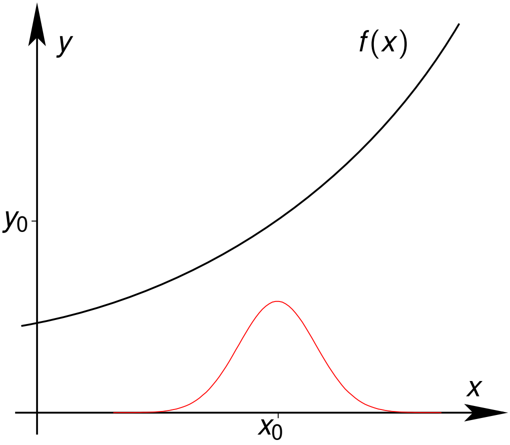
- Integration von (3D) Modellfehlern
- Canonical Frames zur projektiven Entzerrung

Ausblick

- Einbeziehung von Farbe und Textur

Fehlerfortpflanzung vermeidet Frickeln

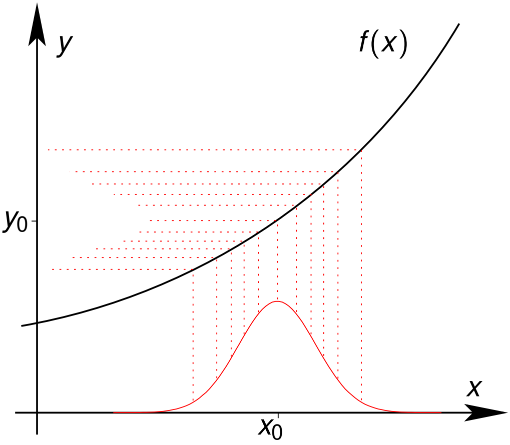
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

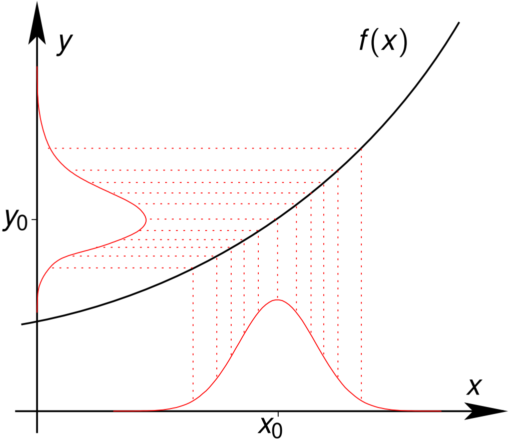
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

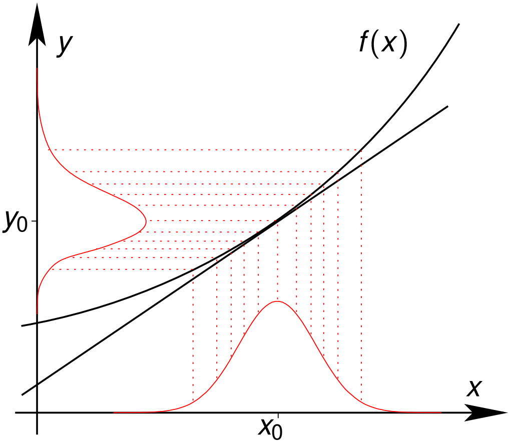
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

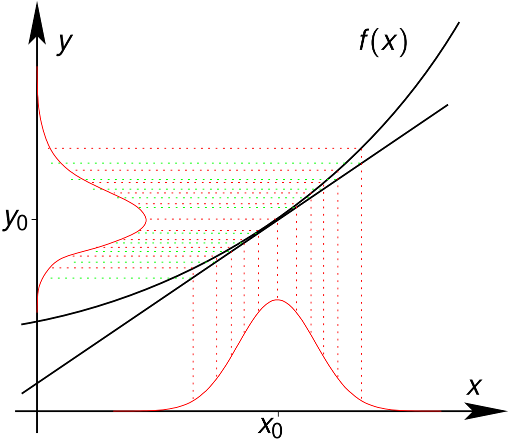
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

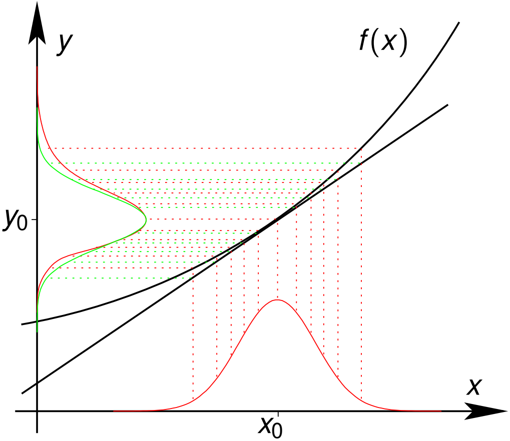
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

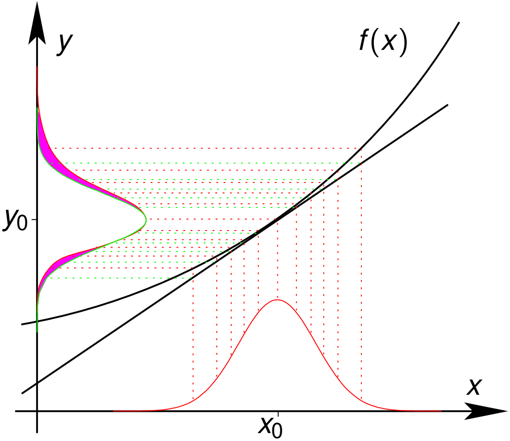
(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

(Lineare) Fehlerfortpflanzung



- Gegeben: x, σ_x, $f(x)$
- Gesucht: die pdf von $y = f(x)$
- Handhabbar: Linearisierung
- Verteilung behält Form bei
- Annahme kleiner Fehler

Return

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel* 2 *Punkte

- $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^\mathsf{T}$,
  $\ell = (a, b, c)^\mathsf{T} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1\times}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2\times}\mathbf{p}_1$,
  $$\mathbf{p}_{i\times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$
- $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3\times 3}$
- $\mathbf{J}_{\ell\mathbf{p}_i} = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times})$
  $$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} \\ \mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T} \end{pmatrix} =$$
  $$\mathbf{p}_{2\times}\Sigma_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} + \mathbf{p}_{1\times}\Sigma_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T}$$

Return

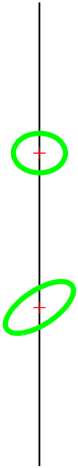
Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

Beispiel* 2 *Punkte

- $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^{\mathsf{T}}$,
  $\ell = (a, b, c)^{\mathsf{T}} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1\times}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2\times}\mathbf{p}_1$,
  $$\mathbf{p}_{i\times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$
- $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3\times 3}$
- $\mathbf{J}_{\ell \mathbf{p}_i} = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times})$
  $$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2\times}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{p}_{1\times}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} =$$
  $$\mathbf{p}_{2\times}\Sigma_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_{2\times}^{\mathsf{T}} + \mathbf{p}_{1\times}\Sigma_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_{1\times}^{\mathsf{T}}$$

Return

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte

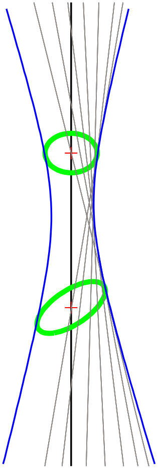


Beispiel* 2 *Punkte

- $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^\mathsf{T}$,
  $\ell = (a, b, c)^\mathsf{T} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1\times}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2\times}\mathbf{p}_1$,
  $$\mathbf{p}_{i\times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$
- $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3\times 3}$
- $\mathbf{J}_{\ell \mathbf{p}_i} = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times})$
  $$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} \\ \mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T} \end{pmatrix} =$$
  $$\mathbf{p}_{2\times}\Sigma_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} + \mathbf{p}_{1\times}\Sigma_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T}$$

Return

Fehlerfortpflanzung: Linie durch 2 Punkte



Beispiel 2 ***Punkte***

- $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 1)^\mathsf{T}$,
  $\ell = (a, b, c)^\mathsf{T} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{1\times}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2\times}\mathbf{p}_1$,
  $$\mathbf{p}_{i\times} = \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix}$$
- $\Sigma_{\mathbf{p}_1}, \Sigma_{\mathbf{p}_2} \in R^{3\times 3}$
- $\mathbf{J}_{\ell\mathbf{p}_i} = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times})$
  $$\Sigma_\ell = (\mathbf{p}_{2\times}, \mathbf{p}_{1\times}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{p}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} \\ \mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T} \end{pmatrix} =$$
  $$\mathbf{p}_{2\times}\Sigma_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_{2\times}^\mathsf{T} + \mathbf{p}_{1\times}\Sigma_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_{1\times}^\mathsf{T}$$

Return